Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 1.

1. Петя просматривал календарь 21 века, начиная с 2001 года и заканчивая 2100 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 21 веке?

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y\cdot(x-\sin y)^2+\cos y\cdot(x-cosy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ ΔBCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=30^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 2.

Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?

Ответ: .

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y\cdot(x-\sin y)^2+ctgy\cdot(x-ctgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=45^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Ответ:

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?

Ответ: .

2. Найти все y, для которых уравнение $\cos y\cdot(x-\cos y)^2+tgy\cdot(x-tgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Ответ:

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

Ответ: .

2. Найти все y, для которых уравнение $tgy \cdot (x - tgy)^2 + ctgy \cdot (x - ctgy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Ответ:

1. A. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

7

8 8 8 9 8 7 8

Sample Output:

No

Sample Input:

7

7 7 9 9 7 9 7

Sample Output:

Yes

2. B. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую b−1;
3) За третью b−2 и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.

Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R ($L \le R$), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \le q \le 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \le L \le n$, $1 \le b \le 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:
```
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
```
Sample Output:
```
1
2
8
5
```

3. C. Объедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады “ЮНИОР”. В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

3.4 Пример входных данных

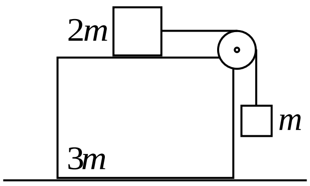
Sample Input:
3 1
2
Sample Output:
4

Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2023-2024 учебного года, 10 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0,5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1,5 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль$\cdot$град). Ответ обосновать.

2. Если к источнику ЭДС подключить некоторый резистор, ток через источник составит $I_1 = 0,18$ А. Если к тому же источнику подключить второй резистор (отключив первый), ток через источник составит $I_2 = 0,21$ А. Если же к этому источнику подключить оба резистора, соединенных последовательно, ток через источник составит $I_3 = 0,14$ А. Каким будет ток через источник, если его клеммы замкнуть накоротко?

3. В системе из трех тел массами m, $2m$ и $3m$ (см. рисунок) коэффициент трения между большим телом и горизонтальной поверхностью стола равен μ. При каких значениях μ большое тело будет неподвижным на поверхности стола? Блок и веревка невесомы, веревка нерастяжима.



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 10 класс

Вариант 1.

1. Петя просматривал календарь 21 века, начиная с 2001 года и заканчивая 2100 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 21 веке?

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y \cdot (x - \sin y)^2 + \cos y \cdot (x - cosy)^2 = 0$ имеет единственное число x своим решением.

3. Окружность описана около равнобедренного $CB = CD$ ΔBCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD = 30^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 2.

Вариант 2

1. Петя просматривал календарь 22 века, начиная с 2101 года и заканчивая 2200 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 22 веке?

Ответ: .

2. Найти все y, для которых уравнение $\sin y\cdot(x-\sin y)^2+ctgy\cdot(x-ctgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=45^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $\sqrt[4]{2}$.

Ответ:

Вариант 3

1. Петя просматривал календарь 23 века, начиная с 2201 года и заканчивая 2300 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 23 веке?

Ответ: .

2. Найти все y, для которых уравнение $\cos y\cdot(x-\cos y)^2+tgy\cdot(x-tgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=60^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна $2\sqrt[4]{3}$.

Ответ:

Вариант 4

1. Петя просматривал календарь 24 века, начиная с 2301 года и заканчивая 2400 годом. Он считал год с номером n «счастливым», если сумма частного и остатка от деления n на 100 являлась делителем числа n. Сколько «счастливых» лет насчитал Петя в 24 веке?

Ответ:

2. Найти все y, для которых уравнение $tgy\cdot(x-tgy)^2+ctgy\cdot(x-ctgy)^2=0$ имеет единственное число x своим решением.

Ответ:

3. Окружность описана около равнобедренного $CB=CD$ треугольника BCD. На ее дуге BD, не содержащей точки C, взята точка A так, что $\measuredangle BAD=120^0$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если длина отрезка AC равна 4.

Ответ: