ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 1-1

Задача 1. (5 баллов) Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3,\ a_1 = 1$. Вычислить $\log_3(a_{2023} + 3)$

Решение:

Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

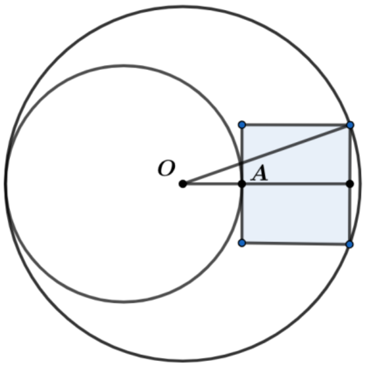
$x_{n+1} = 2x_n,\ x_1 = 1 + 3 = 4 = 2^2,\ x_2 = 2^3, \ldots, x_n = 2^{n+1}$, тогда

$a_n + 3 = 2^{n+1}, \quad \log_3(a_{2023} + 3) = \log_3 2^{2023+1} = 2024\log_3 2$

Ответ: $\log_3(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_3 2$

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 10$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 14$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OA = d - R = 14 - 10 = 4$, $OC = OA + AC = 4 + 2x$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (4 + 2x)^2 + x^2 = 16 + 16x + 4x^2 + x^2 = 5x^2 + 16x + 16 \Rightarrow 5x^2 + 16x + 16 = 100 \Rightarrow$

$5x^2 + 16x - 84 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 + \sqrt{64 + 420}}{5} = \dfrac{-8 + \sqrt{484}}{5} = \dfrac{-8 + 22}{5} = \dfrac{14}{5}$, тогда искомая площадь равна $\left(\dfrac{28}{5}\right)^2 = \dfrac{784}{25} = 31\dfrac{9}{25} = 31.36$ кв.ед.

Ответ: 31.36 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=2$ центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^2-1\right)}{y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-1\right)}=-1.$$

Решение:

ОДЗ: $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x^2-1\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x^2\neq\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x\neq\pm\sqrt[4]{2}\end{array}\right.$

Пусть $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\sin^2\alpha-1\right)=-2\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\cos^2\alpha-1\right),$$

$$\cos\alpha\left(2\sqrt{2}\sin^2\alpha-1\right)+\sin\alpha\left(2\sqrt{2}\cos^2\alpha-1\right)=0,$$

$$\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha-\cos\alpha+\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0,\quad \sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

$$\left(\sqrt{2}\sin 2\alpha-1\right)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

тогда $\sin 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=-1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0\le\alpha\le 2\pi$, находим:

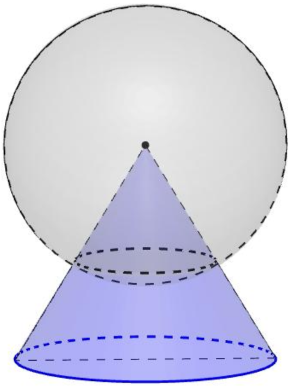
$\alpha_1=\frac{\pi}{8},\alpha_2=\frac{3\pi}{8},\alpha_3=\frac{9\pi}{8},\alpha_4=\frac{11\pi}{8},\alpha_5=\frac{3\pi}{4},\alpha_6=\frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{8},2\sin\frac{\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{3\pi}{8},2\sin\frac{3\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{9\pi}{8},2\sin\frac{9\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{11\pi}{8},2\sin\frac{11\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

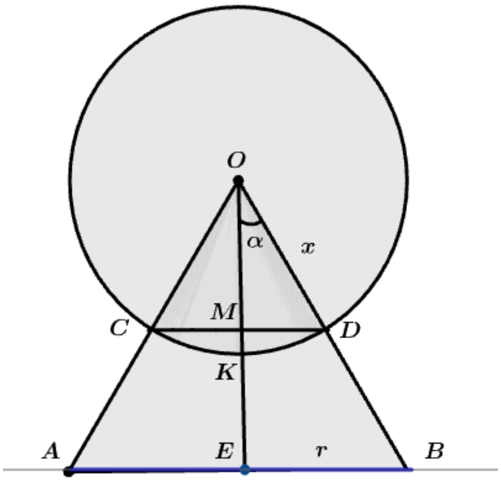
Ответ:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{8},2\sin\frac{\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{3\pi}{8},2\sin\frac{3\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{9\pi}{8},2\sin\frac{9\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{11\pi}{8},2\sin\frac{11\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара, поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r=3$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь поверхности соприкосновения жемчужины и серебряного конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot OE=\frac{1}{3}\pi\cdot r^3\cdot\mathrm{ctg}\alpha$,

$$V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot x^2\cdot KM=\frac{2}{3}\pi\cdot x^2\cdot(OK-OM)=\frac{2}{3}\pi\cdot x^2\cdot(x-x\cdot\cos\alpha)=$$

$$=\frac{2}{3}\pi\cdot x^3\cdot(1-\cos\alpha)=\frac{4}{3}\pi\cdot x^3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По условию $V_2=\frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{4}{3}\pi\cdot x^3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot r^3\cdot\mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x=\frac{r}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\frac{1}{4}}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[6]{\frac{243}{4}}.$$

Тогда площадь поверхности соприкосновения конуса и жемчужины равна

$$S=\pi\cdot MD\cdot x=\pi\cdot(x\cdot\sin\alpha)\cdot x=\pi\cdot x^2\cdot\sin\alpha=\pi\cdot\left(\sqrt[6]{\frac{243}{4}}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{243}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\pi\cdot\frac{3^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2}=\pi\cdot\frac{3^{\frac{13}{6}}}{2^{\frac{5}{3}}}=\frac{9\sqrt[6]{3}}{2\sqrt[3]{4}}\pi=\frac{9\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{16}}{2\cdot 4}\pi=\frac{9\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{256}}{8}\pi=\frac{9\sqrt[6]{768}}{8}\pi$$

Ответ: $S=\frac{9\sqrt[6]{768}}{8}\pi$

Задача 5. (15 баллов) Для получения сертификата о прохождении онлайн-курса, слушателям необходимо пройти компьютерное тестирование и правильно ответить на два вопроса, выбранных случайным образом из 32 возможных. Каждый вопрос имеет три варианта ответа, один из которых правильный. В случае, если слушатель не выучил вопрос, он может попытаться угадать правильный ответ. Сколько вопросов необходимо выучить, чтобы получить сертификат с вероятностью не менее 0,5?

Решение:
Пусть m - число вопросов, которые необходимо выучить.
Вероятность того, что слушатель знает ответ на два вопроса, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)$;
вероятность того, что слушатель знает ответ на один из двух вопросов, а ответ на другой вопрос угадывает, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)$;
вероятность того, что слушатель не знает, но угадывает ответы на два вопроса, равна

$$\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right).$$

Тогда вероятность получить сертификат равна

$$\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{32\cdot 31}+\frac{2m(32-m)}{32\cdot 31\cdot 3}+\frac{(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(32-m)+(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=$$

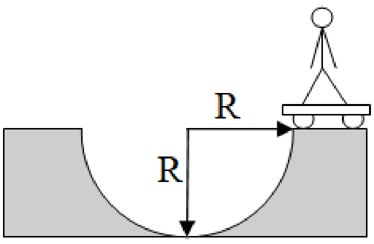
$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+192m+992-31m-32m+m^2}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{4m^2+120m+992}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}$$

$$P=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{m^2+30m+248}{4\cdot 31\cdot 9}\geq 1\Leftrightarrow m^2+30m+248-4\cdot 31\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+30m-868\geq 0$$

$m^2+30m-868=0$ при $m=-15+\sqrt{15^2+868}=-15+\sqrt{1093}>18$

Значит выучить нужно более 18 вопросов.
Ответ: 19 или более.

Задача 6. Находящийся на рампе скейтбордист массой 60 кг начинает движение вниз по склону с начальной скоростью 2 м/с. После того как он 4 раза пересек нижнюю точку рампы он вернулся в то положение, из которого начинал движение и остановился. Какое количество теплоты выделяется за счет сил трения при его перемещении с одного края рампы на другой? Считать, что скейтбордист катится, не прикладывая дополнительных сил во время движения. Плоскость рампы в сечении представляет собой полуокружность. (5 баллов)



Дано:
$m = 60$ кг
$v_0 = 2$ м/с

$Q = ?$

Решение:
Запишем закон сохранения энергии для данной системы. В начальной точке он обладает потенциальной энергией и кинетической, после прохождения рампы часть этой энергии тратиться на работу силы трения и выделяется в виде тепла. С другой стороны рампы (на той же высоте) он будет иметь ту же потенциальную энергию и меньшую кинетическую.

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = Q + mgR + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{mv^2}{2}$$

Из уравнения видно, что с каждым проходом кинетическая энергия будет уменьшаться на величину Q. Так как по условию он пересекает рампу 4 раза, это значит, что все кинетическая энергия на выделение тепла. Отсюда получаем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 4Q$$

$$Q = \frac{mv_0^2}{8} = \frac{60 \cdot 2^2}{8} = 30 \text{ Дж}$$

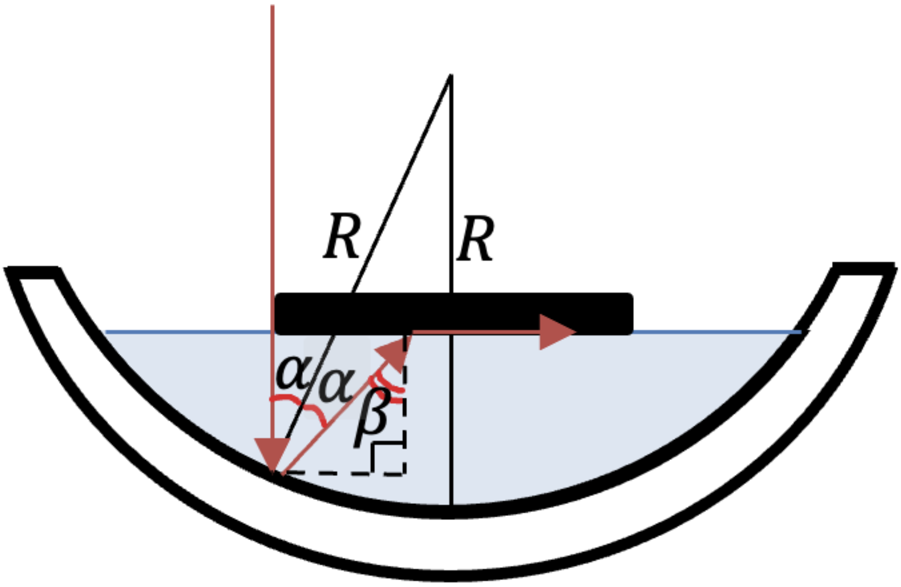
Ответ: $Q = 30$ Дж

Задача 7. В емкость со сферическим зеркальным дном налита какая-то жидкость, в центре поверхности которой плавает плоский диск диаметром 50 см. Лучи света падают на всю поверхность жидкости нормально. Чему приблизительно будет равен показатель преломления жидкости, учитывая то, что снаружи не видно ни одного отраженного от дна луча. Радиус кривизны емкости 74 см (7 баллов)

Дано:
$d = 50$ см
$R = 74$ см

$n = ?$

Решение:



По рисунку видно, что угол α *можно выразить как:*

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R}$$

Угол β *можно выразить через* α:

$$90° - \beta = 90° - 2\alpha$$
$$\beta = 2\alpha$$

Для того чтобы свет не вышел из жидкости и не отражался от диска, надо чтобы он попадал на поверхность жидкости под углом полного внутреннего отражения:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1} = \frac{1}{n}$$

Распишем формулу двойного угла и выразим все через значение $\sin\alpha$*:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Получаем:

$$2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{n}$$

Подставим в выражение, значение $\sin\alpha$:

$$2\frac{d}{2R}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}} = \frac{1}{n}$$

Выразим и посчитаем n*:*

$$\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}=\frac{R}{dn}$$

$$n=\frac{R}{d\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}}$$

Значение $\frac{d^2}{4R^2}=\frac{0{,}02^2}{4\cdot 0{,}1^2}$ *очень мало, так что можем считать, что* $\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}\approx 1$

Получаем:

$$n\approx\frac{R}{d}\approx\frac{0{,}74}{0{,}5}\approx 1{,}48$$

Ответ: $n\approx 1{,}48$

Задача 8. Небольшой воздушный шарик с упругой оболочкой, прикрепленный слабой пружиной ко дну открытого сосуда с водой, имеет объем 1 $см^3$, при температуре жидкости 17°C. При этом расстояние от шарика до поверхности воды составляет 2 м. Сосуд с жидкостью нагревают до 57°C и ждут пока в результате испарения, расстояние от шарика до поверхности уменьшится в два раза, шарик при этом растягивается. Чему равна жесткость пружины, если в результате ее удлинение изменилось на 2 см. Атмосферное давление принять равным $\mathbf{10^5}$ Па. (10 баллов)

Дано:

$T_1 = 27°C = 300$ К

$T_2 = 57°C = 330К$

$\rho_в = \frac{1000кг}{м^3}$

$h_1 = 2$ м

$h_1 = 2h_2$

$v_1 = 1\ см^3 = 10^{-6} м^3$

$\Delta x = 2$ см $= 0{,}02$ м

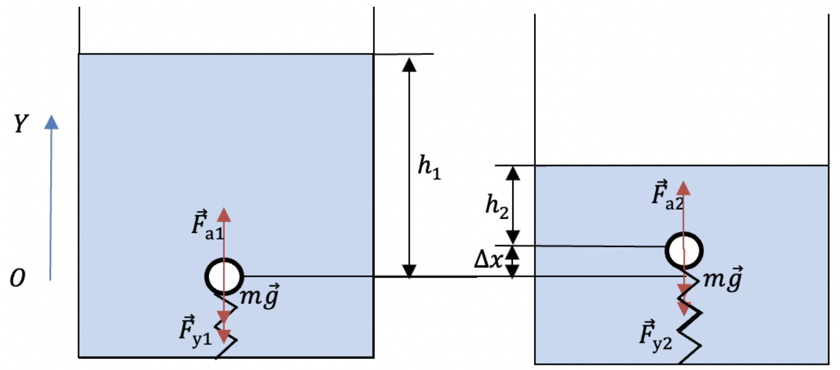
$p_{атм} = 10^5 Па$

$k = ?$

Решение:

Сделаем рисунки для случаев до и после испарения жидкости и расставим действующие на шарик силы:

1) *2)*



Запишем уравнения I закона Ньютона для каждого из случаев:

$$\overrightarrow{F_{a1}} + \overrightarrow{F_{y1}} + m\vec{g} = 0 \qquad \overrightarrow{F_{a2}} + \overrightarrow{F_{y2}} + m\vec{g} = 0$$

$$OY: F_{a1} - F_{y1} - mg = 0 \qquad OY: F_{a2} - F_{y2} - mg = 0$$

С учетом $F_a = \rho g v$ и $F_y = kx$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho g v_1 - kx_1 = mg \\ \rho g v_2 - kx_2 = mg \end{cases}$$

Приравняем уравнения друг другу через mg:

$$\rho g v_1 - kx_1 = \rho g v_2 - kx_2$$

$$kx_2 - kx_1 = \rho g v_2 - \rho g v_1$$

$$k = \frac{\rho g(v_2 - v_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\rho g(v_2 - v_1)}{\Delta x}$$

Необходимо понять, как изменился объем вследствие уменьшения давления воды на шарик. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$\begin{cases} p_1 v_1 = \vartheta R T_1 \\ p_2 v_2 = \vartheta R T_2 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{\vartheta R T_2}{\vartheta R T_1}$$
$$v_2 = \frac{p_1 v_1 T_2}{p_2 T_1}$$

Значения давлений:

Вследствие малых размеров шарика и пружины и их малым влиянием на изменение давления в зависимости от глубины погружения, можем ими пренебречь и учесть только снижение уровня жидкости.

$$p_1 = \rho g h_1 + p_{\text{атм}}$$
$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\text{атм}} = \frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}$$

Получаем:

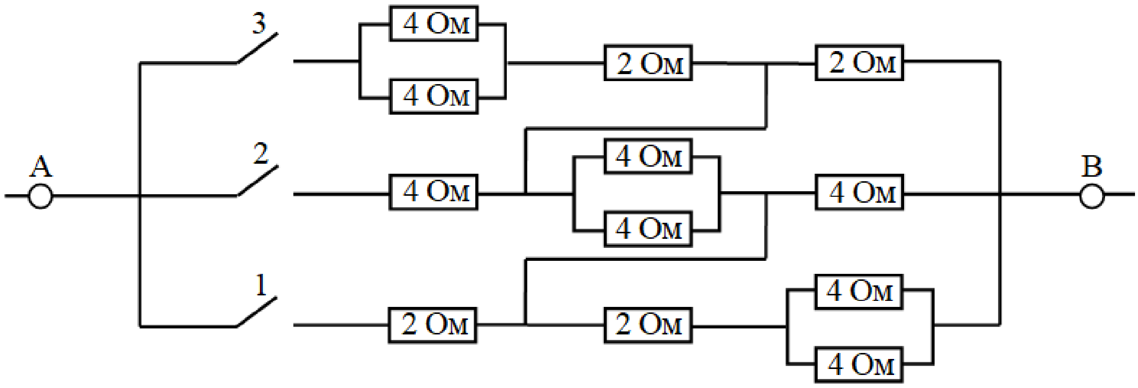
$$v_2 = \frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}$$

Самое значение коэффициента жесткости будет равно:

$$k = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{\Delta x} = \frac{\rho g \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1} - v_1\right)}{\Delta x}$$
$$= \rho g v_1 \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) T_2 - \left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1 \Delta x}\right)$$
$$= 1000 \cdot 10$$
$$\cdot 10^{-6} \left(\frac{(1000 \cdot 10 \cdot 2 + 10^5)330 - \left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 2}{2} + 10^5\right)300}{\left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 2}{2} + 10^5\right)300 \cdot 0{,}02}\right)$$
$$= 10^{-2}\left(\frac{(12)330 - (11)300}{(11)300 \cdot 0{,}02}\right) = 0{,}1 \text{ Н/м}$$

Ответ: $k = 0{,}1$ Н/м

Задача 9. На предложенной электрической схеме есть 3 ключа (1-3), каждый из них переключается через равные интервалы времени. Период изменения положения ключей: для первого – 1 с, для второго – 2 с, для третьего – 3 с. Разность потенциалов между точками А и В поддерживается постоянной и равна 12 В. В начальный момент времени все ключи разомкнуты. Найдите заряд, прошедший через точку В, за 3 секунды после включения первого переключателя. (13 баллов)



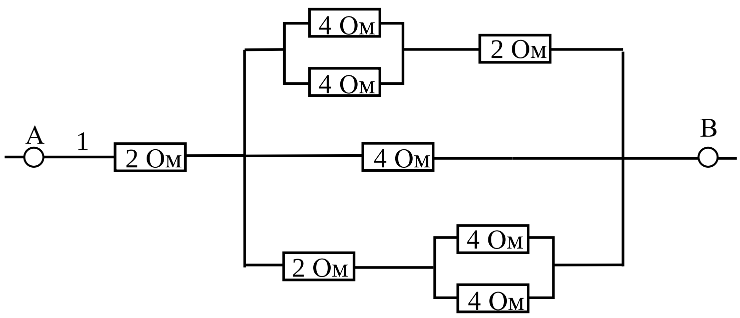
Дано:
$T_1 = 1c$
$T_2 = 2c$
$T_3 = 3c$
$U_{AB} = 12В$
$t = 3\ c$

$q = ?$

Решение:

Распишем интервалы времени и соответствующие им эквивалентные схемы относительно времени включения первого интервала:

1) 0-1 с (1 ключ – замкнут, 2,3 – не замкнуты)



Рассчитаем эквивалентное сопротивление такой цепи.

Для участков с параллельным соединением по 4 Ом:

$$\frac{1}{R_{4-4}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{4-4} = \frac{R_4}{2} = 2\ Ом$$

Верхняя и нижняя ветки цепи одинаковые, состоящие из 2 последовательных сопротивлений:

$$R_{2-4-4} = R_{4-4} + R_2 = 2 + 2 = 4\ Ом$$

В итоге получаем 3 параллельных соединения по 4 Ом. Рассчитаем общее сопротивление цепи:

$$\frac{1}{R_{4-4-4}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{4-4-4} = \frac{R_4}{3} = \frac{4}{3}\ \text{Ом}$$

$$R_{общ1} = R_2 + R_{4-4-4} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}\ \text{Ом}$$

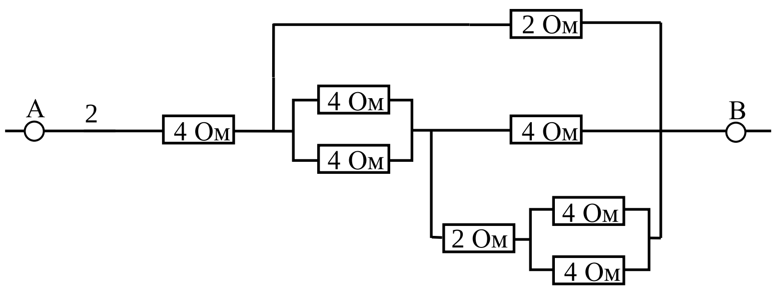
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за первый интервал времени:

$$q = It$$

С учетом $I = \frac{U}{R}$:

$$q_1 = \frac{U}{R_{общ1}} t = \frac{12}{\frac{10}{3}} 1 = 3{,}6\ \text{Кл}$$

2) 1-2 с (2 ключ – замкнут, 1 и 3 – не замкнуты)



Сопротивление нижнего участка, состоящего из последовательного и двух параллельных соединений, мы уже считали:

$$R_{2-4-4} = R_{4-4} + R_2 = 2 + 2 = 4\ \text{Ом}$$

Оно соединено параллельно резистору 4 Ом:

$$R_{2-4-4-4} = \frac{R_4 R_{2-4-4}}{R_4 + R_{2-4-4}} = \frac{4 \cdot 4}{4+4} = 2\ \text{Ом}$$

Далее эти элементы соединены последовательно с двумя параллельными сопротивлениями по 4 Ом. Снова получаем уже рассчитанный нами ранее элемент $R_{2-4-4} = 4$ Ом, *соединенный параллельно с сопротивлением 2 Ом.*

$$R_{2-4-4-2} = \frac{R_2 R_{2-4-4}}{R_2 + R_{2-4-4}} = \frac{2 \cdot 4}{2+4} = \frac{4}{3}\ \text{Ом}$$

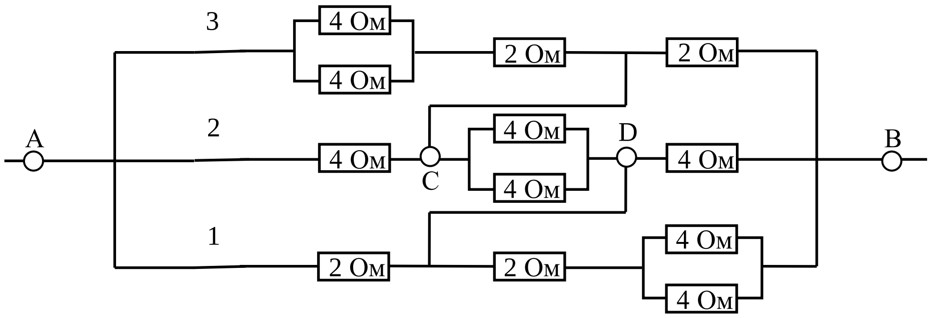
Общее сопротивление 2-ой цепи получается:

$$R_{общ2} = R_4 + R_{2-4-4-2} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\ \text{Ом}$$

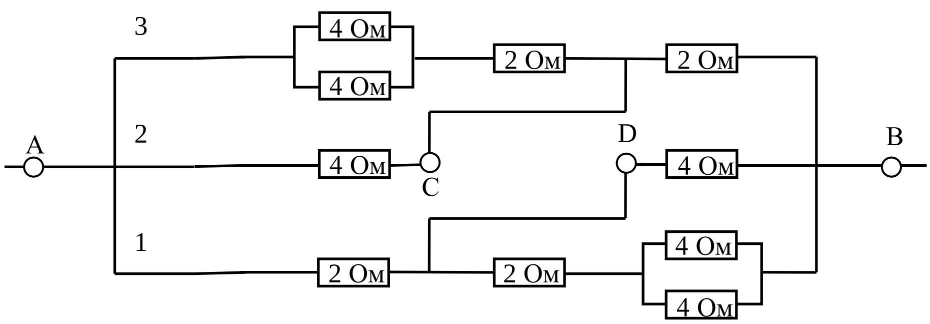
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{общ2}}t = \frac{12}{\frac{16}{3}}1 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25\ Кл$$

3) 2-3с (все ключи замкнуты)



Если посмотреть на схему, то можно выделить точки C и D. Для того чтобы понять, как протекает ток в этих точках, посчитаем сопротивления на интервалах AC и AD. На интервале AD находится одно сопротивление 2 Ом. На интервале AC находится 2 параллельных участка, проходящий через 3-ий ключ (уже посчитанный ранее $R_{2-4-4} = 4$ Ом*) и резистор 4 Ом. Их общее сопротивление равно также как и на участке AD 2 Ом. Аналогичная ситуация наблюдается на участках CB и DB, где общие сопротивления этих участков будут также равны 2 Ом.*
Так как потенциалы в точках C и D будут равны, то можем исключить центральный элемент из схемы, так как по нему ток протекать не будет.
Приходим к схеме:



Получаем два одинаковых параллельных участка. Посчитаем общее сопротивление верхнего, которое состоит из участка AC (2 Ом), последовательно соединенного с резистором 2 Ом. Получаем общее сопротивление верхней цепи равное 4 Ом.
Так как верхняя и нижняя ветки имеют одинаковое

сопротивление, и они параллельны, получаем что:

$$R_{\text{общ}3} = \frac{4}{2} = 2\ \text{Ом}$$

Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

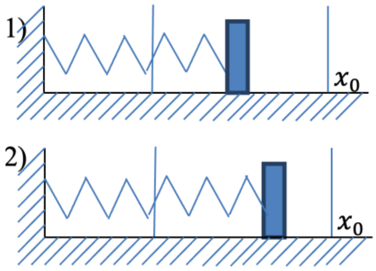
$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ}3}} t = \frac{12}{2} 1 = 6\ \text{Кл}$$

Общее количество зарядов за все время:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 3{,}6 + 2{,}25 + 6 = 11{,}85\ \text{Кл}$$

Ответ: $q = 11{,}85\ \text{Кл}$

Задача 10. Две разные пружины, прикрепленные к стенкам, с одинаковыми грузиками на концах находятся на гладких горизонтальных поверхностях. Оба маятника оттягивают с одинаковой силой и отпускают, в следствие чего они начинают совершать колебания вдоль горизонтальной оси. Первый маятник, в процессе своего движения, смещаясь к положению равновесия пружины в какой-то точке, имеет скорость вдвое меньшую, чем на вдвое меньшем расстоянии до положения равновесия. А второй маятник двигаясь аналогичным образом увеличивает свою скорость в три раза, при перемещении из первой во вторую точку. При этом расстояние до положения равновесия становится втрое меньшим. При этом в первых точках для обоих случаев сжатие пружины одинаково. Найдите отношение коэффициентов жесткости второй пружины к первой. (15 баллов)



Дано:

$x_1 = 2x_2$

$2v_1 = v_2$

$x_1' = 3x_2'$

$3v_1' = v_2'$

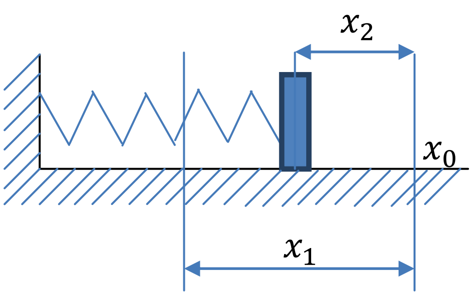
$x_1 = x_1'$

$\frac{k_2}{k_1} = ?$

Решение:

Так как движение обеих пружин идет по гладкой поверхности, то на небольшом промежутке времени их смещение можно описать как гармонические колебания пружинного маятника. Запишем уравнения смещения и скорости для первой пружины для первого и второго положений:

1)



$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0) \\ v_1 = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0) \\ v_2 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \varphi_0) \end{cases}$$

Для удобства расчетов заменим фазы колебания на $\delta_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ и $\delta_2 = \omega t_2 + \varphi_0$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\delta_1) \\ v_1 = -A\omega\sin(\delta_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\delta_2) \\ v_2 = -A\omega\sin(\delta_2) \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения тригонометрическую функцию:

$$\begin{cases} \cos(\delta_1) = \frac{x_1}{A} \\ \sin(\delta_1) = \frac{v_1}{-A\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\delta_2) = \frac{x_2}{A} \\ \sin(\delta_2) = \frac{v_2}{-A\omega} \end{cases}$$

Подставим их основное тригонометрическое тождество:

$$cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1 \qquad cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{-A\omega}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{-A\omega}\right)^2 = 1$$

Приведем к общему знаменателю оба уравнения:

$$\frac{\omega^2 x_1^2 + v_1^2}{A^2\omega^2} = 1 \qquad \frac{\omega^2 x_2^2 + v_2^2}{A^2\omega^2} = 1$$

$$\begin{cases} \omega^2 x_1^2 + v_1^2 = A^2\omega^2 \\ \omega^2 x_2^2 + v_2^2 = A^2\omega^2 \end{cases}$$

Выразим ω^2 из каждого из уравнений и приравняем:

$$\begin{cases} v_1^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \\ v_2^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} \\ \omega^2 = \dfrac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)} \end{cases}$$

$$\frac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} = \frac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)}$$

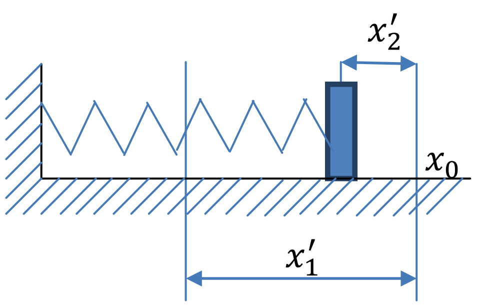
$$(A^2 - x_2^2)v_1^2 = (A^2 - x_1^2)v_2^2$$

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

Подставим соотношения из исходных данных:

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{\frac{\frac{x_1^2}{4} v_1^2 - 4v_1^2 x_1^2}{v_1^2 - 4v_1^2}} = \sqrt{\frac{5x_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}x_1$$

2)



Составим системы уравнений для второй пружины:

$$\begin{cases} x_1' = A'cos(\omega t_1' + \varphi_0') \\ v_1' = -A'\omega' \sin(\omega t_1' + \varphi_0') \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A'cos(\omega t_2' + \varphi_0') \\ v_2 = -A'\omega' \sin(\omega t_2' + \varphi_0') \end{cases}$$

Аналогичным образом выразим из этой системы значение амплитуды колебаний:

$$A' = \sqrt{\frac{{x'_2}^2{v'_1}^2 - {x'_1}^2{v'_2}^2}{{v'_1}^2 - {v'_2}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{{x'_1}^2}{9}\ {v'_1}^2 - 9{x'_1}^2{v'_1}^2}{{v'_1}^2 - 9{v'_1}^2}} = \sqrt{\frac{10{x'_1}^2}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}x'_1$$

Так как к пружины изначально оттягивают с одинаковой силой, то по закону Гука получаем, что:

$$k_1 x_{max} = k_2 x'_{max}$$

Откуда получаем (с учетом $x_1 = x'_1$):

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{x_{max}}{x'_{max}} = \frac{A}{A'} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}x_1}{\frac{\sqrt{10}}{3}x'_1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 1-2

Задача 1. (5 баллов) Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_5(a_{2023} + 3)$

Решение:

Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

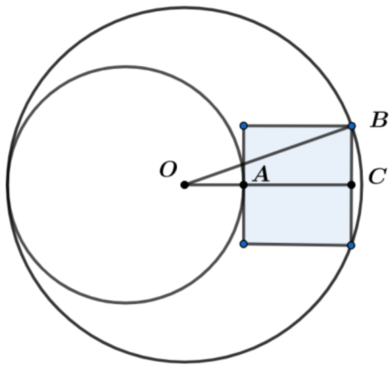
$x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $x_2 = 2^3, \dots, x_n = 2^{n+1}$, тогда

$a_n + 3 = 2^{n+1}$, $\quad \log_5(a_{2023} + 3) = \log_3 2^{2023+1} = 2024 \log_5 2$

Ответ: $\log_5(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_5 2$

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 5$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 7$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OA = d - R = 7 - 5 = 2$, $OC = OA + AC = 2 + 2x$.

Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (2+2x)^2 + x^2 = 4 + 8x + 4x^2 + x^2 = 5x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 5x^2 + 8x + 4 = 25 \Rightarrow$$

$$5x^2 + 8x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{16 + 105}}{5} = \frac{-4 + \sqrt{121}}{5} = \frac{-4 + 11}{5} = \frac{7}{5},$$ тогда искомая площадь равна $\left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{196}{25} = 7\frac{21}{25} = 7{,}84$ кв.ед.

Ответ: 7,84 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=2$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y^2-1\right)}{y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-1\right)}=-1.$$

Решение:

ОДЗ: $y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x^2-1\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x^2\neq\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x\neq\pm\sqrt[4]{3}\end{array}\right.$

Пусть $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$, $0\leq\alpha\leq 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\sin^2\alpha-1\right)=-2\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\cos^2\alpha-1\right),$$

$$\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\sin^2\alpha-1\right)+\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\cos^2\alpha-1\right)=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha-\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha-1\right)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

тогда $\sin 2\alpha=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=-1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0\leq\alpha\leq 2\pi$, находим: $\alpha_1=\frac{\pi}{6},\alpha_2=\frac{\pi}{3},\alpha_3=\frac{7\pi}{6},\alpha_4=\frac{4\pi}{3},\alpha_5=\frac{3\pi}{4},\alpha_6=\frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

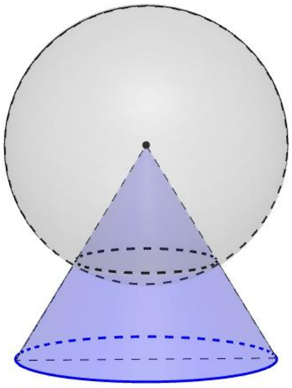
$$(\sqrt{3},1),(1,\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-1),(-1,-\sqrt{3}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

Ответ:

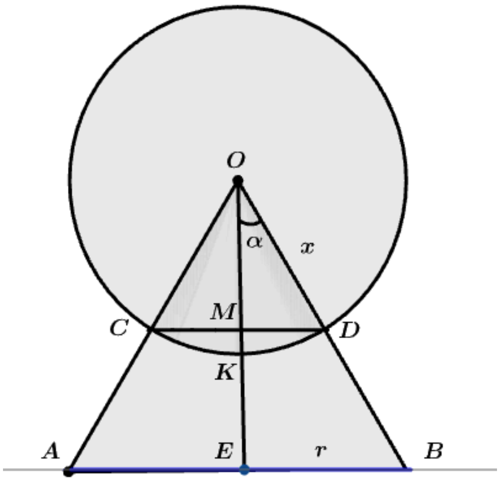
$(\sqrt{3},1),(1,\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-1),(-1,-\sqrt{3}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара, поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известпы радиус основания конуса $r=2$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha:\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Найти площадь поверхности соприкосновения жемчужины и серебряного конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x\cdot\cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha)$$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, откуда

$$x = r\cdot\sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha(1-\cos\alpha)}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{5}}{4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}}} = 2\sqrt[3]{\frac{15}{32}} = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$$

Тогда площадь поверхности соприкосновения конуса и жемчужины равна

$$S = \pi\cdot MD\cdot x = \pi\cdot(x\cdot\sin\alpha)\cdot x = \pi\cdot x^2\cdot\sin\alpha = \pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{15}{4}}\right)^2\cdot\frac{4}{5} =$$

$$= \frac{4\pi}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{225}{16}}$$

Ответ: $S = \frac{4\pi}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{225}{16}}$

Задача 5. (15 баллов) Для получения сертификата о прохождении онлайн-курса, слушателям необходимо пройти компьютерное тестирование и правильно ответить на два вопроса, выбранных случайным образом из 28 возможных. Каждый вопрос имеет три варианта ответа, один из которых правильный. В случае, если слушатель не выучил вопрос, он может попытаться угадать правильный ответ. Сколько вопросов необходимо выучить, чтобы получить сертификат с вероятностью не менее $\frac{7}{9}$?

Решение:

Пусть m - число вопросов, которые необходимо выучить.

Вероятность того, что слушатель знает ответ на два вопроса равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right);$$

вероятность того, что слушатель знает ответ на один из двух вопросов, а ответ на другой вопрос угадывает, равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right);$$

вероятность того, что слушатель не знает, но угадывает ответы на два вопроса, равна

$$\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right).$$

Тогда вероятность получить сертификат равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{28\cdot 27}+\frac{2m(28-m)}{28\cdot 27\cdot 3}+\frac{(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(28-m)+(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+168m+756-27m-28m+m^2}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{4m^2+104m+756}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}$$

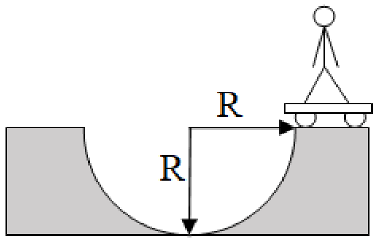
$$P=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}\geq\frac{7}{9}\Leftrightarrow\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27}\geq 7\Leftrightarrow m^2+26m+189-7\cdot 27\cdot 7\geq 0\Leftrightarrow m^2+26m-1134\geq 0$$

$m^2+26m-1134=0$ при $m=-13+\sqrt{13^2+1134}=-13+\sqrt{1303}>23$

Значит выучить нужно более 23 вопросов.

Ответ: 24 и более

Задача 6. Находящийся на рампе скейтбордист массой 80 кг начинает движение со скоростью 3 м/с вниз по склону. После того как он 2 раза пересекает нижнюю точку рампы он возвращает в ту же точку, из которой начинал движение и останавливается. Какое количество теплоты выделится за счет сил трения за все время его движения? Считать, что скейтбордист катится, не прикладывая дополнительных сил во время движения. Плоскость рампы в сечении представляет собой полуокружность. (5 баллов)



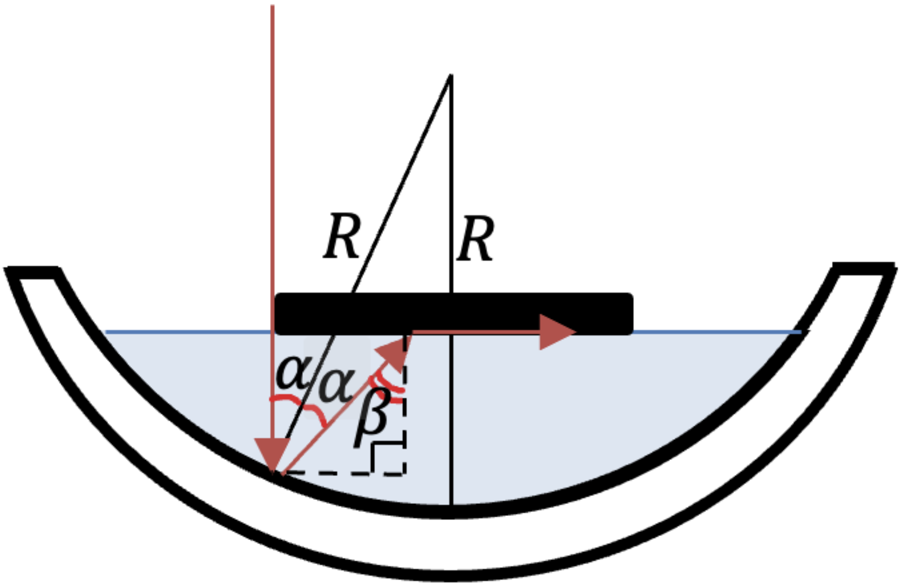
Дано:	**Решение:**
$m = 80$ кг $v_0 = 3$ м/с ――― $Q = ?$	*Запишем закон сохранения энергии для данной системы. В начальной точке он обладает потенциальной энергией и кинетической, после прохождения рампы часть этой энергии тратиться на работу силы трения и выделяется в виде тепла. С другой стороны рампы (на той же высоте) он будет иметь ту же потенциальную энергию и меньшую кинетическую.* $$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = Q + mgR + \frac{mv^2}{2}$$ $$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{mv^2}{2}$$ *Из уравнения видно, что с каждым проходом кинетическая энергия будет уменьшаться на величину Q. Так как по условию он пересекает рампу 2 раза, это значит, что все кинетическая энергия на выделение тепла. Отсюда получаем:* $$\frac{mv_0^2}{2} = 2Q$$ $$2Q = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{80 \cdot 3^2}{2} = 360 \text{ Дж}$$ *Ответ:* $Q = 360$ Дж

Задача 7. В чашу со сферическим зеркальным дном налита какая-то жидкость с показателем преломления равным 1,43, на поверхности которой плавает плоский диск диаметром 10 см ровно по середине. Лучи света падают на всю поверхность жидкости нормально. Чему приблизительно будет равен радиус кривизны такой чаши, если, снаружи не видно ни одного отраженного от дна луча. (7 баллов)

Дано:
$d = 10$ см
$n = 1{,}43$

$R = ?$

Решение:



По рисунку видно, что угол α можно выразить как:

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R}$$

Угол β можно выразить через α:

$$90° - \beta = 90° - 2\alpha$$

$$\beta = 2\alpha$$

Для того чтобы свет не вышел из жидкости и не отражался от диска, надо чтобы он попадал на поверхность жидкости под углом полного внутреннего отражения:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1} = \frac{1}{n}$$

Распишем формулу двойного угла и выразим все через значение $\sin\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Получаем:

$$2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{n}$$

Подставим в выражение, значение $\sin\alpha$:

$$2\frac{d}{2R}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}} = \frac{1}{n}$$

Выразим и посчитаем n:

$$\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}=\frac{R}{dn}$$

$$R=dn\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}$$

Значение $\frac{d^2}{4R^2}$ *должно быть очень мало (d<2R), так что можем считать, что* $\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}\approx 1$

Получаем:

$$R\approx dn\approx 0{,}1\cdot 1{,}43\approx 0{,}143\text{ м}$$

Ответ: $R\approx 0{,}143\text{ м}\approx 14{,}3\ см$

Задача 8. Небольшой воздушный шарик с упругой оболочкой, прикрепленный пружиной ко дну открытого сосуда с водой, имеет объем 1 $см^3$, при температуре жидкости 17°С. При этом расстояние от шарика до поверхности воды составляет 2 м. Сосуд с жидкостью нагревают до 57°С и ждут пока в результате испарения, расстояние от шарика до поверхности уменьшится в два раза, шарик при этом растягивается. На сколько изменится удлинение пружины, если ее коэффициент жесткости равен 0,05 Н/м. Атмосферное давление принять равным 10^5 Па. (10 баллов)

Дано:

$T_1 = 27°C = 300\ К$

$T_2 = 57°C = 330К$

$\rho_в = \frac{1000кг}{м^3}$

$h_1 = 2\ м$

$h_1 = 2h_2$

$v_1 = 1\ см^3 = 10^{-6} м^3$

$p_{атм} = 10^5 Па$

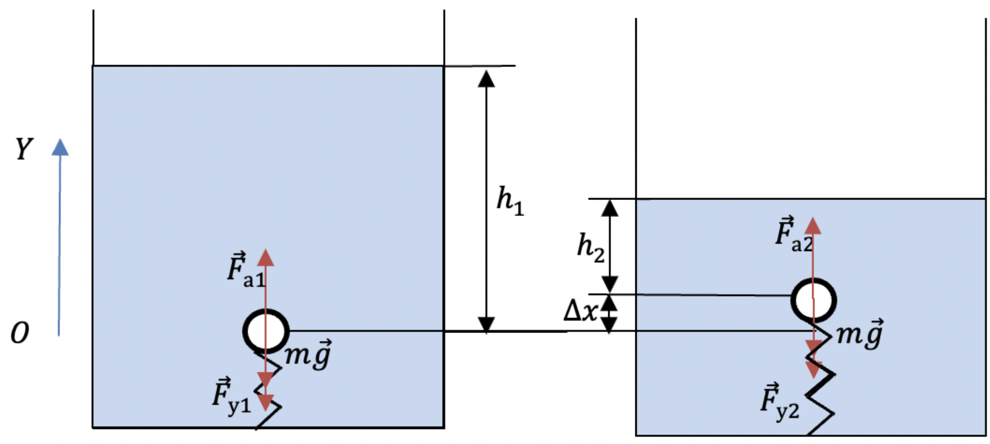
$k = 0{,}05\ Н/м$

$\Delta x = ?$

Решение:

Сделаем рисунки для случаев до и после испарения жидкости и расставим действующие на шарик силы:

1) *2)*



Запишем уравнения I закона Ньютона для каждого из случаев:

$$\overrightarrow{F_{a1}} + \overrightarrow{F_{y1}} + m\vec{g} = 0 \qquad \overrightarrow{F_{a2}} + \overrightarrow{F_{y2}} + m\vec{g} = 0$$

$$OY: F_{a1} - F_{y1} - mg = 0 \qquad OY: F_{a2} - F_{y2} - mg = 0$$

С учетом $F_а = \rho g v$ и $F_у = kx$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho g v_1 - kx_1 = mg \\ \rho g v_2 - kx_2 = mg \end{cases}$$

Приравняем уравнения друг другу через mg:

$$\rho g v_1 - kx_1 = \rho g v_2 - kx_2$$

$$kx_2 - kx_1 = \rho g v_2 - \rho g v_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{k}$$

Необходимо понять, как изменился объем вследствие уменьшения давления воды на шарик. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$\begin{cases} p_1 v_1 = \vartheta R T_1 \\ p_2 v_2 = \vartheta R T_2 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{\vartheta R T_2}{\vartheta R T_1}$$

$$v_2 = \frac{p_1 v_1 T_2}{p_2 T_1}$$

Значения давлений:

Вследствие малых размеров шарика и пружины и их малым влиянием на изменение давления в зависимости от глубины погружения, можем ими пренебречь и учесть только снижение уровня жидкости.

$$p_1 = \rho g h_1 + p_{\text{атм}}$$

$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\text{атм}} = \frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}$$

Получаем:

$$v_2 = \frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}$$

Получим изменение удлинения:

$$\Delta x = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{k} = \frac{\rho g \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1} - v_1 \right)}{k}$$

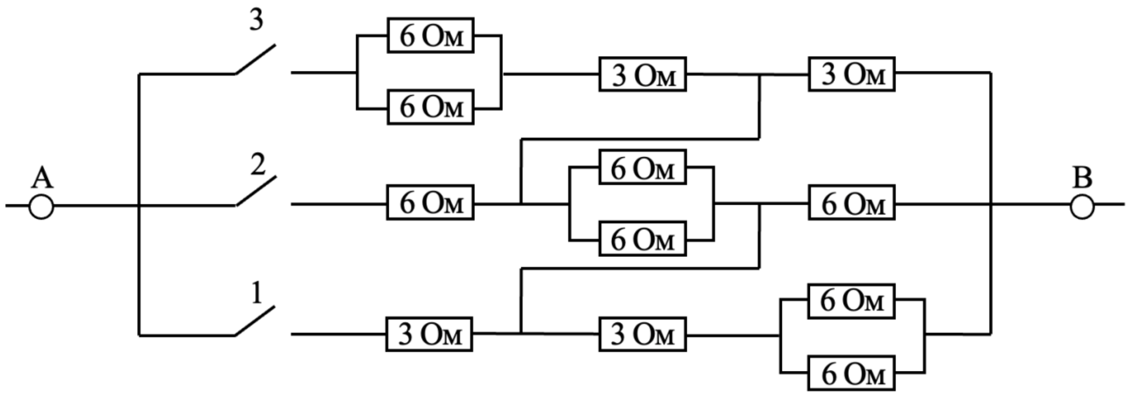
$$= \rho g v_1 \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) T_2 - \left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1 k} \right)$$

$$= 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{(1000 \cdot 10 \cdot 2 + 10^5) 330 - \left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 2}{2} + 10^5\right) 300}{\left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 2}{2} + 10^5\right) 300 \cdot 0{,}05} \right)$$

$$= 10^{-2} \left(\frac{(12)330 - (11)300}{(11)300 \cdot 0{,}05} \right) = 0{,}04 \text{ м}$$

Ответ: $\Delta x = 0{,}04 \text{ м} = 4 \text{ см}$

Задача 9. На предложенной электрической схеме есть 3 ключа (1-3), каждый из них переключается с определенной периодичностью. Время изменения положения каждого ключа: для первого – 1 с, для второго – 2 с, для третьего – 3 с. Разность потенциалов между точками А и В поддерживается постоянной и равной 24 В. Найдите заряд, прошедший через точку В, за 3 секунды после включения первого переключателя, если в начальный момент времени все



ключи разомкнуты. (13 баллов)

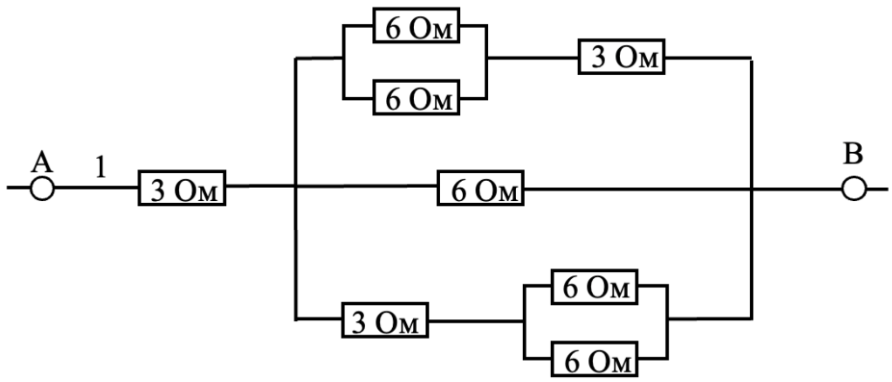
Дано:
$T_1 = 1c$
$T_2 = 2c$
$T_3 = 3c$
$U_{AB} = 24В$
$t = 3\ c$

$q = ?$

Решение:

Распишем интервалы времени и соответствующие им эквивалентные схемы относительно времени включения первого интервала:

1) 0-1 с (1 ключ – замкнут, 2,3 – не замкнуты)



Рассчитаем эквивалентное сопротивление такой цепи.

Для участков с параллельным соединением по 6 Ом:

$$\frac{1}{R_{6-6}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_6}$$

$$R_{6-6} = \frac{R_6}{2} = 3\ Ом$$

Верхняя и нижняя ветки цепи одинаковые, состоящие из 2 последовательных сопротивлений:

$$R_{3-6-6} = R_{6-6} + R_3 = 3 + 3 = 6 \text{ Ом}$$

В итоге получаем 3 параллельных соединения по 6 Ом. Рассчитаем общее сопротивление цепи:

$$\frac{1}{R_{6-6-6}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_6}$$

$$R_{6-6-6} = \frac{R_6}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ Ом}$$

$$R_{\text{общ}1} = R_3 + R_{6-6-6} = 3 + 2 = 5 \text{ Ом}$$

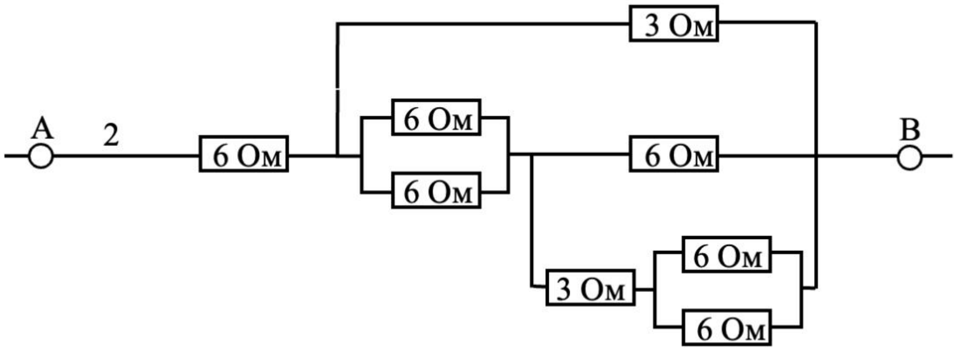
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за первый интервал времени:

$$q = It$$

С учетом $I = \frac{U}{R}$:

$$q_1 = \frac{U}{R_{\text{общ}1}} t = \frac{24}{5} 1 = 4{,}8 \text{ Кл}$$

2) 1-2 с (2 ключ – замкнут, 1 и 3 – не замкнуты)



Сопротивление нижнего участка, состоящего из последовательного и двух параллельных соединений, мы уже считали:

$$R_{3-6-6} = R_{6-6} + R_3 = 3 + 3 = 6 \text{ Ом}$$

Оно соединено параллельно резистору 6 Ом:

$$R_{3-6-6-6} = \frac{R_6 R_{3-6-6}}{R_6 + R_{3-6-6}} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3 \text{ Ом}$$

Далее эти элементы соединены последовательно с двумя параллельными сопротивлениями по 6 Ом. Снова получаем уже рассчитанный нами ранее элемент $R_{3-6-6} = 6 \text{ Ом}$, *соединенный параллельно с сопротивлением 3 Ом.*

$$R_{3-6-6-3} = \frac{R_3 R_{3-6-6}}{R_3 + R_{3-6-6}} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом}$$

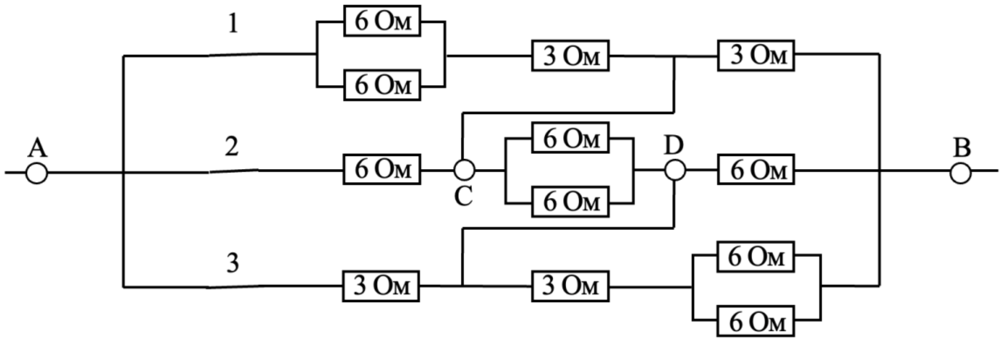
Общее сопротивление 2-ой цепи получается:

$$R_{\text{общ}2} = R_6 + R_{3-6-6-3} = 6 + 2 = 8 \text{ Ом}$$

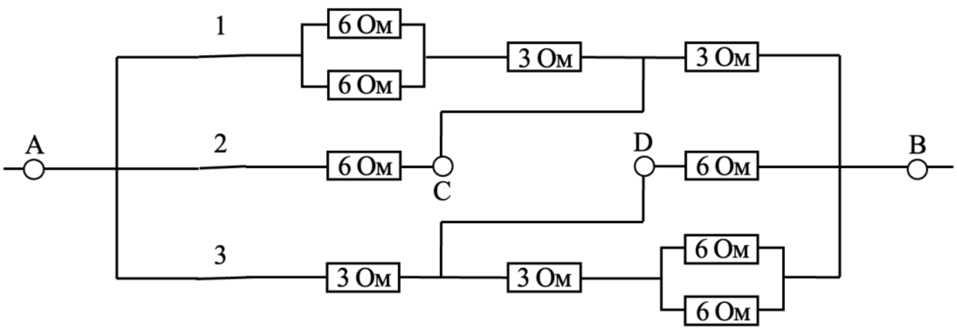
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ}2}} t = \frac{24}{8} 1 = 3 \text{ Кл}$$

3) 2-3с (все ключи замкнуты)



Если посмотреть на схему, то можно выделить точки С и D. Для того чтобы понять, как протекает ток в этих точках, посчитаем сопротивления на интервалах AC и AD.
На интервале AD находится одно сопротивление 3 Ом.
На интервале AC находится 2 параллельных участка, проходящий через 3-ий ключ (уже посчитанный ранее $R_{3-6-6} = 6$ Ом*) и резистор 6 Ом. Их общее сопротивление равно также как и на участке AD 3 Ом. Аналогичная ситуация наблюдается на участках CB и DB, где общие сопротивления этих участков будут также равны 3 Ом.*
Так как потенциалы в точках C и D будут равны, то можем исключить центральный элемент из схемы, так как по нему ток протекать не будет.
Приходим к схеме:



Получаем два одинаковых параллельных участка. Посчитаем общее сопротивление верхнего, которое состоит из участка AC (3 Ом), последовательно соединенного с резистором 3 Ом. Получаем общее *сопротивление верхней цепи равное 6 Ом.*

Так как верхняя и нижняя ветки имеют одинаковое сопротивление, и они параллельны, получаем что:

$$R_{\text{общ3}} = \frac{6}{3} = 2\ \text{Ом}$$

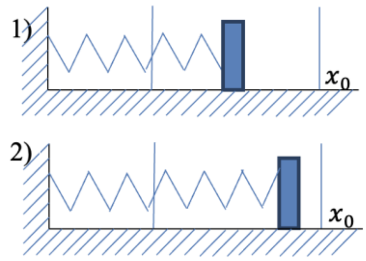
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ3}}} t = \frac{24}{2} 1 = 12\ \text{Кл}$$

Общее количество зарядов за все время:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 4{,}8 + 3 + 12 = 19{,}8\ \text{Кл}$$

Ответ: $q = 19{,}8$ Кл



Задача 10. Два одинаковых грузика закреплены на горизонтальных пружинах, прикрепленных к стенкам, с разным коэффициентом жесткости и расположены на гладких горизонтальных поверхностях. Оба пружинных маятника оттягивают с одинаковой силой за грузы и отпускают, в следствие чего они начинают совершать колебания вдоль горизонтальной оси. Первый маятник, в процессе своего движения, смещаясь к положению равновесия пружины в какой-то точке, имеет скорость вдвое меньшую, чем на вдвое меньшем расстоянии до положения равновесия. А второй маятник двигаясь аналогичным образом увеличивает свою скорость в четыре раза, при перемещении из первой во вторую точку. При этом расстояние до положения равновесия становится в четыре раза меньшим. При этом в первых точках для обоих случаев сжатие пружины одинаково. Найдите отношение коэффициентов жесткости второй пружины к первой. (15 баллов)

Дано:

$x_1 = 2x_2$

$2v_1 = v_2$

$x_1' = 4x_2'$

$4v_1' = v_2'$

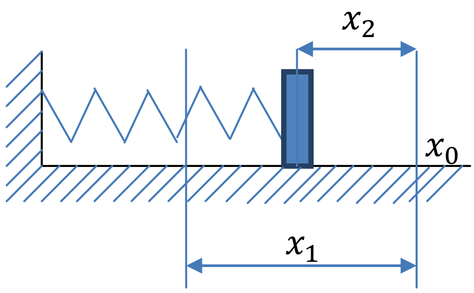
$x_1 = x_1'$

$\frac{k_2}{k_1} = ?$

Решение:

Так как движение обеих пружин идет по гладкой поверхности, то на небольшом промежутке времени их смещение можно описать как гармонические колебания пружинного маятника. Запишем уравнения смещения и скорости для первой пружины для первого и второго положений:

1)



$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0) \\ v_1 = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0) \\ v_2 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \varphi_0) \end{cases}$$

Для удобства расчетов заменим фазы колебания на $\delta_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ и $\delta_2 = \omega t_2 + \varphi_0$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\delta_1) \\ v_1 = -A\omega\sin(\delta_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\delta_2) \\ v_2 = -A\omega\sin(\delta_2) \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения тригонометрическую функцию:

$$\begin{cases} \cos(\delta_1) = \frac{x_1}{A} \\ \sin(\delta_1) = \frac{v_1}{-A\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\delta_2) = \frac{x_2}{A} \\ \sin(\delta_2) = \frac{v_2}{-A\omega} \end{cases}$$

Подставим их основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2(\delta_1) + \sin^2(\delta_1) = 1 \qquad \cos^2(\delta_1) + \sin^2(\delta_1) = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{-A\omega}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{-A\omega}\right)^2 = 1$$

Приведем к общему знаменателю оба уравнения:

$$\frac{\omega^2 x_1^2 + v_1^2}{A^2\omega^2} = 1 \qquad \frac{\omega^2 x_2^2 + v_2^2}{A^2\omega^2} = 1$$

$$\begin{cases} \omega^2 x_1^2 + v_1^2 = A^2\omega^2 \\ \omega^2 x_2^2 + v_2^2 = A^2\omega^2 \end{cases}$$

Выразим ω^2 *из каждого из уравнений и приравняем:*

$$\begin{cases} v_1^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \\ v_2^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} \\ \omega^2 = \dfrac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)} \end{cases}$$

$$\frac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} = \frac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)}$$

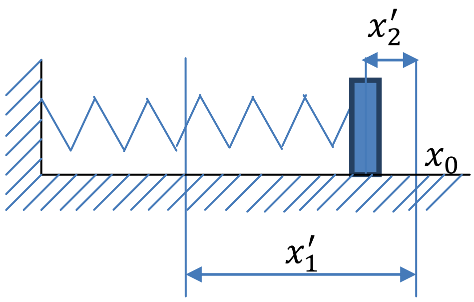
$$(A^2 - x_2^2)v_1^2 = (A^2 - x_1^2)v_2^2$$

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

Подставим соотношения из исходных данных:

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{\frac{\frac{x_1^2}{4} v_1^2 - 4v_1^2 x_1^2}{v_1^2 - 4v_1^2}} = \sqrt{\frac{5x_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} x_1$$

2)



Составим системы уравнений для второй пружины:

$$\begin{cases} x_1' = A' cos(\omega t_1' + \varphi_0') \\ v_1' = -A'\omega' \sin(\omega t_1' + \varphi_0') \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = A' cos(\omega t_2' + \varphi_0') \\ v_2 = -A'\omega' \sin(\omega t_2' + \varphi_0') \end{cases}$$

Аналогичным образом выразим из этой системы значение амплитуды колебаний:

$$A' = \sqrt{\frac{{x_2'}^2 {v_1'}^2 - {x_1'}^2 {v_2'}^2}{{v_1'}^2 - {v_2'}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{{x_1'}^2}{16} {v_1'}^2 - 16{x_1'}^2 {v_1'}^2}{{v_1'}^2 - 16{v_1'}^2}} = \sqrt{\frac{17{x_1'}^2}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{4} x_1'$$

Так как к пружины изначально оттягивают с одинаковой силой, то по закону Гука получаем, что:

$$k_1 x_{max} = k_2 x'_{max}$$

Откуда получаем (с учетом $x_1 = x_1'$):

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{x_{max}}{x'_{max}} = \frac{A}{A'} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}x_1}{\frac{\sqrt{17}}{4}x'_1} = 2\sqrt{\frac{5}{17}}$$

Ответ: $\frac{k_2}{k_1} = 2\sqrt{\frac{5}{17}}$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 1-3

Задача 1. (5 баллов) Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_7(a_{2024} + 3)$

Решение:

Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

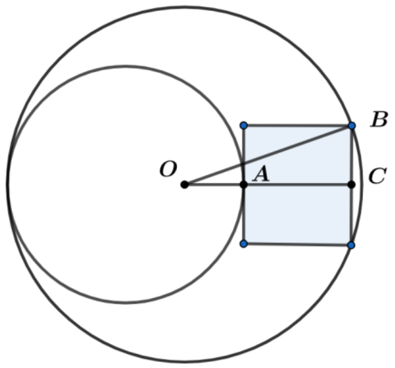
$x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $x_2 = 2^3$, …, $x_n = 2^{n+1}$, тогда

$a_n + 3 = 2^{n+1}$, $\log_7(a_{2024} + 3) = \log_7 2^{2024+1} = 2025\log_7 2$

Ответ: $\log_7(a_{2024} + 3) = 2025 \cdot \log_7 2$

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 17$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 18$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OA = d - R = 18 - 17 = 1$, $OC = OA + AC = 2 + 2x$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (1 + 2x)^2 + x^2 = 1 + 4x + 4x^2 + x^2 = 5x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 5x^2 + 4x + 1 = 289 \Rightarrow$$

$$5x^2 + 4x - 288 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 1440}}{5} = \frac{-2 + \sqrt{1444}}{5} = \frac{-2 + 38}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} = 7{,}2,$$ тогда

искомая площадь равна $\left(\frac{72}{5}\right)^2 = \frac{5184}{25} = 207\frac{9}{25} = 207{,}36$ кв.ед.

Ответ: 207,36 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=\sqrt{2}$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{x\left(2y^2-1\right)}{y\left(2x^2-1\right)}=-1.$$

Решение:

ОДЗ: $y\left(2x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ 2x^2-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x^2\neq \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Пусть $x=\sqrt{2}\cos\alpha$, $y=\sqrt{2}\sin\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\cos\alpha\left(2\cdot 2\sin^2\alpha-1\right)=-\sqrt{2}\sin\alpha\left(2\cdot 2\cos^2\alpha-1\right),$$

$$\cos\alpha\left(4\sin^2\alpha-1\right)+\sin\alpha\left(4\cos^2\alpha-1\right)=0,$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha-\cos\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0,\quad 2\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

$$(2\sin 2\alpha-1)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

тогда $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$ или $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=-1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0\le\alpha\le 2\pi$, находим:

$\alpha_1=\frac{\pi}{12},\alpha_2=\frac{5\pi}{12},\alpha_3=\frac{13\pi}{12},\alpha_4=\frac{17\pi}{12},\alpha_5=\frac{3\pi}{4},\alpha_6=\frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{12}\right),$$

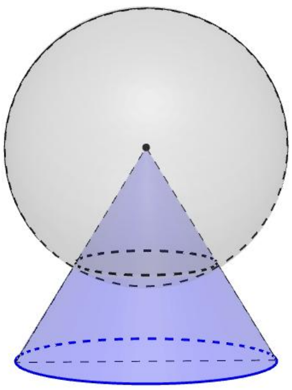
$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}\right),(1,-1),(-1,1)$$

Ответ:

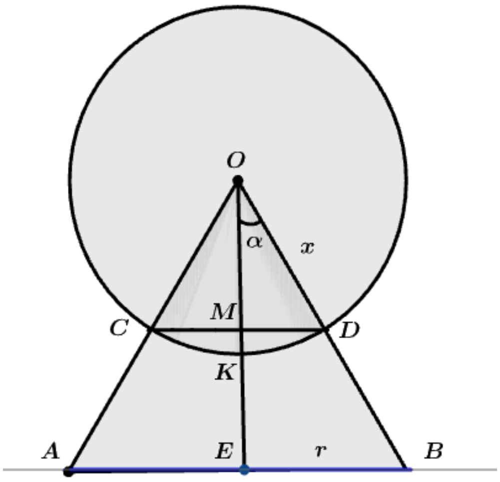
$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{12}\right),$$

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12},\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}\right),(1,-1),(-1,1).$$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара, поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r=2$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь поверхности соприкосновения жемчужины и серебряного конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x \cdot \cos\alpha) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - \cos\alpha) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x = \frac{2}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 1\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}$$

Тогда площадь поверхности соприкосновения конуса и жемчужины равна

$$S = \pi \cdot MD \cdot x = \pi \cdot (x \cdot \sin\alpha) \cdot x = \pi \cdot x^2 \cdot \sin\alpha = \pi \cdot \left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}\right)^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \pi \cdot \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = \pi\sqrt[6]{12}$$

Ответ: $S = \pi\sqrt[6]{12}$

Задача 5. (15 баллов) Для получения сертификата о прохождении онлайн-курса, слушателям необходимо пройти компьютерное тестирование и правильно ответить на два вопроса, выбранных случайным образом из 32 возможных. Каждый вопрос имеет три варианта ответа, один из которых правильный. В случае, если слушатель не выучил вопрос, он может попытаться угадать правильный ответ. Сколько вопросов необходимо выучить, чтобы получить сертификат с вероятностью не менее 0,75?

Решение:

Пусть m - число вопросов, которые необходимо выучить.

Вероятность того, что слушатель знает ответ на два вопроса, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что слушатель знает ответ на один из двух вопросов, а ответ на другой вопрос угадывает, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что слушатель не знает, но угадывает ответы на два вопроса, равна $\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Тогда вероятность получить сертификат равна

$$\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{32\cdot 31}+\frac{2m(32-m)}{32\cdot 31\cdot 3}+\frac{(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(32-m)+(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+192m+992-31m-32m+m^2}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{4m^2+120m+992}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}$$

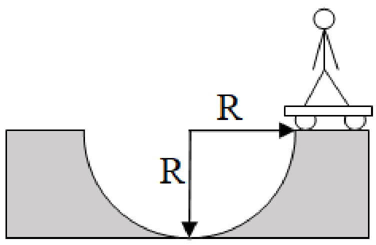
$$P=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{m^2+30m+248}{2\cdot 31\cdot 9}\geq 3\Leftrightarrow m^2+30m+248-6\cdot 31\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+30m-1426\geq 0$$

$m^2+30m-1426=0$ при $m=-15+\sqrt{15^2+1426}=-15+\sqrt{1651}>25$

Значит выучить нужно более 25 вопросов.

Ответ: 26 и более.

Задача 6. Находящийся на рампе скейтбордист начинает движение вниз по склону с начальной скоростью 2 м/с. После того как он 4 раза пересек нижнюю точку рампы он вернулся в то положение, из которого начинал движение и остановился. Найдите массу скейтбордиста, если за одни переезд с одного края на другой за счет сил трения выделяется 30 Дж тепла? Считать, что скейтбордист катится, не прикладывая дополнительных сил во время движения. Плоскость рампы в сечении представляет собой полуокружность. (5 баллов)



Дано:
$Q = 30$ Дж
$v_0 = 2$ м/с

$m = ?$

Решение:
Запишем закон сохранения энергии для данной системы. В начальной точке он обладает потенциальной энергией и кинетической, после прохождения рампы часть этой энергии тратиться на работу силы трения и выделяется в виде тепла. С другой стороны рампы (на той же высоте) он будет иметь ту же потенциальную энергию и меньшую кинетическую.

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = Q + mgR + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{mv^2}{2}$$

Из уравнения видно, что с каждым проходом кинетическая энергия будет уменьшаться на величину Q. Так как по условию он пересекает рампу 4 раза, это значит, что все кинетическая энергия на выделение тепла. Отсюда получаем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 4Q$$

$$m = \frac{8Q}{v_0^2} = \frac{30 \cdot 8}{2^2} = 60 \text{ кг}$$

Ответ: $m = 60$ кг

Задача 7. В емкость со сферическим зеркальным дном налита какая-то жидкость с показателем преломления равным 1,5, на поверхности которой плавает плоский диск ровно по середине. Лучи света падают на всю поверхность жидкости нормально. Чему приблизительно будет равен диаметр плавающего диск, если, снаружи не видно ни одного отраженного от дна луча. Радиус кривизны такой емкости будет равен 45 см (7 баллов)

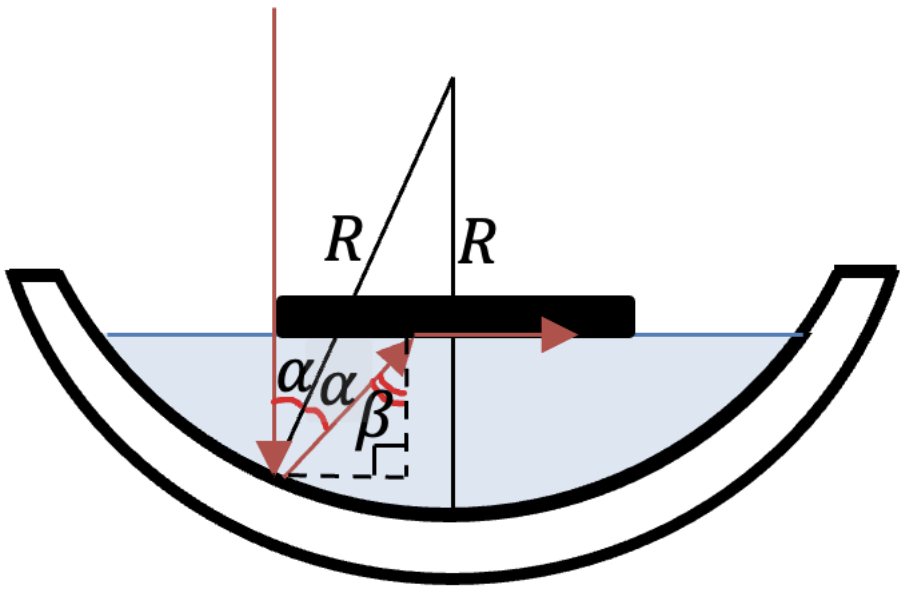
Дано:

$R = 45$ см

$n = 1{,}5$

$d = ?$

Решение:



По рисунку видно, что угол α можно выразить как:

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R}$$

Угол β можно выразить через α:

$$90° - \beta = 90° - 2\alpha$$

$$\beta = 2\alpha$$

Для того чтобы свет не вышел из жидкости и не отражался от диска, надо чтобы он попадал на поверхность жидкости под углом полного внутреннего отражения:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1} = \frac{1}{n}$$

Распишем формулу двойного угла и выразим все через значение $\sin\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Получаем:

$$2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{n}$$

Подставим в выражение, значение $\sin\alpha$:

$$2\frac{d}{2R}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}=\frac{1}{n}$$

Выразим и посчитаем n:

$$\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}=\frac{R}{dn}$$

$$d=\frac{R}{n\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}}$$

Значение $\frac{d^2}{4R^2}$ *очень мало (d<2R), так что можем считать, что* $\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}}\approx 1$

Получаем:

$$d\approx\frac{R}{n}\approx\frac{0{,}45}{1{,}5}\approx 0{,}3\text{ м}$$

Ответ: $d\approx 0{,}3\text{ м}\approx 30\ \text{см}$

Задача 8. Небольшой воздушный шарик с упругой оболочкой, прикрепленный пружиной ко дну открытого сосуда с водой, имеет объем 1 см^3, при температуре жидкости 17°C. При этом расстояние от шарика до поверхности воды составляет 4 м. При нагревании жидкости до 87°C она начинает медленно испарятся и ее уровень в сосуде снижается. Размеры шарика начинают увеличиваться. Чему равен коэффициент жесткости пружины, если в результате ее удлинение изменилось на 5 см в тот момент, когда высота жидкости над шариком снизилась в 2 раза. Атмосферное давление принять равным $\mathbf{10^5}$ Па. (10 баллов)

Дано:

$T_1 = 27°C = 300\ K$

$T_2 = 87°C = 360K$

$\rho_в = \frac{1000кг}{м^3}$

$h_1 = 4$ м

$h_1 = 2h_2$

$v_1 = 1\ см^3 = 10^{-6} м^3$

$\Delta x = 5$ см $= 0{,}05$ м

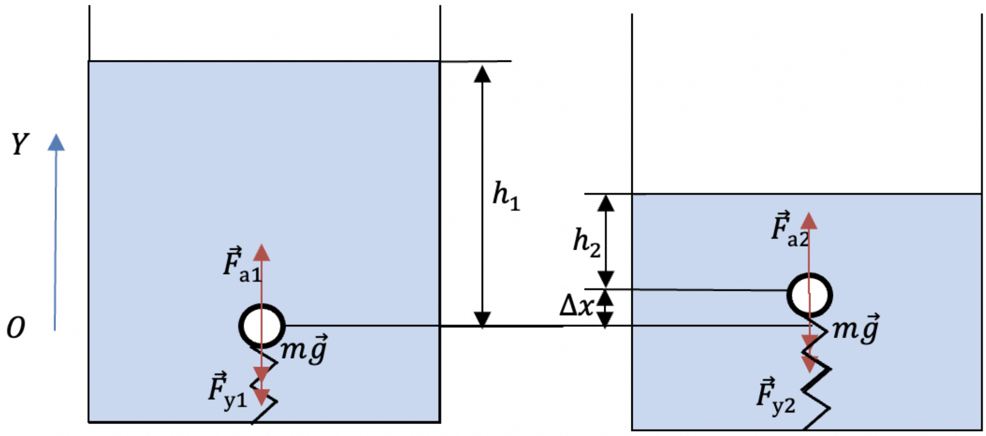
$p_{атм} = 10^5 Па$

$k = ?$

Решение:

Сделаем рисунки для случаев до и после испарения жидкости и расставим действующие на шарик силы:

1) *2)*



Запишем уравнения I закона Ньютона для каждого из случаев:

$$\overrightarrow{F_{a1}} + \overrightarrow{F_{y1}} + m\vec{g} = 0 \qquad \overrightarrow{F_{a2}} + \overrightarrow{F_{y2}} + m\vec{g} = 0$$

$$OY: F_{a1} - F_{y1} - mg = 0 \qquad OY: F_{a2} - F_{y2} - mg = 0$$

С учетом $F_a = \rho g v$ *и* $F_y = kx$ *получим систему уравнений:*

$$\begin{cases} \rho g v_1 - kx_1 = mg \\ \rho g v_2 - kx_2 = mg \end{cases}$$

Приравняем уравнения друг другу через mg:

$$\rho g v_1 - kx_1 = \rho g v_2 - kx_2$$

$$kx_2 - kx_1 = \rho g v_2 - \rho g v_1$$

$$k = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{\Delta x}$$

Необходимо понять, как изменился объем вследствие уменьшения давления воды на шарик. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$\begin{cases} p_1 v_1 = \vartheta R T_1 \\ p_2 v_2 = \vartheta R T_2 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{\vartheta R T_2}{\vartheta R T_1}$$

$$v_2 = \frac{p_1 v_1 T_2}{p_2 T_1}$$

Значения давлений:

Вследствие малых размеров шарика и пружины и их *малым влиянием на изменение давления в зависимости от глубины погружения, можем ими пренебречь и учесть только снижение уровня жидкости.*

$$p_1 = \rho g h_1 + p_{\text{атм}}$$

$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\text{атм}} = \frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}$$

Получаем:

$$v_2 = \frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}$$

Самое значение коэффициента жесткости будет равно:

$$k = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{\Delta x} = \frac{\rho g \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1} - v_1 \right)}{\Delta x}$$

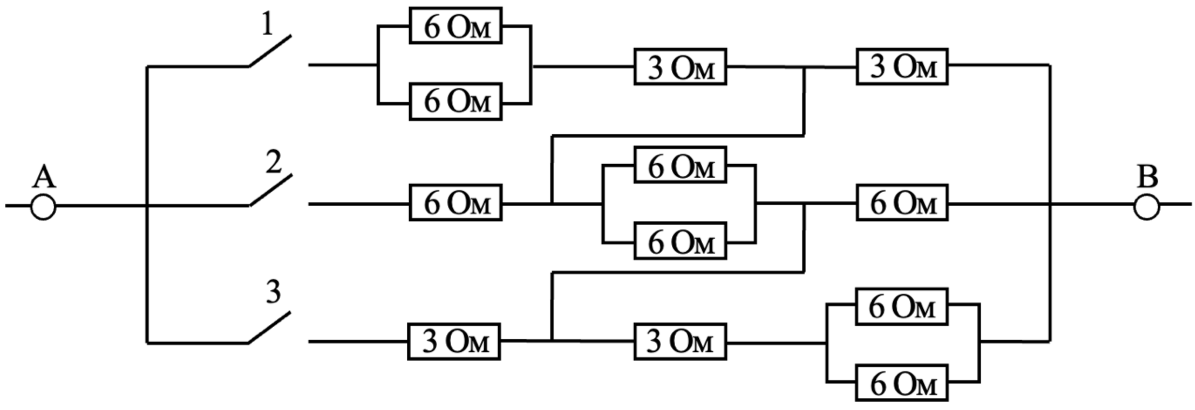
$$= \rho g v_1 \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) T_2 - \left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1 \Delta x} \right)$$

$$= 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{(1000 \cdot 10 \cdot 4 + 10^5)360 - \left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 4}{2} + 10^5\right) 300}{\left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 4}{2} + 10^5\right) 300 \cdot 0{,}05} \right)$$

$$= 10^{-2} \left(\frac{(14)360 - (12)300}{(12)300 \cdot 0{,}05} \right) = 0{,}08 \text{ Н/м}$$

Ответ: $k = 0{,}08$ Н/м

Задача 9. На предложенной электрической схеме есть 3 переключателя (1-3), каждый из них меняет свое положение через равные интервалы времени. Период их переключения: для первого – 1 с, для второго – 2 с, для третьего – 3 с. Разность потенциалов между точками A и B поддерживается постоянной и равна 12 В. В начальный момент времени все ключи разомкнуты. Каков будет заряд, прошедший через точку B, за 3 секунды после включения первого переключателя? (13 баллов)



Дано:

$T_1 = 1c$

$T_2 = 2c$

$T_3 = 3c$

$U_{AB} = 12\text{В}$

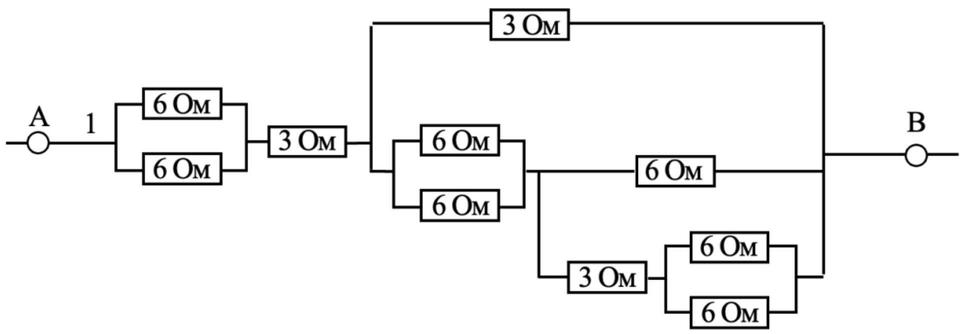
$t = 3\ c$

$q = ?$

Решение:

Распишем интервалы времени и соответствующие им эквивалентные схемы относительно времени включения первого интервала:

1) 0-1 с (1 ключ – замкнут, 2,3 – не замкнуты)



Рассчитаем эквивалентное сопротивление такой цепи.

Для участков с параллельным соединением по 6 Ом:

$$\frac{1}{R_{6-6}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_6}$$

$$R_{6-6} = \frac{R_6}{2} = 3\ \text{Ом}$$

Также имеется два одинаковых элемента (2 параллельных резистора по 6 Ом и один последовательный 3 Ом):

$$R_{3-6-6} = R_{6-6} + R_3 = 3 + 3 = 6\ \text{Ом}$$

Начнем раскрывать с правого нижнего угла, где соединены параллельно элемент R_{3-6-6} и резистор 6 Ом:

$$\frac{1}{R_{6-3-6-6}} = \frac{1}{R_{3-6-6}} + \frac{1}{R_6}$$

$$\frac{1}{R_{6-3-6-6}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$R_{6-3-6-6} = 3\ \text{Ом}$$

Далее получаем снова элемент $R_{3-6-6} = 6\ \text{Ом}$*, который параллелен резистору 3 Ом:*

$$\frac{1}{R_{3-3-6-6}} = \frac{1}{R_{3-6-6}} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{3-3-6-6}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$$

$$R_{3-3-6-6} = 2\ \text{Ом}$$

Этот элемент соединен последовательно с R_{3-6-6}:

$$R_{\text{общ}1} = R_{3-3-6-6} + R_{3-6-6} = 2 + 6 = 8\ \text{Ом}$$

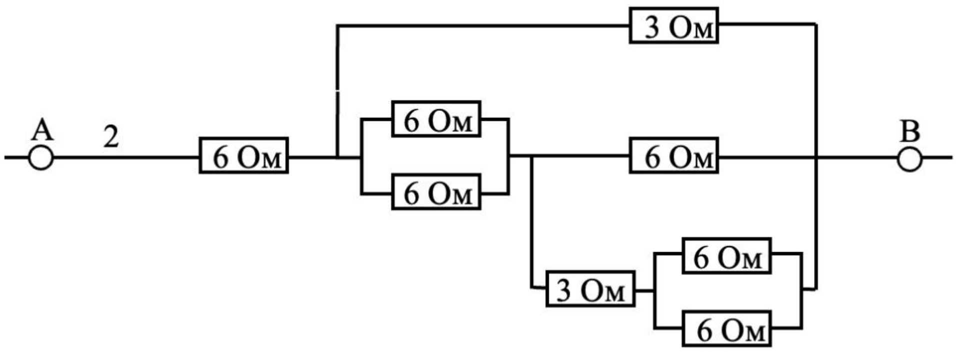
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за первый интервал времени:

$$q = It$$

С учетом $I = \frac{U}{R}$:

$$q_1 = \frac{U}{R_{\text{общ}1}} t = \frac{12}{8} 1 = 1{,}5\ \text{Кл}$$

2) 1-2 с (2 ключ – замкнут, 1 и 3 – не замкнуты)



Сопротивление нижнего участка, состоящего из последовательного и двух параллельных соединений, мы уже считали:

$$R_{3-6-6} = R_{6-6} + R_3 = 3 + 3 = 6\ \text{Ом}$$

Оно соединено параллельно резистору 6 Ом:

$$R_{3-6-6-6} = \frac{R_6 R_{3-6-6}}{R_6 + R_{3-6-6}} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3\ \text{Ом}$$

Далее эти элементы соединены последовательно с двумя параллельными сопротивлениями по 6 Ом. Снова получаем уже рассчитанный нами ранее элемент $R_{3-6-6} = 6\ \text{Ом}$*, соединенный параллельно с сопротивлением 3 Ом.*

$$R_{3-6-6-3} = \frac{R_3 R_{3-6-6}}{R_3 + R_{3-6-6}} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2\ \text{Ом}$$

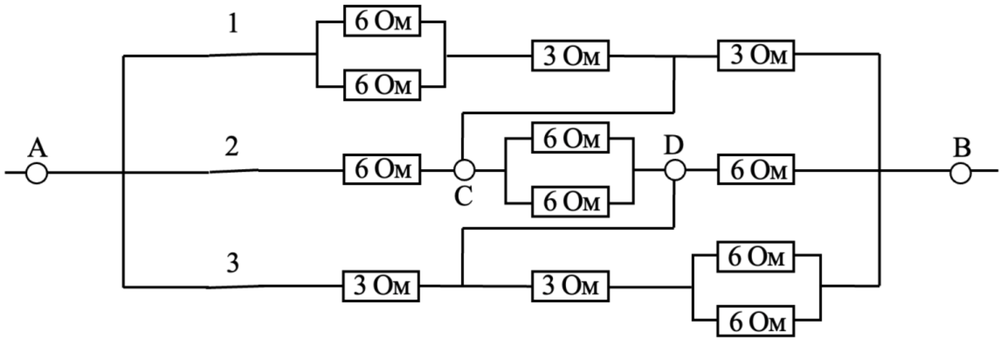
Общее сопротивление 2-ой цепи получается:

$$R_{\text{общ}2} = R_6 + R_{3-6-6-3} = 6 + 2 = 8\ \text{Ом}$$

Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ}2}} t = \frac{12}{8} 1 = 1{,}5\ \text{Кл}$$

3) 2-3с (все ключи замкнуты)



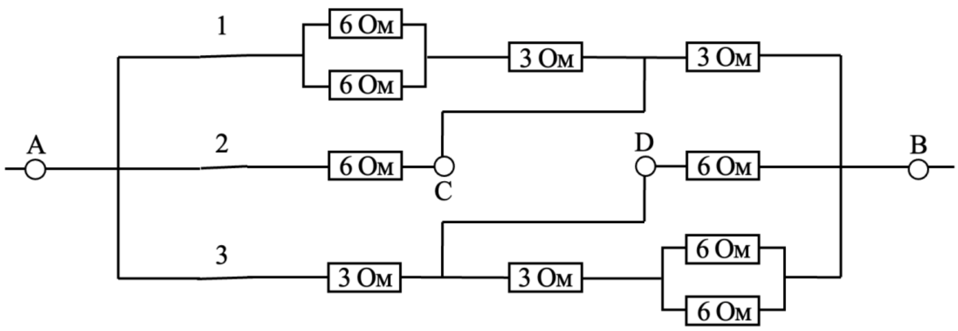
Если посмотреть на схему, то можно выделить точки C и D. Для того чтобы понять, как протекает ток в этих точках, посчитаем сопротивления на интервалах AC и AD.

На интервале AD находится одно сопротивление 3 Ом.

На интервале AC находится 2 параллельных участка, проходящий через 3-ий ключ (уже посчитанный ранее $R_{3-6-6} = 6\ \text{Ом}$*) и резистор 6 Ом. Их общее сопротивление равно также как и на участке AD 3 Ом. Аналогичная ситуация наблюдается на участках CB и DB, где общие сопротивления этих участков будут также равны 3 Ом.*

Так как потенциалы в точках C и D будут равны, то можем исключить центральный элемент из схемы, так как по нему ток протекать не будет.

Приходим к схеме:



Получаем два одинаковых параллельных участка. Посчитаем общее сопротивление верхнего, которое состоит из участка AC (3 Ом), последовательно соединенного с резистором 3 Ом. Получаем общее сопротивление верхней цепи равное 6 *Ом.*

Так как верхняя и нижняя ветки имеют одинаковое сопротивление, и они параллельны, получаем что:

$$R_{\text{общ3}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ Ом}$$

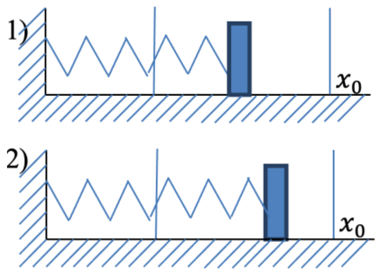
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ3}}} t = \frac{12}{2} 1 = 6 \text{ Кл}$$

Общее количество зарядов за все время:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 1{,}5 + 1{,}5 + 6 = 9 \text{ Кл}$$

Ответ: $q = 9$ Кл



Задача 10. Две разные пружины, прикрепленные к стенкам, с одинаковыми грузиками на концах находятся на гладких горизонтальных поверхностях. Оба маятника оттягивают с одинаковой силой и отпускают, в следствие чего они начинают совершать колебания вдоль горизонтальной оси. Первый маятник, в процессе своего движения, смещаясь к положению равновесия пружины в какой-то точке, имеет скорость вдвое меньшую, чем на вдвое меньшем расстоянии до положения равновесия. А второй маятник двигаясь аналогичным образом увеличивает свою скорость в втрое, при перемещении из первой во вторую точку. При этом расстояние до положения равновесия становится в три раза меньшим. При этом в первых точках для обоих случаев сжатие пружины одинаково. Найдите отношение коэффициентов жесткости первой пружины ко второй. (15 баллов)

Дано:

$x_1 = 2x_2$

$2v_1 = v_2$

$x_1' = 3x_2'$

$3v_1' = v_2'$

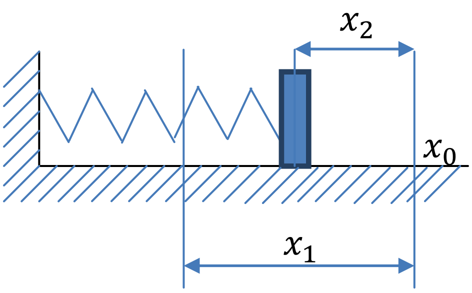
$x_1 = x_1'$

$\frac{k_1}{k_2} = ?$

Решение:

Так как движение обеих пружин идет по гладкой поверхности, то на небольшом промежутке времени их смещение можно описать как гармонические колебания пружинного маятника. Запишем уравнения смещения и скорости для первой пружины для первого и второго положений:

1)



$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0) \\ v_1 = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0) \\ v_2 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \varphi_0) \end{cases}$$

Для удобства расчетов заменим фазы колебания на $\delta_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ и $\delta_2 = \omega t_2 + \varphi_0$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\delta_1) \\ v_1 = -A\omega\sin(\delta_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\delta_2) \\ v_2 = -A\omega\sin(\delta_2) \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения тригонометрическую функцию:

$$\begin{cases} cos(\delta_1) = \frac{x_1}{A} \\ sin(\delta_1) = \frac{v_1}{-A\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos(\delta_2) = \frac{x_2}{A} \\ sin(\delta_2) = \frac{v_2}{-A\omega} \end{cases}$$

Подставим их основное тригонометрическое тождество:

$$cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1 \qquad cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{-A\omega}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{-A\omega}\right)^2 = 1$$

Приведем к общему знаменателю оба уравнения:

$$\frac{\omega^2 x_1^2 + v_1^2}{A^2\omega^2} = 1 \qquad \frac{\omega^2 x_2^2 + v_2^2}{A^2\omega^2} = 1$$

$$\begin{cases} \omega^2 x_1^2 + v_1^2 = A^2\omega^2 \\ \omega^2 x_2^2 + v_2^2 = A^2\omega^2 \end{cases}$$

Выразим ω^2 из каждого из уравнений и приравняем:

$$\begin{cases} v_1^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \\ v_2^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} \\ \omega^2 = \dfrac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)} \end{cases}$$

$$\frac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} = \frac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)}$$

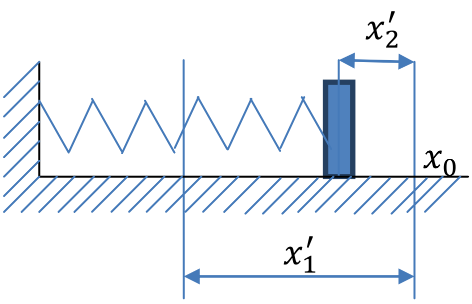
$$(A^2 - x_2^2)v_1^2 = (A^2 - x_1^2)v_2^2$$

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

Подставим соотношения из исходных данных:

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{\frac{\frac{x_1^2}{4} v_1^2 - 4v_1^2 x_1^2}{v_1^2 - 4v_1^2}} = \sqrt{\frac{5x_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} x_1$$

2)



Составим системы уравнений для второй пружины:

$$\begin{cases} x_1' = A'cos(\omega t_1' + \varphi_0') \\ v_1' = -A'\omega' \sin(\omega t_1' + \varphi_0') \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A'cos(\omega t_2' + \varphi_0') \\ v_2 = -A'\omega' \sin(\omega t_2' + \varphi_0') \end{cases}$$

Аналогичным образом выразим из этой системы значение амплитуды колебаний:

$$A' = \sqrt{\frac{{x_2'}^2{v_1'}^2 - {x_1'}^2{v_2'}^2}{{v_1'}^2 - {v_2'}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{{x_1'}^2}{9}\ {v_1'}^2 - 9{x_1'}^2{v_1'}^2}{{v_1'}^2 - 9{v_1'}^2}} = \sqrt{\frac{10{x_1'}^2}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}x_1'$$

Так как к пружины изначально оттягивают с одинаковой силой, то по закону Гука получаем, что:

$$k_1 x_{max} = k_2 x'_{max}$$

Откуда получаем (с учетом $x_1 = x_1'$*):*

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x'_{max}}{x_{max}} = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{3}x_1}{\frac{\sqrt{5}}{2}x_1'} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 1-4

Задача 1. (5 баллов) Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 1$. Вычислить $\log_7(a_{2023} + 3)$

Решение:

Пусть $x_n = a_n + 3$, тогда $x_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

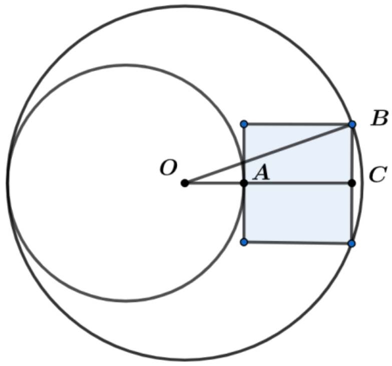
$x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $x_2 = 2^3$, …, $x_n = 2^{n+1}$, тогда

$a_n + 3 = 2^{n+1}$, $\log_7(a_{2023} + 3) = \log_7 2^{2023+1} = 2024 \log_7 2$

Ответ: $\log_7(a_{2023} + 3) = 2024 \cdot \log_7 2$

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 26$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 30$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OA = d - R = 30 - 26 = 4$, $OC = OA + AC = 4 + 2x$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (4 + 2x)^2 + x^2 = 16 + 16x + 4x^2 + x^2 = 5x^2 + 16x + 16 \Rightarrow 5x^2 + 16x + 16 = 676 \Rightarrow$$

$$5x^2 + 16x - 660 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 + \sqrt{64 + 3300}}{5} = \frac{-8 + \sqrt{3364}}{5} = \frac{-8 + 58}{5} = \frac{50}{5} = 10,$$ тогда искомая площадь равна $(20)^2 = 400$ кв.ед.

Ответ: 400 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=\sqrt{2}$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{x\left(\sqrt{2}y^2-1\right)}{y\left(\sqrt{2}x^2-1\right)}=-1.$$

Решение:

ОДЗ: $y\left(\sqrt{2}x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ \sqrt{2}x^2-1\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x^2\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ x\neq\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Пусть $x=\sqrt{2}\cos\alpha$, $y=\sqrt{2}\sin\alpha$, $0\leq\alpha\leq 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\cos\alpha\left(\sqrt{2}\cdot 2\sin^2\alpha-1\right)=-\sqrt{2}\sin\alpha\left(\sqrt{2}\cdot 2\cos^2\alpha-1\right),$$

$$\cos\alpha\left(2\sqrt{2}\sin^2\alpha-1\right)+\sin\alpha\left(2\sqrt{2}\cos^2\alpha-1\right)=0,$$

$$\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha-\cos\alpha+\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0,\quad \sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

$$\left(\sqrt{2}\sin 2\alpha-1\right)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

тогда $\sin 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=-1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0\leq\alpha\leq 2\pi$, находим:

$\alpha_1=\frac{\pi}{8},\alpha_2=\frac{3\pi}{8},\alpha_3=\frac{9\pi}{8},\alpha_4=\frac{11\pi}{8},\alpha_5=\frac{3\pi}{4},\alpha_6=\frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

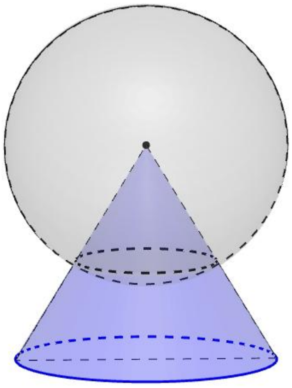
$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{8}\right),(1,-1),(-1,1)$$

Ответ: $\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}\right),$

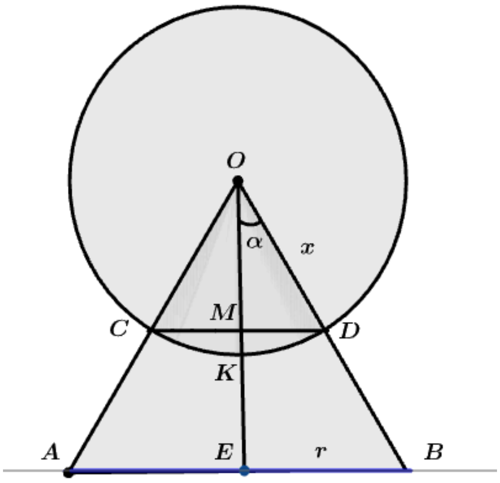
$\left(\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{8}\right),(1,-1),(-1,1)$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара, поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r=2$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha : \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Найти площадь поверхности соприкосновения жемчужины и серебряного конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x\cdot\cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha)$$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, откуда

$$x = r\cdot\sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha(1-\cos\alpha)}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{4}{5}}{4\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}}} = 2\cdot\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{45}}{3}$$

Тогда площадь поверхности соприкосновения конуса и жемчужины равна

$$S = \pi\cdot MD\cdot x = \pi\cdot(x\cdot\sin\alpha)\cdot x = \pi\cdot x^2\cdot\sin\alpha = \pi\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{45}}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= \frac{4\pi}{15}\cdot\sqrt[3]{2025} = \frac{4\cdot 3\pi}{15}\cdot\sqrt[3]{75} = \frac{4\sqrt[3]{75}\pi}{5}.$$

Ответ: $S=\frac{4\sqrt[3]{75}\pi}{5}$

Задача 5. (15 баллов) Для получения сертификата о прохождении онлайн-курса, слушателям необходимо пройти компьютерное тестирование и правильно ответить на два вопроса, выбранных случайным образом из 28 возможных. Каждый вопрос имеет три варианта ответа, один из которых правильный. В случае, если слушатель не выучил вопрос, он может попытаться угадать правильный ответ. Сколько вопросов необходимо выучить, чтобы получить сертификат с вероятностью не менее $\frac{5}{7}$?

Решение:

Пусть m - число вопросов, которые необходимо выучить.

Вероятность того, что слушатель знает ответ на два вопроса равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right);$$

вероятность того, что слушатель знает ответ на один из двух вопросов, а ответ на другой вопрос угадывает, равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right);$$

вероятность того, что слушатель не знает, но угадывает ответы на два вопроса, равна

$$\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right).$$

Тогда вероятность получить сертификат равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{28\cdot 27}+\frac{2m(28-m)}{28\cdot 27\cdot 3}+\frac{(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(28-m)+(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+168m+756-27m-28m+m^2}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{4m^2+104m+756}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}$$

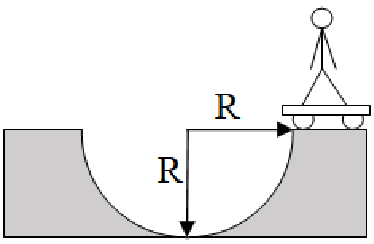
$$P=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}\geq\frac{5}{7}\Leftrightarrow\frac{m^2+26m+189}{9\cdot 27}\geq 5\Leftrightarrow m^2+26m+189-5\cdot 27\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+26m-1026\geq 0$$

$$m^2+26m-1026=0 \text{ при } m=-13+\sqrt{13^2+1026}=-13+\sqrt{1195}>21$$

Значит выучить нужно более 21 вопросов.

Ответ: 22 и более.

Задача 6. Находящийся на рампе скейтбордист начинает движение вниз по склону с начальной скоростью 4 м/с. После восьмого пересечения нижней точки рампы он вернулся в начальное положение, и остановился. Чему равна масса скейтбордиста, если при каждом переезде с одной



стороны рампы на другую за счет сил трения выделяется 50 Дж тепла? Считать, что скейтбордист катится, не прикладывая дополнительных сил во время движения. Плоскость рампы в сечении представляет собой полуокружность. (5 баллов)

Дано:

$Q = 50$ Дж

$v_0 = 4$ м/с

$m = ?$

Решение:

Запишем закон сохранения энергии для данной системы. В начальной точке он обладает потенциальной энергией и кинетической, после прохождения рампы часть этой энергии тратиться на работу силы трения и выделяется в виде тепла. С другой стороны рампы (на той же высоте) он будет иметь ту же потенциальную энергию и меньшую кинетическую.

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = Q + mgR + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{mv^2}{2}$$

Из уравнения видно, что с каждым проходом кинетическая энергия будет уменьшаться на величину Q. Так как по условию он пересекает рампу 8 раза, это значит, что все кинетическая энергия на выделение тепла. Отсюда получаем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 8Q$$

$$m = \frac{16Q}{v_0^2} = \frac{50 \cdot 16}{4^2} = 50 \text{ кг}$$

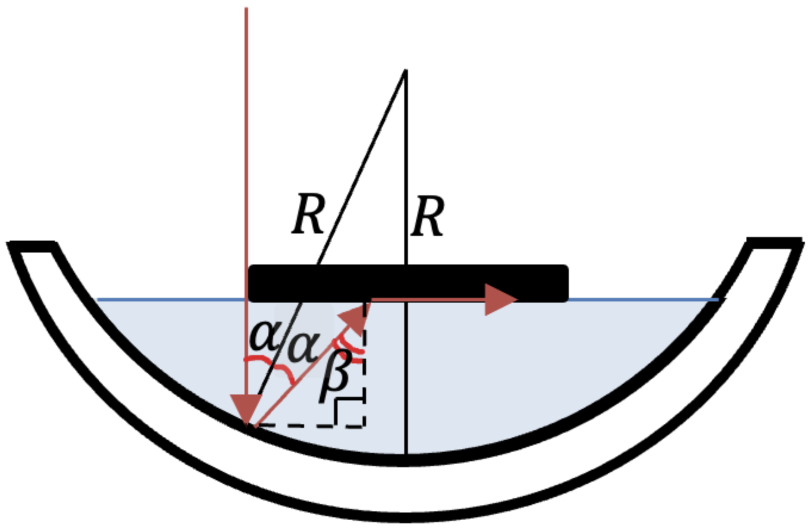
Ответ: $m = 50$ кг

Задача 7. В чашку со сферическим зеркальным дном налита какая-то жидкость. На ее поверхности в центре плавает плоский диск диаметром 50 см. Лучи света падают на всю поверхность жидкости по нормали. Чему приблизительно будет равен показатель преломления жидкости, учитывая то, что снаружи не видно ни одного отраженного от дна луча. Радиус кривизны чашки 68 см (7 баллов)

Дано:
$d = 50$ см
$R = 68$ см

$n = ?$

Решение:



По рисунку видно, что угол α можно выразить как:

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R}$$

Угол β *можно выразить через* α:

$$90° - \beta = 90° - 2\alpha$$

$$\beta = 2\alpha$$

Для того чтобы свет не вышел из жидкости и не отражался от диска, надо чтобы он попадал на поверхность жидкости под углом полного внутреннего отражения:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1} = \frac{1}{n}$$

Распишем формулу двойного угла и выразим все через значение $\sin\alpha$*:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Получаем:

$$2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{n}$$

Подставим в выражение, значение $\sin\alpha$:

$$2\frac{d}{2R}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}} = \frac{1}{n}$$

Выразим и посчитаем n:

$$\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}} = \frac{R}{dn}$$

$$n = \frac{R}{d\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}}$$

Значение $\frac{d^2}{4R^2} = \frac{0{,}5^2}{4 \cdot 0{,}68^2}$ *очень мало, так что можем считать, что* $\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \approx 1$

Получаем:

$$n \approx \frac{R}{d} \approx \frac{0{,}68}{0{,}5} \approx 1{,}36$$

Ответ: $n \approx 1{,}36$

Задача 8. Небольшой воздушный шарик с упругой оболочкой, прикрепленный пружиной ко дну открытого сосуда с водой, имеет объем 1 см^3, при температуре жидкости 17°С. При этом расстояние от шарика до поверхности воды составляет 4 м. Сосуд с жидкостью нагревают до 87°С и ждут пока в результате испарения, расстояние от шарика до поверхности уменьшится в два раза, шарик при этом растягивается. На сколько изменится удлинение пружины, если ее коэффициент жесткости равен 0,2 Н/м. Атмосферное давление принять равным 10^5 Па. (10 баллов)

Дано:

$T_1 = 27°\text{C} = 300\ \text{К}$

$T_2 = 87°\text{C} = 360\text{К}$

$\rho_в = \frac{1000\text{кг}}{\text{м}^3}$

$h_1 = 4$ м

$h_1 = 2h_2$

$v_1 = 1\ \text{см}^3 = 10^{-6}\text{м}^3$

$p_{атм} = 10^5\text{Па}$

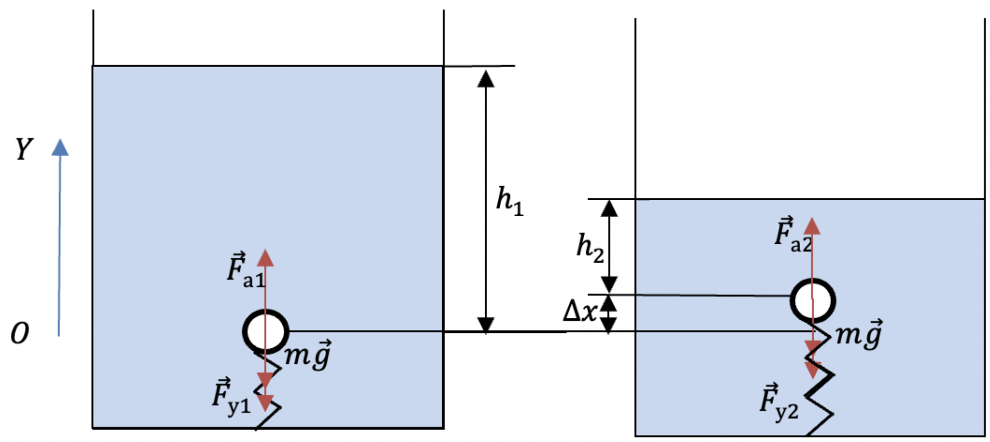
$k = 0{,}2$ Н/м

$\Delta x = ?$

Решение:

Сделаем рисунки для случаев до и после испарения жидкости и расставим действующие на шарик силы:

1) *2)*



Запишем уравнения I закона Ньютона для каждого из случаев:

$$\overrightarrow{F_{a1}} + \overrightarrow{F_{y1}} + m\vec{g} = 0 \qquad \overrightarrow{F_{a2}} + \overrightarrow{F_{y2}} + m\vec{g} = 0$$

$$OY: F_{a1} - F_{y1} - mg = 0 \qquad OY: F_{a2} - F_{y2} - mg = 0$$

С учетом $F_y = \rho g v$ *и* $F_y = kx$ *получим систему уравнений:*

$$\begin{cases} \rho g v_1 - kx_1 = mg \\ \rho g v_2 - kx_2 = mg \end{cases}$$

Приравняем уравнения друг другу через mg:

$$\rho g v_1 - kx_1 = \rho g v_2 - kx_2$$

$$kx_2 - kx_1 = \rho g v_2 - \rho g v_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{k}$$

Необходимо понять, как изменился объем вследствие уменьшения давления воды на шарик. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$\begin{cases} p_1 v_1 = \vartheta R T_1 \\ p_2 v_2 = \vartheta R T_2 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{\vartheta R T_2}{\vartheta R T_1}$$

$$v_2 = \frac{p_1 v_1 T_2}{p_2 T_1}$$

Значения давлений:

Вследствие малых размеров шарика и пружины и их малым влиянием на изменение давления в зависимости от глубины погружения, можем ими пренебречь и учесть только снижение уровня жидкости.

$$p_1 = \rho g h_1 + p_{\text{атм}}$$

$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\text{атм}} = \frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}$$

Получаем:

$$v_2 = \frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}$$

Получим изменение удлинения:

$$\Delta x = \frac{\rho g (v_2 - v_1)}{k} = \frac{\rho g \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) v_1 T_2}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1} - v_1 \right)}{k}$$

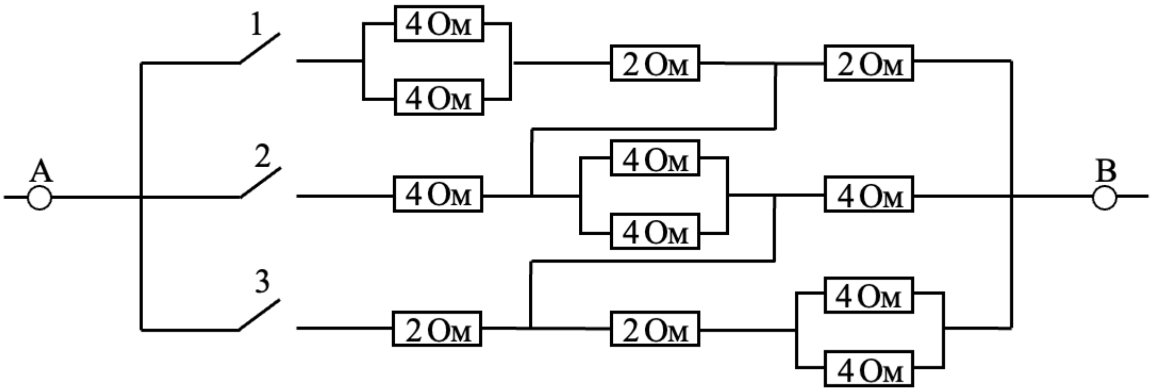
$$= \rho g v_1 \left(\frac{(\rho g h_1 + p_{\text{атм}}) T_2 - \left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1}{\left(\frac{\rho g h_1}{2} + p_{\text{атм}}\right) T_1 k} \right)$$

$$= 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{(1000 \cdot 10 \cdot 4 + 10^5) 360 - \left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 4}{2} + 10^5\right) 300}{\left(\frac{1000 \cdot 10 \cdot 4}{2} + 10^5\right) 300 \cdot 0{,}2} \right)$$

$$= 10^{-2} \left(\frac{(14)360 - (12)300}{(12)300 \cdot 0{,}2} \right) = 0{,}02 \text{ м}$$

Ответ: $\Delta x = 0{,}02 \text{ м} = 2 \text{ см}$

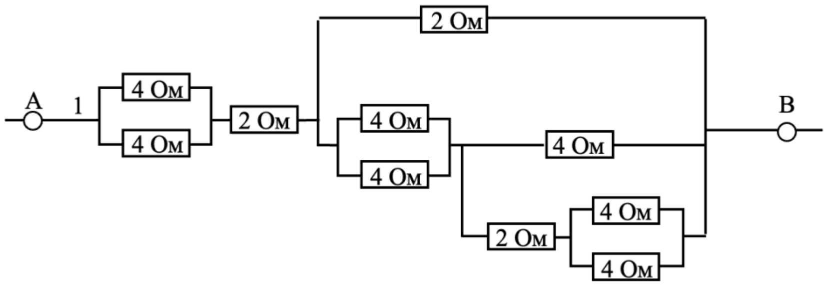
Задача 9. На предложенной электрической схеме есть 3 ключа (1-3), каждый из них меняет свое положение периодически. Каждый ключ имеет свое время переключения: для первого – 1 с, для второго – 2 с, для третьего – 3 с. Разность потенциалов между точками A и B поддерживается постоянной и равна 24 В. В начальный момент времени все ключи разомкнуты. Найдите заряд, прошедший через точку B, за 3 секунды после включения первого переключателя. (13 баллов)



Дано:
$T_1 = 1c$
$T_2 = 2c$
$T_3 = 3c$
$U_{AB} = 24\text{В}$
$t = 3\ c$

$q = ?$

Решение:
Распишем интервалы времени и соответствующие им эквивалентные схемы относительно времени включения первого интервала:
1) 0-1 с (1 ключ – замкнут, 2,3 – не замкнуты)



Рассчитаем эквивалентное сопротивление такой цепи.
Для участков с параллельным соединением по 4 Ом:

$$\frac{1}{R_{4-4}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{4-4} = \frac{R_4}{2} = 2\ \text{Ом}$$

Также имеется два одинаковых элемента (2 параллельных резистора по 4 Ом и один последовательный 2 Ом):

$$R_{2-4-4} = R_{4-4} + R_2 = 2 + 2 = 4\ \text{Ом}$$

Начнем раскрывать с правого нижнего угла, где соединены параллельно элемент R_{2-4-4} и резистор 4 Ом:

$$\frac{1}{R_{4-2-4-4}} = \frac{1}{R_{2-4-4}} + \frac{1}{R_4}$$
$$\frac{1}{R_{4-2-4-4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$R_{4-2-4-4} = 2\text{ Ом}$$

Далее получаем снова элемент $R_{2-4-4} = 4\text{ Ом}$*, который параллелен резистору 2 Ом:*

$$\frac{1}{R_{2-2-4-4}} = \frac{1}{R_{2-4-4}} + \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_{2-2-4-4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$R_{2-2-4-4} = \frac{4}{3}\text{ Ом}$$

Этот элемент соединен последовательно с R_{2-4-4}:

$$R_{\text{общ}1} = R_{2-2-4-4} + R_{2-4-4} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}\text{ Ом}$$

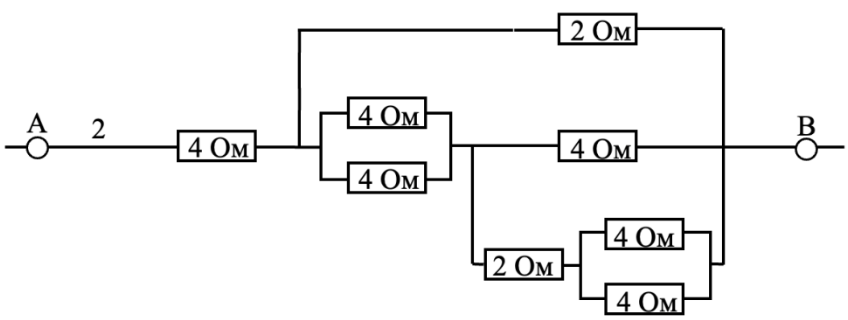
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за первый интервал времени:

$$q = It$$

С учетом $I = \frac{U}{R}$:

$$q_1 = \frac{U}{R_{\text{общ}1}}t = \frac{24}{\frac{16}{3}}1 = 4{,}5\text{ Кл}$$

2) 1-2 с (2 ключ – замкнут, 1 и 3 – не замкнуты)



Сопротивление нижнего участка, состоящего из последовательного и двух параллельных соединений, мы уже считали:

$$R_{2-4-4} = R_{4-4} + R_2 = 2 + 2 = 4\text{ Ом}$$

Оно соединено параллельно резистору 4 Ом:

$$R_{2-4-4-4} = \frac{R_4 R_{2-4-4}}{R_4 + R_{2-4-4}} = \frac{4\cdot 4}{4+4} = 2\text{ Ом}$$

Далее эти элементы соединены последовательно с двумя параллельными сопротивлениями по 4 Ом. Снова получаем *уже рассчитанный нами ранее элемент* $R_{2-4-4} = 4\ \text{Ом}$*, соединенный параллельно с сопротивлением 2 Ом.*

$$R_{2-4-4-2} = \frac{R_2 R_{2-4-4}}{R_2 + R_{2-4-4}} = \frac{2 \cdot 4}{2+4} = \frac{4}{3}\ \text{Ом}$$

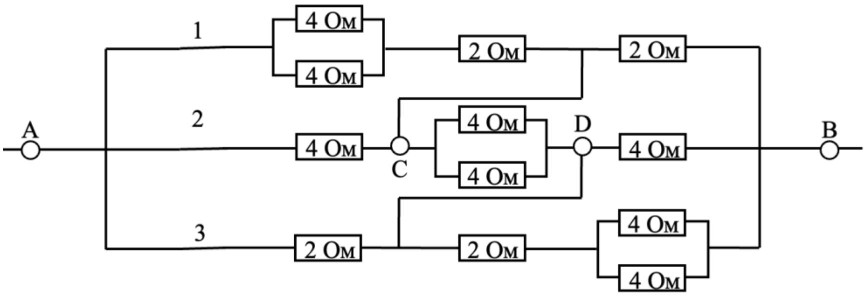
Общее сопротивление 2-ой цепи получается:

$$R_{\text{общ}2} = R_4 + R_{2-4-4-2} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\ \text{Ом}$$

Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

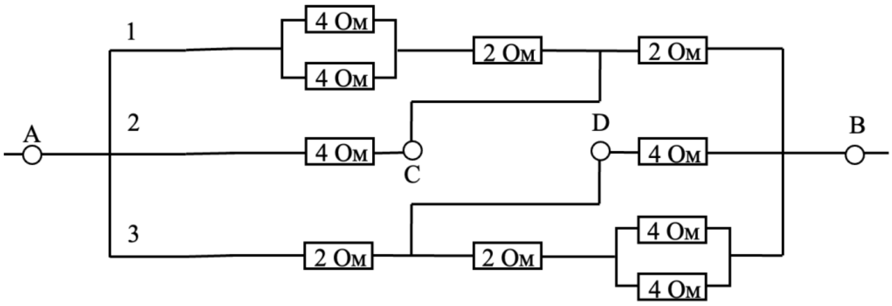
$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ}2}} t = \frac{24}{\frac{16}{3}} 1 = 4{,}5\ \text{Кл}$$

3) 2-3с (все ключи замкнуты)



Если посмотреть на схему, то можно выделить точки C и D. Для того чтобы понять, как протекает ток в этих точках, посчитаем сопротивления на интервалах AC и AD.
На интервале AD находится одно сопротивление 2 Ом.
На интервале AC находится 2 параллельных участка, проходящий через 3-ий ключ (уже посчитанный ранее $R_{2-4-4} = 4\ \text{Ом}$*) и резистор 4 Ом. Их общее сопротивление равно также как и на участке AD 2 Ом. Аналогичная ситуация наблюдается на участках CB и DB, где общие сопротивления этих участков будут также равны 2 Ом.*
Так как потенциалы в точках C и D будут равны, то можем исключить центральный элемент из схемы, так как по нему ток протекать не будет.

Приходим к схеме:



Получаем два одинаковых параллельных участка. Посчитаем общее сопротивление верхнего, которое состоит из участка АС (2 Ом), последовательно соединенного с резистором 2 Ом. Получаем общее сопротивление верхней цепи равное 4 Ом.

Так как верхняя и нижняя ветки имеют одинаковое сопротивление, и они параллельны, получаем что:

$$R_{\text{общ}3} = \frac{4}{2} = 2\ \text{Ом}$$

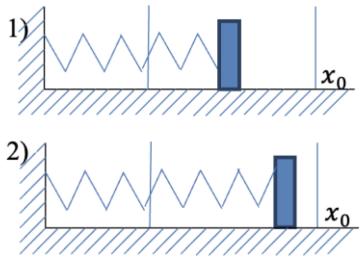
Посчитаем количество зарядов, прошедших по системе за второй интервал времени:

$$q_2 = \frac{U}{R_{\text{общ}3}} t = \frac{24}{2} 1 = 12\ \text{Кл}$$

Общее количество зарядов за все время:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 4{,}5 + 4{,}5 + 12 = 21\ \text{Кл}$$

Ответ: $q = 21$ Кл



Задача 10. Два одинаковых грузика закреплены на горизонтальных пружинах с разным коэффициентом жесткости и расположены на гладких горизонтальных поверхностях. Оба пружинных маятника оттягивают с одинаковой силой за грузы и отпускают, в следствие чего они начинают совершать колебания вдоль горизонтальной оси. Первый маятник, в процессе своего движения, смещаясь к положению равновесия пружины в какой-то точке, имеет скорость вдвое меньшую, чем на вдвое меньшем расстоянии до положения равновесия. А второй маятник двигаясь аналогичным образом увеличивает свою скорость в четыре раза, при перемещении из первой во вторую точку. При этом расстояние до положения равновесия становится в четыре раза меньшим. При этом в первых точках для обоих случаев сжатие пружины одинаково. Найдите отношение коэффициентов жесткости первой пружины ко второй. (15 баллов)

Дано:

$x_1 = 2x_2$

$2v_1 = v_2$

$x_1' = 4x_2'$

$4v_1' = v_2'$

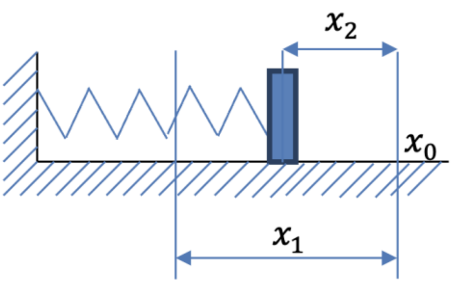
$x_1 = x_1'$

$\frac{k_1}{k_2} = ?$

Решение:

Так как движение обеих пружин идет по гладкой поверхности, то на небольшом промежутке времени их смещение можно описать как гармонические колебания пружинного маятника. Запишем уравнения смещения и скорости для первой пружины для первого и второго положений:

1)



$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0) \\ v_1 = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi_0) \\ v_2 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \varphi_0) \end{cases}$$

Для удобства расчетов заменим фазы колебания на $\delta_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ и $\delta_2 = \omega t_2 + \varphi_0$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\delta_1) \\ v_1 = -A\omega\sin(\delta_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A\cos(\delta_2) \\ v_2 = -A\omega\sin(\delta_2) \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения тригонометрическую функцию:

$$\begin{cases} cos(\delta_1) = \frac{x_1}{A} \\ sin(\delta_1) = \frac{v_1}{-A\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos(\delta_2) = \frac{x_2}{A} \\ sin(\delta_2) = \frac{v_2}{-A\omega} \end{cases}$$

Подставим их основное тригонометрическое тождество:

$$cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1 \qquad cos^2(\delta_1) + sin^2(\delta_1) = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{-A\omega}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{-A\omega}\right)^2 = 1$$

Приведем к общему знаменателю оба уравнения:

$$\frac{\omega^2 x_1^2 + v_1^2}{A^2\omega^2} = 1 \qquad \frac{\omega^2 x_2^2 + v_2^2}{A^2\omega^2} = 1$$

$$\begin{cases} \omega^2 x_1^2 + v_1^2 = A^2\omega^2 \\ \omega^2 x_2^2 + v_2^2 = A^2\omega^2 \end{cases}$$

Выразим ω^2 из каждого из уравнений и приравняем:

$$\begin{cases} v_1^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \\ v_2^2 = A^2\omega^2 - \omega^2 x_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} \\ \omega^2 = \dfrac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)} \end{cases}$$

$$\frac{v_1^2}{(A^2 - x_1^2)} = \frac{v_2^2}{(A^2 - x_2^2)}$$

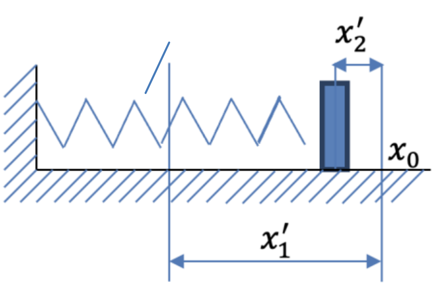
$$(A^2 - x_2^2)v_1^2 = (A^2 - x_1^2)v_2^2$$

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

Подставим соотношения из исходных данных:

$$A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{\frac{\frac{x_1^2}{4} v_1^2 - 4v_1^2 x_1^2}{v_1^2 - 4v_1^2}} = \sqrt{\frac{5x_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} x_1$$

2)



Составим системы уравнений для второй пружины:

$$\begin{cases} x_1' = A' cos(\omega t_1' + \varphi_0') \\ v_1' = -A'\omega' \sin(\omega t_1' + \varphi_0') \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A' cos(\omega t_2' + \varphi_0') \\ v_2 = -A'\omega' \sin(\omega t_2' + \varphi_0') \end{cases}$$

Аналогичным образом выразим из этой системы значение амплитуды колебаний:

$$A' = \sqrt{\frac{{x'_2}^2{v'_1}^2 - {x'_1}^2{v'_2}^2}{{v'_1}^2 - {v'_2}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{{x'_1}^2}{16}{v'_1}^2 - 16{x'_1}^2{v'_1}^2}{{v'_1}^2 - 16{v'_1}^2}} = \sqrt{\frac{17{x'_1}^2}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}x'_1$$

Так как к пружины изначально оттягивают с одинаковой силой, то по закону Гука получаем, что:

$$k_1 x_{max} = k_2 x'_{max}$$

Откуда получаем (с учетом $x_1 = x'_1$):

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x'_{max}}{x_{max}} = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}x_1}{\frac{\sqrt{5}}{2}x'_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{5}} = \sqrt{\frac{17}{20}}$$

Ответ: $\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{17}{20}}$

ВАРИАНТ 2-1

Задача 1. (5 баллов) Найти значение $n \geq 2$, при котором величина $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$ принимает наименьшее значение.

Решение:

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную рекуррентно:

$$x_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg(n-1) \cdot \lg n}{10^n} = \frac{\lg n}{10} \cdot x_{n-1}, \; x_1 = 1.$$

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\lg n}{10} < 1$, последовательность является убывающей, а при условии $\frac{\lg n}{10} > 1$ - возрастающей:

$\frac{\lg n}{10} < 1 \Leftrightarrow \lg n < 10 \Leftrightarrow \lg n < \lg 10^{10} \Leftrightarrow n < 10^{10}$.

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\lg n}{10} = 1$, два соседних члена с номерами $n-1$ и n равны между собой:

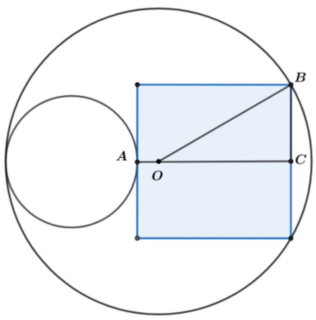
$\frac{\lg n}{10} = 1 \Leftrightarrow \lg n = 10 \Leftrightarrow \lg n = \lg 10^{10} \Leftrightarrow n = 10^{10}$.

Значит, данная величина принимает своё наименьшее значение при $n = 10^{10} - 1$ и $n = 10^{10}$.

Ответ: $n = 10^{10} - 1$ и $n = 10^{10}$.

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 17$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 16$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OC = 2x - OA = 2x - (R-d) = 2x - (17-16) = 2x - 1$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (2x-1)^2 + x^2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 = 5x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 5x^2 - 4x + 1 = 289 \Rightarrow$

$5x^2 - 4x - 288 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{4 + 1440}}{5} = \frac{2 + \sqrt{1444}}{5} = \frac{2 + 38}{5} = \frac{40}{5} = 8$, тогда искомая площадь равна $(16)^2 = 256$ кв.ед.

Ответ: 256 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=2$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-1\right)}{x\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\right)}=-1$$

Решение:

ОДЗ: $x\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ y^2\neq\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ y\neq\pm\sqrt[4]{2}\end{array}\right.$

Пусть $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$2\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\cos^2\alpha-1\right)=2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\sin^2\alpha-1\right),$$

$$\sin\alpha\left(2\sqrt{2}\cos^2\alpha-1\right)-\cos\alpha\left(2\sqrt{2}\sin^2\alpha-1\right)=0,$$

$$\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha-\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0,\quad \sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)-(\sin\alpha-\cos\alpha)=0,$$

$$\left(-\sqrt{2}\sin 2\alpha-1\right)\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)=0,$$

тогда $\sin 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\alpha-\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=1$.

Решая полученные уравнения и учитывая, что $0\le\alpha\le 2\pi$, находим:

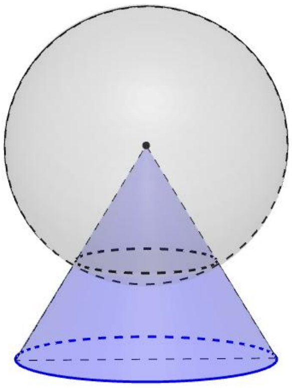
$\alpha_1=\frac{5\pi}{8},\alpha_2=\frac{7\pi}{8},\alpha_3=\frac{11\pi}{8},\alpha_4=\frac{15\pi}{8},\alpha_5=\frac{\pi}{4},\alpha_6=\frac{5\pi}{4}$ и получаем 6 пар решений:

$$\left(2\cos\frac{5\pi}{8},2\sin\frac{5\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{7\pi}{8},2\sin\frac{7\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{11\pi}{8},2\sin\frac{11\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{15\pi}{8},2\sin\frac{15\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$$

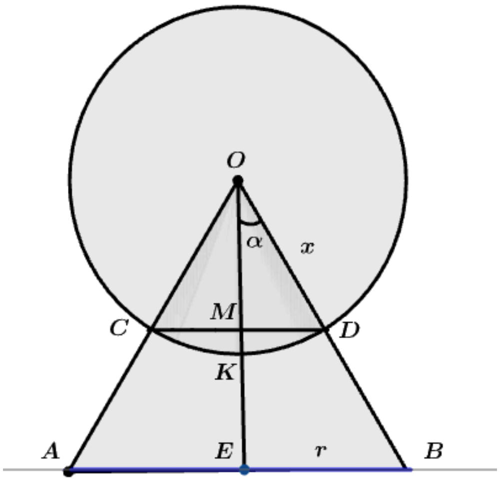
Ответ:

$$\left(2\cos\frac{5\pi}{8},2\sin\frac{5\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{7\pi}{8},2\sin\frac{7\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{11\pi}{8},2\sin\frac{11\pi}{8}\right),\left(2\cos\frac{15\pi}{8},2\sin\frac{15\pi}{8}\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара, поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r=4$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь сечения жемчужины и конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчужины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x \cdot \cos\alpha) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - \cos\alpha) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}} = 2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot \frac{1}{4}}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}},$$

тогда радиус сечения $MD = x \cdot \sin\alpha = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{12}$,

площадь искомого сечения $S = \pi \cdot \left(\sqrt[3]{12}\right)^2 = \pi \cdot \sqrt[3]{144} = 2\sqrt[3]{18}\pi$

Ответ: $S = 2\sqrt[3]{18}\pi$

Задача 5. (15 баллов) На соревнованиях по спортивному ориентированию спортсмену предлагается пройти два маршрута, случайно выбранных из 32 возможных. Вероятность прохождения заранее изученного маршрута равна 1, а неизученного - $\frac{1}{3}$. Найти минимальное количество маршрутов, которые необходимо изучить спортсмену заранее, чтобы с вероятностью не менее 0,5 пройти оба маршрута.

Решение:

Пусть m - число маршрутов, которые спортсмен изучил заранее.

Вероятность того, что на соревнованиях спортсмену выпали два изученных маршрута, равна $\left(\frac{m}{32} \cdot 1\right) \cdot \left(\frac{m-1}{31} \cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен точно знает, как пройти один из двух маршрутов, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен проходит два маршрута, не изучая их заранее, равна $\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Тогда вероятность пройти 2 маршрута равна

$$\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{32\cdot 31}+\frac{2m(32-m)}{32\cdot 31\cdot 3}+\frac{(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(32-m)+(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+192m+992-31m-32m+m^2}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{4m^2+120m+992}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}$$

$$P=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{m^2+30m+248}{4\cdot 31\cdot 9}\geq 1\Leftrightarrow m^2+30m+248-4\cdot 31\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+30m-868\geq 0$$

$m^2+30m-868=0$ при $m=-15+\sqrt{15^2+868}=-15+\sqrt{1093}>18$

Значит заранее нужно изучить минимум 19 маршрутов.

Ответ: 19.

Задача 6. В коридоре зеркало висит таким образом, что человек ростом 180 см, смотрящийся в него, видит себя в нем ровно до макушки, по верхнему краю, а по нижнему краю он не видит ног. Тогда им было решено, что надо поменять зеркало на такое, в котором он сможет увидеть себя в полный рост, для чего подошло другое зеркало, у которого высота в 1,5 раза больше. Какова была высота первого зеркала? (5 баллов)

Дано:

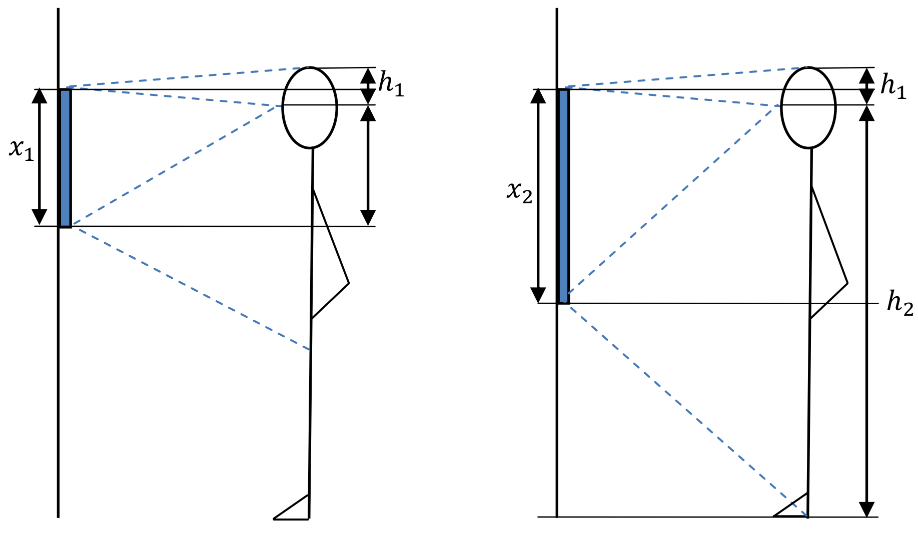
$h=180$см

$1{,}5x_1=x_2$

$x_1=?$

Решение:

Сделаем рисунок, как будут выглядеть оба случая с зеркалами:



Из второго рисунка видно, что:

$$x_2=\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}$$
$$h_1+h_2=h$$

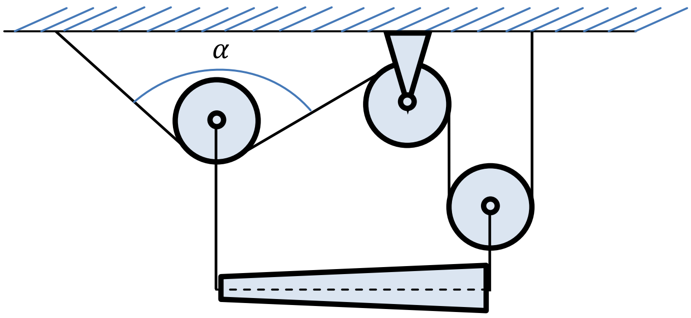
Отсюда получаем:

$$x_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{h}{2}$$

$$x_1 = \frac{x_2}{1{,}5} = \frac{2x_2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{h}{2} = \frac{h}{3} = \frac{180}{3} = 60 \text{ см} = 0{,}6 \text{ м}$$

Ответ: $x = 60 \text{ см} = 0{,}6 \text{ м}$

Задача 7. Длинный стержень в форме усеченного конуса подвешен центрами своих концов к нитям, через систему легких блоков, как показано на рисунке. При этом его ось располагается горизонтально и находится в равновесии. Найдите какую часть от всей длины стержня составляет расстояние от середины оси стержня до его центра тяжести, если угол $\boldsymbol{\alpha}$, между нитями на левом блоке равен 120°. (7 баллов)



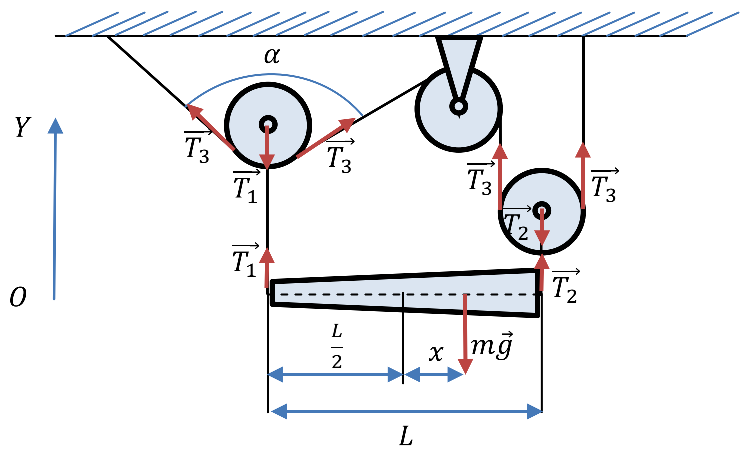
Дано:

$\alpha = 120°$

$\frac{x}{L} = ?$

Решение:

Укажем на схеме силы, действующие в системе, предполагая, что центр тяжести находится правее середины оси конуса:



Так как объект находится в равновесии можем записать I закон Ньютона для левого подвижного блока:

$$\vec{T_1} + \vec{T_3} + \vec{T_3} = 0$$

$$OY{:}-T_1+2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0$$
$$T_1=2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Сделаем аналогично для правого подвижного блока:

$$\overrightarrow{T_2}+\overrightarrow{T_3}+\overrightarrow{T_3}=0$$
$$OY{:}-T_2+2T_3=0$$
$$T_2=2T_3$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}T_1=2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ T_2=2T_3\end{cases}$$

Откуда получаем:

$$T_1=T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно центра стержня (выберем положительное направление по часовой стрелке):

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1}+\overrightarrow{\mathrm{M}_2}=0$$
$$\mathrm{M}_1=T_1\left(\frac{L}{2}+x\right)$$
$$\mathrm{M}_2=T_2\left(\frac{L}{2}-x\right)$$
$$T_1\left(\frac{L}{2}+x\right)-T_2\left(\frac{L}{2}-x\right)=0$$

Подставим в это уравнение значение $T_1=T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$*:*

$$T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+x\right)-T_2\left(\frac{L}{2}-x\right)=0$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+x\right)=\left(\frac{L}{2}-x\right)$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{L}{2}=\frac{L}{2}-x$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x+x=\frac{L}{2}-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{L}{2}$$
$$x=\frac{\frac{L}{2}-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{L}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}=\frac{L}{2}\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}$$
$$\frac{x}{L}=\frac{1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}+2}=\frac{1}{6}$$

Проверим возможность нахождения центра тяжести слева от центра. Составим уравнение моментов сил относительно центра стержня:

$$T_1\left(\frac{L}{2}-x\right)-T_2\left(\frac{L}{2}+x\right)=0$$

Решая данное уравнение, получим:

$$\frac{x}{L}=-\frac{1}{6}$$

Отсюда можем сделать вывод, что центр тяжести должен находится правее центра стержня.

Ответ: $\frac{x}{L}=\frac{1}{6}$

Задача 8. Водяной пар при температуре 100℃ и давлении 24930 Па находится в закрытом сосуде со свободно движущимся поршнем (в сосуде нет других газов или жидкостей). Поршень начинают медленно опускать, тем самым уменьшая объем пара внутри сосуда. Найдите, какова будет высота жидкости в сосуде после того, как поршень в нее упрется, если начальная высота пара в сосуде 37,3м. Температура воды и пара в сосуде поддерживается постоянной. (10 баллов)

Дано:

$T=100℃$

$h_0=37{,}3\text{м}$

$p_0=24930\text{Па}$

$\rho_{\text{в}}=1000\text{кг/м}^3$

$p_{\text{н.п.}}=10^5$ Па

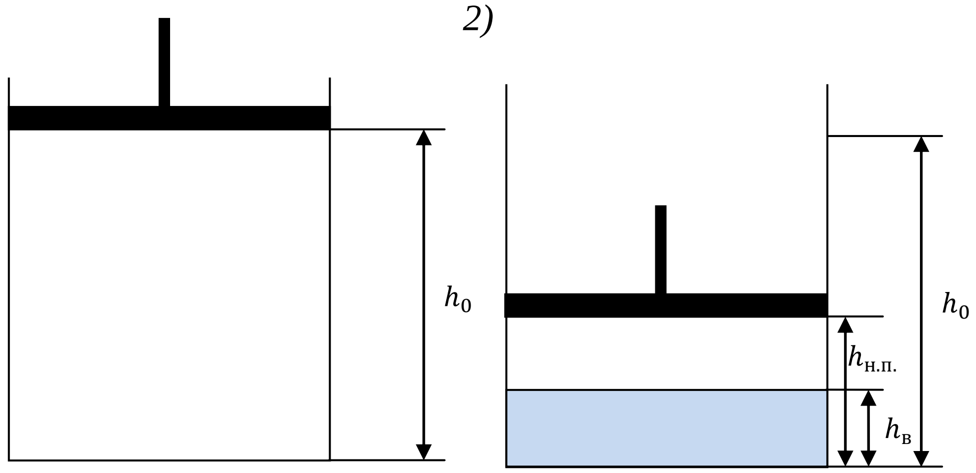
$M_{H_2O}=18\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$

$h_{\text{в}}=?$

Решение:

Рассмотрим этапы движения поршня:

1) *2)*



При медленном изотермическом перемещении поршня будет справедлив закон Бойля-Мариотта (pv=const). Давление будет подниматься до достижения давления насыщенного пара для этой температуры, которое как мы знаем, при температуре кипения воды в 100℃ равно атмосферному $p_{\text{н.п.}}=10^5$ Па. *Далее (схема 2) при дальнейшем движении поршня давление повышаться уже не будет, а пар будет конденсироваться.*

$$p_0v_0=p_{\text{н.п.}}v_{\text{н.п.}}$$

$$p_0h_0S=p_{\text{н.п.}}h_{\text{н.п.}}S$$

$$h_{н.п.} = \frac{p_0 h_0}{p_{н.п.}}$$

Поршень будет двигаться, пока весь пар не перейдет в состояние жидкости, откуда получаем, что масса насыщенного пара будет равна массе сконденсировавшейся воды:

$$m_{н.п.} = m_в$$

$$v_{н.п.}\rho_{н.п.} = v_в \rho_в$$

$$h_{н.п.} S \rho_{н.п.} = h_в S \rho_в$$

Выразим высоту получившейся воды:

$$h_в = \frac{h_{н.п.}\rho_{н.п.}}{\rho_в}$$

Плотность пара можем посчитать из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$p_{н.п.} v_{н.п.} = \frac{m_{н.п.}}{M} RT$$

Отсюда получаем:

$$p_{н.п.} v_{н.п.} = \frac{v_{н.п.}\rho_{н.п.}}{M} RT$$

$$\rho_{н.п.} = \frac{M p_{н.п.}}{RT}$$

Подставим это значение в формулу высоты воды:

$$h_в = \frac{h_{н.п.}\rho_{н.п.}}{\rho_в} = \frac{\frac{p_0 h_0}{p_{н.п.}} \cdot \frac{M p_{н.п.}}{RT}}{\rho_в} = \frac{p_0 h_0 M}{RT \rho_в}$$

$$= \frac{24930 \cdot 37{,}3 \cdot 0{,}018}{8{,}31 \cdot 373 \cdot 1000} = 0{,}0054 м$$

$$= 5{,}4 \text{ мм}$$

Ответ: $h_в = 0{,}0054 м = 5{,}4$ мм

Задача 9. Небольшой груз массой 4 г держится на горизонтально расположенной пружине, прикрепленной к стене. Поверхность стола гладкая. В грузик стреляют небольшой пулькой массой 2 г, в следствие чего она застревает, и вся эта система начинает совершать колебания. В тот момент, когда они проходят положение равновесия, в них стреляют еще одной такой же пулькой с такой же скоростью, причем их скорости в этот момент сонаправлены. Она также как и первая застревает в грузике, в следствие чего они продолжают движение. Чему равно отношение скорости грузика с двумя пулями, к грузику с одной в положениях, когда их смещения равны половинам соответствующих амплитуд колебаний.

Дано:

$m = 2$ г

$M = 4$ г

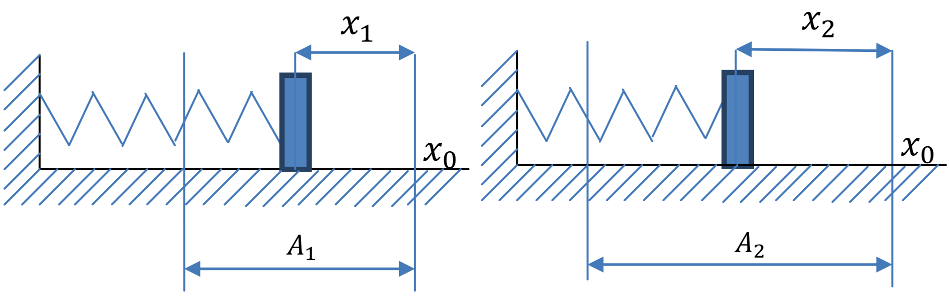
$x_1 = \frac{1}{2}A_1$

$x_2 = \frac{1}{2}A_2$

$\frac{v_2}{v_1} = ?$

Решение:

При попадании пуля застревает в грузике, и система начинает совершать колебания по гармоническому закону. Запишем уравнения для смещения и скорости в искомых точках.



Для описания гармонического колебания используем функцию sin(), *так как в начальном положении смещение точки равно 0.*

$$\begin{cases} x_1 = A_1\sin(\omega_1 t_1) \\ v_1 = A_1\omega_1 cos(\omega_1 t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A_2\sin(\omega_2 t_2) \\ v_2 = A_2\omega_2 cos(\omega_2 t_2) \end{cases}$$

Выразим через основное тригонометрическое тождество:

$$cos(\omega_1 t_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)}, \text{ где } \sin(\omega_1 t_1) = \frac{x_1}{A_1}$$

$$cos(\omega_2 t_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_2 t_2)}, \text{ где } \sin(\omega_2 t_2) = \frac{x_2}{A_2}$$

Подставим все в уравнение скоростей:

$$v_1 = A_1\omega_1 cos(\omega_1 t_1) = A_1\omega_1\sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)} = A_1\omega_1\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A_1^2}}$$

$$= \omega_1\sqrt{A_1^2 - x_1^2}$$

Аналогично для второго:

$$v_2 = \omega_2\sqrt{A_2^2 - x_2^2}$$

С учетом $x_1 = \frac{1}{2}A_1$ *и* $x_2 = \frac{1}{2}A_2$ *получим*

$$v_1 = \omega_1 \sqrt{A_1^2 - \frac{A_1^2}{4}} = \omega_1 \sqrt{\frac{3A_1^2}{4}} = \omega_1 A_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_2 = \omega_2 A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отношение скоростей в искомых точках на середине амплитуд:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\omega_1 A_1 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega_2 A_2}{\omega_1 A_1}$$

Из уравнения видим, что скорости в одинаковых фазах колебаний на всем пути будут соотносится одинаково, и соответствовать отношению амплитудных значений скоростей колебаний.

Для нахождения скорости колебания после первого выстрела воспользуемся ЗСИ:

$$mv_0 = (M+m)v_1$$

Откуда:

$$v_1 = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

Аналогично воспользуемся ЗСИ для системы после второго выстрела. Так как скорость пули и движущейся системы сонаправлены, получим:

$$mv_0 + (M+m)v_1 = (M+2m)v_2$$

Откуда:

$$v_2 = \frac{mv_0 + (M+m)v_1}{(M+2m)}$$

Заменив $(M+m)v_1 = mv_0$ *получим:*

$$v_2 = \frac{2mv_0}{(M+2m)}$$

Найдем отношение амплитудных значений скоростей колебаний, которое равно отношению искомых в задаче скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{2mv_0}{(M+2m)}}{\frac{mv_0}{(M+m)}} = \frac{2(M+m)}{(M+2m)} = \frac{2(4+2)\cdot 10^{-3}}{(4+2\cdot 2)\cdot 10^{-3}} = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$

Задача 10. В плоском конденсаторе с квадратными пластинами расположены две пластины, такой же площади, как и сами пластины конденсатора. Толщина пластин одинаковая, а в конденсатор они вставлены так, что каждая из них плотно прилегает к своей пластине конденсатора, и друг к другу. Каждую из пластин сдвигают внутри конденсатора в горизонтальном направлении в разные стороны на одинаковое расстояние, так, что они частично выходят за его пределы. Найдите площадь соприкасающейся части пластин друг с другом, если после сдвига электроемкость конденсатора стала равна 0,48 от начальной. Диэлектрическая проницаемость первой пластины равна трем, а второй - пять. Длина стороны пластины конденсатора составляет 10 см. Итоговая схема будет представлять собой систему из 3 параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из двух последовательно соединенных конденсаторов. (15 баллов)

Дано:

$\varepsilon_1 = 3$

$\varepsilon_2 = 5$

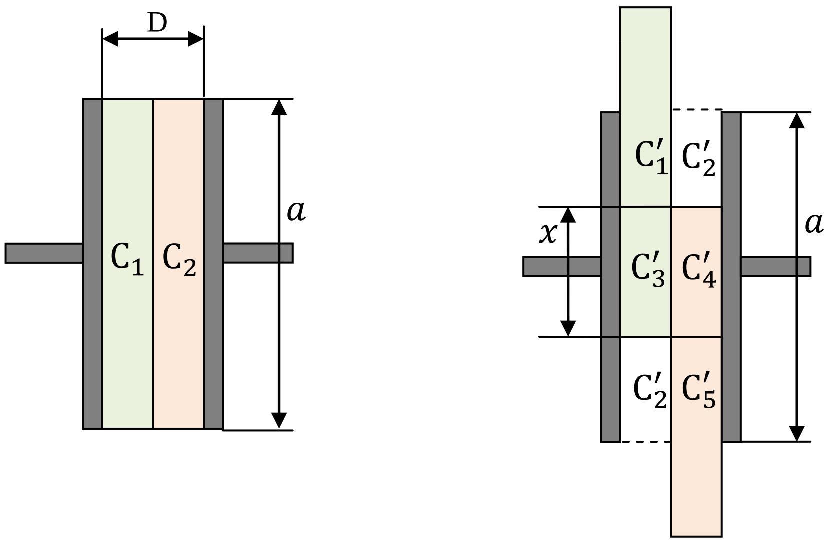
$a = 10$ см

$C' = 0{,}48C_0$

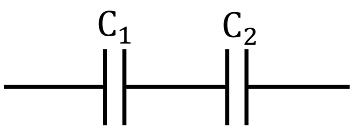
$d_1 = d_2 = \dfrac{D}{2}$

$S = ?$

Решение:



1)Определим электроемкость конденсатора в первом случае. Так как пластины в конденсаторе расположены друг за другом, такую систему можно представить, как два последовательно соединенных конденсатора.



Запишем емкость такой системы:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

С учетом того, что емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ *распишем емкости* C_1 *и* C_2 *и подставим в выражение выше:*

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}$$

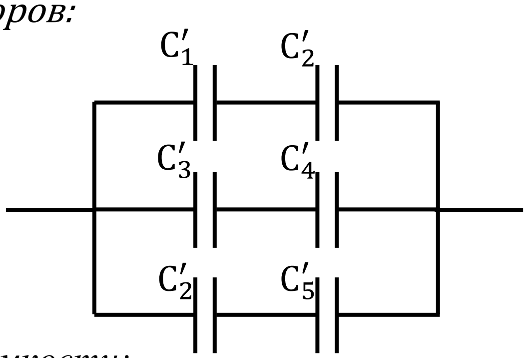
$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}}$$

С учетом того, что $d_1 = d_2 = d$*:*

$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d} \cdot \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d}}{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0^2 a^4}{d^2} \frac{d}{(\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2)}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

2) Теперь разберем вторую систему после сдвига пластин. Система можно представить как 3 параллельных пары последовательно соединенных конденсаторов:



Распишем емкости:

$$C_1' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad C_2' = \frac{\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad C_3' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a x}{d}$$

$$C_4' = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a x}{d} \quad C_5' = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d}$$

Общая емкость системы:

$$C' = \frac{C_1' \, C_2'}{C_1' + C_2'} + \frac{C_3' \, C_4'}{C_3' + C_4'} + \frac{C_2' \, C_5'}{C_2' + C_5'}$$

По аналогии с расчетом первой системы:

$$\frac{C_1' \, C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1 + 1)}$$

$$\frac{C_3' \, C_4'}{C_3' + C_4'} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 a x}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{C_2' \, C_5'}{C_2' + C_5'} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2 + 1)}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1 + 1)} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 a x}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2 + 1)}$$

Приравняем емкости конденсаторов до и после сдвига:

$$C' = 0{,}48C_0$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}=0{,}48\,\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Выразим отсюда значение x:

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_1+1)}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_2+1)}$$
$$=0{,}48\,\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+\frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}-\frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)}=\frac{0{,}48\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)}=\frac{0{,}48\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}$$

$$x=\frac{\frac{0{,}48\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_1+1)}-\frac{\varepsilon_2}{2(\varepsilon_2+1)}}$$

$$=\frac{\frac{0{,}48\cdot 3\cdot 5\cdot 0{,}1}{(3+5)}-\frac{3\cdot 0{,}1}{2(3+1)}-\frac{5\cdot 0{,}1}{2(5+1)}}{\frac{3\cdot 5}{(3+5)}-\frac{3}{2(3+1)}-\frac{5}{2(5+1)}}$$

$$=\frac{\frac{0{,}48\cdot 1{,}5}{8}-\frac{0{,}3}{8}-\frac{0{,}5}{12}}{\frac{15}{8}-\frac{3}{8}-\frac{5}{12}}=\frac{\frac{0{,}72-0{,}3}{8}-\frac{0{,}5}{12}}{\frac{18}{12}-\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1{,}26}{24}-\frac{1}{24}}{\frac{13}{12}}$$

$$=\frac{26\cdot 12}{100\cdot 24\cdot 13}=0{,}01$$

Площадь перекрытия:

$$S=ax=0{,}1\cdot 0{,}01=0{,}001\ \text{м}^2$$

Ответ: $S=0{,}001\ \text{м}^2=10^{-3}\text{м}^2$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 2-2

Задача 1. (5 баллов) Найти значение $n \ge 2$, при котором величина $\frac{\log_5 2 \cdot \log_5 3 \cdot ... \cdot \log_5 n}{5^n}$ принимает наименьшее значение.

Решение:

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную рекуррентно:

$$x_n = \frac{\log_5 2 \cdot \log_5 3 \cdot ... \cdot \log_5 (n-1) \cdot \log_5 n}{5^n} = \frac{\log_5 n}{5} \cdot x_{n-1}, \ x_1 = 1.$$

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\log_5 n}{5} < 1$, последовательность является убывающей, а при условии $\frac{\log_5 n}{5} > 1$ - возрастающей:

$\frac{\log_5 n}{5} < 1 \Leftrightarrow \log_5 n < 5 \Leftrightarrow \log_5 n < \log_5 5^5 \Leftrightarrow n < 5^5$.

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\log_5 n}{5} = 1$, два соседних члена с номерами $n-1$ и n равны между собой:

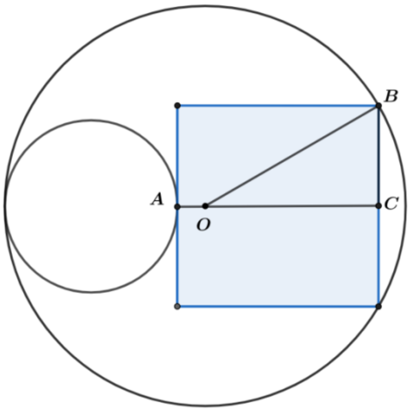
$\frac{\log_5 n}{5} = 1 \Leftrightarrow \log_5 n = 5 \Leftrightarrow \log_5 n = \log_5 5^5 \Leftrightarrow n = 5^5$.

Значит, данная величина принимает своё наименьшее значение при $n = 5^5 - 1$ и $n = 5^5$.

Ответ: $n = 5^5 - 1$ и $n = 5^5$.

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 20$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 12$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OC = 2x - OA = 2x - (R - d) = 2x - (20 - 12) = 2x - 8$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (2x-8)^2 + x^2 = 4x^2 - 32x + 64 + x^2 = 5x^2 - 32x + 64 \Rightarrow 5x^2 - 32x + 64 = 400 \Rightarrow$ $5x^2 - 32x - 336 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{16+\sqrt{256+1680}}{5} = \dfrac{16+\sqrt{1936}}{5} = \dfrac{16+44}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$, тогда искомая площадь равна $(24)^2 = 576$ кв.ед.

Ответ: 576 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R = 2$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - 1\right)}{x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y^2 - 1\right)} = -1.$$

Решение:

ОДЗ: $x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y^2 - 1\right) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}y^2 - 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y^2 \neq \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq \pm\sqrt[4]{3} \end{array}\right.$

Пусть $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$, $0 \le \alpha \le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$2\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\cos^2\alpha - 1\right) = -2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\sin^2\alpha - 1\right),$$

$$\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\cos^2\alpha - 1\right) + \cos\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4\sin^2\alpha - 1\right) = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha) = 0, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sin 2\alpha - 1\right)\cdot(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0,$$

тогда $\sin 2\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow tg\alpha = -1$.

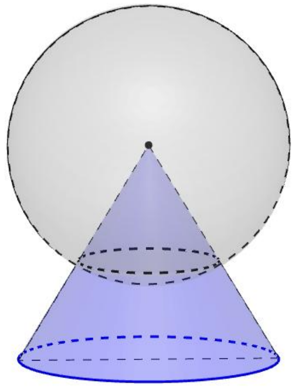
Решая полученные уравнения и учитывая , что $0 \le \alpha \le 2\pi$, находим: $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{\pi}{3}, \alpha_3 = \frac{7\pi}{6}, \alpha_4 = \frac{4\pi}{3}, \alpha_5 = \frac{3\pi}{4}, \alpha_6 = \frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

$$(\sqrt{3},1), (1,\sqrt{3}), (-\sqrt{3},-1), (-1,-\sqrt{3}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

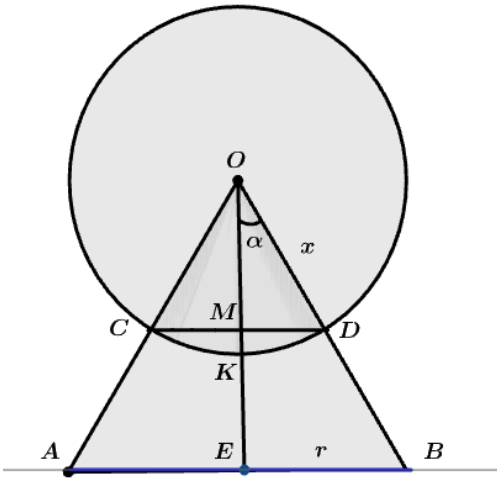
Ответ: $(\sqrt{3},1), (1,\sqrt{3}), (-\sqrt{3},-1), (-1,-\sqrt{3}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r = 2$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha : \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Найти площадь сечения жемчужины и конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчужины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$,

$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x \cdot \cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - \cos\alpha)$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x = r \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha(1-\cos\alpha)}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{5}}{4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}}} = 2\sqrt[3]{\frac{15}{32}} = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$$

тогда радиус сечения $MD = x \cdot \sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \cdot \frac{4}{5} = 5^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{48}{25}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{25}}$,

площадь искомого сечения $S = \pi \cdot \left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{25}}\right)^2 = 4\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{36}{625}} = \frac{4\pi}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{36}{5}} = \frac{4}{25}\cdot\sqrt[3]{900}\pi$

Ответ: $S = \frac{4}{25}\cdot\sqrt[3]{900}\pi$

Задача 5. (15 баллов) На соревнованиях по спортивному ориентированию спортсмену предлагается пройти два маршрута, случайно выбранных из 28 возможных. Вероятность прохождения заранее изученного маршрута равна 1, а неизученного - $\frac{1}{3}$. Найти минимальное количество маршрутов, которые необходимо изучить спортсмену заранее, чтобы с вероятностью не менее $\frac{7}{9}$ пройти оба маршрута.

Решение:

Пусть m - число маршрутов, которые спортсмен изучил заранее.

Вероятность того, что на соревнованиях спортсмену выпали два изученных маршрута, равна $\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен точно знает, как пройти один из двух маршрутов, равна $\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен проходит 2 маршрута, не изучая их заранее равна $\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Тогда вероятность пройти 2 маршрута равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{28\cdot 27}+\frac{2m(28-m)}{28\cdot 27\cdot 3}+\frac{(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(28-m)+(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+168m+756-27m-28m+m^2}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{4m^2+104m+756}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}$$

$$P=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}\geq\frac{7}{9}\Leftrightarrow\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27}\geq 7\Leftrightarrow m^2+26m+189-7\cdot 27\cdot 7\geq 0\Leftrightarrow m^2+26m-1134\geq 0$$

$$m^2+26m-1134=0 \text{ при } m=-13+\sqrt{13^2+1134}=-13+\sqrt{1303}>23$$

Значит заранее нужно изучить минимум 24 маршрута.

Ответ: 24

Задача 6. В коридоре зеркало висит таким образом, что девушка ростом 160 см, смотрящаяся в него, видит себя в нем ровно до макушки, по верхнему краю, а по нижнему краю она не может увидеть свои ноги. Было принято решение -поменять зеркало на такое, в котором она сможет увидеть себя в полный рост, для чего было выбрано другое зеркало, у которого высота в 2 раза больше. Какова была высота первого зеркала? (5 баллов)

Дано:

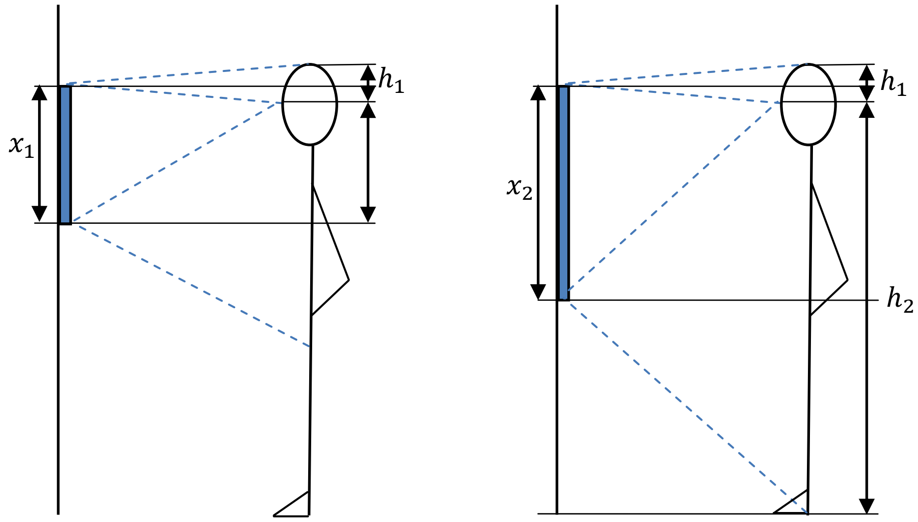
$h = 160$см

$2x_1 = x_2$

$x_1 = ?$

Решение:

Сделаем рисунок, как будут выглядеть оба случая с зеркалами:



Из второго рисунка видно, что:

$$x_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}$$
$$h_1 + h_2 = h$$

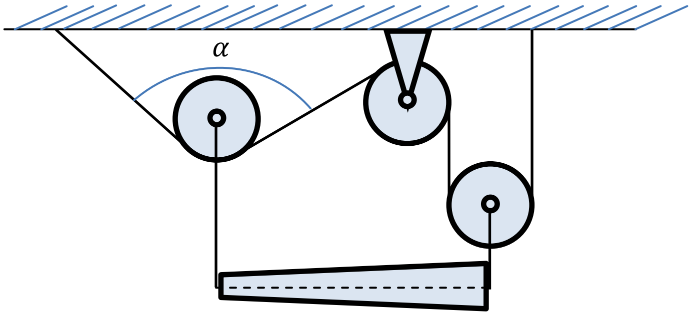
Отсюда получаем:

$$x_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{h}{2}$$

$$x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{4} = \frac{160}{4} = 40 \text{ см} = 0{,}4 \text{ м}$$

Ответ: $x = 40$ см $= 0{,}4$ м

Задача 7. Длинный усеченный конус подвешен центрами своих концов к нитям, через систему легких блоков, как показано на рисунке. При этом его ось располагается горизонтально и находится в равновесии. Найдите угол $\boldsymbol{\alpha}$, если расстояние от середины оси конуса до центра тяжести отнесенное ко всей его длине составляет $\frac{1}{6}$. (7 баллов)



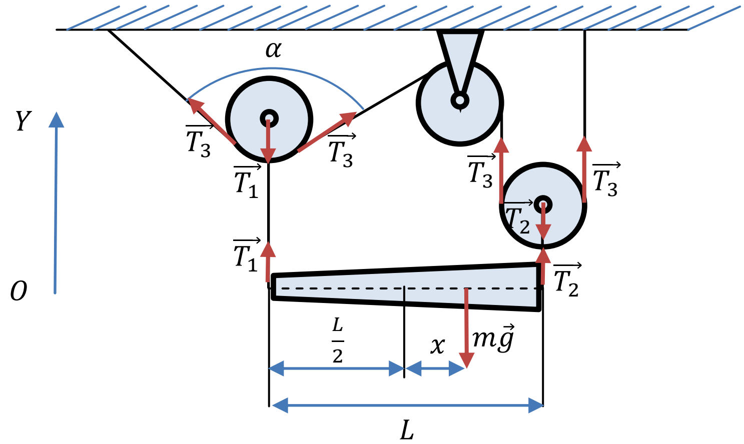
Дано:

$\frac{x}{L} = \frac{1}{6}$

$\alpha = ?$

Решение:

Укажем на схеме силы, действующие в системе, предполагая, что центр тяжести находится правее центра:



Так как объект находится в равновесии можем записать I закон Ньютона для левого подвижного блока:

$$\vec{T_1} + \vec{T_3} + \vec{T_3} = 0$$
$$OY{:}-T_1 + 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$
$$T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Сделаем аналогично для правого подвижного блока:

$$\vec{T_2} + \vec{T_3} + \vec{T_3} = 0$$
$$OY{:}-T_2 + 2T_3 = 0$$
$$T_2 = 2T_3$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ T_2 = 2T_3 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$T_1 = T_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно центра стержня (выберем положительное направление по часовой стрелке):

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1} + \overrightarrow{\mathrm{M}_2} = 0$$

$$\mathrm{M}_1 = T_1\left(\frac{L}{2} + x\right)$$

$$\mathrm{M}_2 = T_2