Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант № 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x+5=\left[\lg\left(10^{y}\cdot 2^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 2^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант №2

1. По кругу написано 2024 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением y.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ:

Вариант №3

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением x.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+\dfrac{a}{3}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырех-угольника $ABCD$.

Ответ:

Вариант №4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x;y)$ с наименьшим возможным значением y.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+\dfrac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырех-угольника $ABCD$.

Ответ:

1. A. Делим на 9

1.1 Условие

В МИФИ происходят перестановки в расписании, отчего у вас попросили узнать следующее:

Допустим, у вас есть массив a длины n. Он состоит из целых положительных чисел. Вам необходимо определить, возможно ли переставить его элементы таким образом, чтобы произведение любых двух соседних элементов делилось нацело на 9.

1.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 2*10^5$). Вторая строка содержит n целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$).

1.3 Вывод

Выведите Yes, если это возможно, и No в противном случае

1.4 Пример входных данных

Sample Input:

7

8 8 8 9 8 7 8

Sample Output:

No

Sample Input:
7
7 7 9 9 7 9 7
Sample Output:

Yes

2. B. Играем в игры

2.1 Условие

У мифиста есть n игр. В i-ой игре есть a[i] число сессий, которые он должен в нее отыграть. Пусть дано целое число b, определяющее, сколько удовольствия он получит. Тогда за время прохождения всех сессий i-ой игры его удовольствие изменится следующим образом:

1) За время первой сессии он получит b единиц удовлетворения;
2) За вторую b−1;
3) За третью b−2 и так далее, пока все сессии не будут отыграны.

Соответственно, после отыгрывания очередной сессии удовольствие мифиста может начать уменьшаться. Также он обязан отыграть все a[i] сессий.
Необходимо узнать, хватит ли сил мифисту, чтобы сдать сессию. Для этого обработайте q запросов вида: даны числа L и b. Найдите такое число R (L≤ R), что он отыграет все сессии в каждой игре от L до R включительно и получит наибольшее удовольствие. Обратите внимание, что ответ может быть очень большим, поэтому используйте подходящий целочисленных тип данных в вашем языке (long long в C++, Long в Java и тд).

2.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит одно целое число n ($1 \le n \le 5000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^6$).

Третья строка содержит одно целое число q ($1 \le q \le 5000$).

Следующие q строк содержат по два целых числа L и b ($1 \le L \le n$, $1 \le b \le 10^6$) - описания каждого запроса.

2.3 Вывод

Выведите q целых чисел, по одному на каждой строке. i-я строка должна содержать лучшее значение R для i-ого запроса. Если существует несколько возможных ответов, выведите наименьший из них.

2.4 Пример входных данных

Sample Input:
8
1 3 8 1 1 6 3 3
4
1 1
1 2
1 3
4 1
Sample Output:
1
2
8
5

3. C. Объедаемся пирожками

3.1 Условие

Сегодня у Владислава знаменательный день: он пишет финальный этап олимпиады “ЮНИОР”. В силу этого ему нужно хорошо подкрепиться пирожками.

Так как в МИФИ за последнее время открылось очень много кафетериев, теперь можно приобрести целых n видов пирожков. Влад хочет ими пообедать, поэтому Вы хотите ему в этом помочь.

Влад очень не любит k чисел. Он хочет купить какой-то непустой набор пирожков так, чтобы число пирожков в нем не было его нелюбимым. Но также Влад любит разнообразие, поэтому он не хочет покупать более 1 пирожка каждого вида.

Помогите ему найти число различных наборов пирожков, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Так как число способов может быть крайне большим, выведите ответ по модулю 1000000007.

Обратите внимание, что у Влада нелюбимых чисел не больше 20.

3.2 Входные данные

Первая строка ввода содержит два целых числа n ($1 \le n \le 10^9$) и k ($1 \le k \le \min(n, 20)$).

Вторая строка содержит k целых нелюбимых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le \min(n, 2*10^5)$), $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

3.3 Вывод

Выведите число способов, которыми он может набрать себе пирожки на обед по модулю 1000000007.

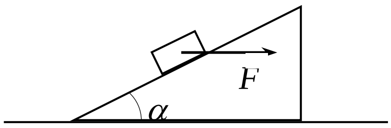
3.4 Пример входных данных

Sample Input:
3 1
2
Sample Output:
4

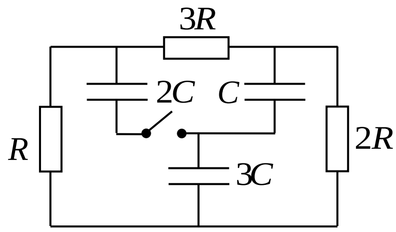
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2023-2024 учебного года, Олимпиада по физике, 11 класс

1. В открытом сосуде Дьюара (сосуде, допускающим хранение сжиженных газов при низких температурах) объемом $V = 20$ л остался объем $V_0 = 0,5$ л жидкого азота. Его не заметили и прочно закрыли сосуд крышкой. Азот в сосуде постепенно нагревался и испарялся. Разорвет ли сосуд Дьюара, когда весь азот испарится и нагреется до комнатной температуры $t = 20°$ С, если сосуд выдерживает максимальное внутреннее давление $p_m = 1 \cdot 10^6$ Па? И если да, то при какой температуре азота внутри сосуда его разорвет? Плотность жидкого азота $\rho = 800$ кг/м^3, молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль$\cdot$град). Ответ обосновать.

2. На горизонтальной поверхности стола находится незакрепленный клин с углом при основании α. На наклонную грань этого клина кладут тело массой m и действуют на него такой горизонтальной силой $\vec{F}$ (см. рисунок), что ускорение тела оказывается направленным перпендикулярно наклонной грани клина. Найти силу F. Трение между телом и клином отсутствует.



3. Имеется электрическая цепь, состоящая из трех резисторов R, $2R$ и $3R$, трех конденсаторов C, $2C$ и $3C$, и проводов с пренебрежимо малым сопротивлением (см. схему на рисунке). Конденсатор $2C$ заряжают зарядом q (остальные конденсаторы не заряжены), а потом замыкают ключ. Какие количества теплоты Q_R, Q_{2R} и Q_{3R} выделятся на каждом резисторе в процессе установления равновесия?



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки», Олимпиада по математике, Заключительный этап, 11 класс

Вариант № 1

1. По кругу написано 2023 положительных числа так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму этих чисел.

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x + 5 = \left[\lg\left(10^y \cdot 2^x\right)\right] - \left[\lg\left[10^{3y} \cdot 2^x\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наибольшим возможным значением x.

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $1 + \frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант №2

1. По кругу написано 2024 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти сумму квадратов этих чисел

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x-7=\left[\lg\left(10^{2y}\cdot 3^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{-y}\cdot 3^{x}\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением y.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $2+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{26}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ:

Вариант №3

1. По кругу написано 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти произведение этих чисел.

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $3x-1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 4^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{3y}\cdot 4^{x}\right]\right]$, где $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $\left(x;y\right)$ с наибольшим возможным значением x.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $3+\frac{a}{3}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\sqrt{29}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ:

Вариант №4

1. По кругу написано 25 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Найти квадрат суммы этих чисел.

Ответ:

2. Пара целых чисел x, y удовлетворяет уравнению $2x+1=\left[\lg\left(10^{-y}\cdot 5^{x}\right)\right]-\left[\lg\left[10^{4y}\cdot 5^{x}\right]\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a. Найти пару $(x; y)$ с наименьшим возможным значением y.

Ответ:

3. На продолжениях каждой из сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (в обе стороны) взяты по две точки, равноотстоящие от середины соответствующей стороны на расстояние $4+\frac{a}{2}$, где a – длина стороны. Полученные 8 точек являются вершинами восьмиугольника, про который известно, что около него можно описать окружность радиуса $\frac{\sqrt{130}}{2}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ: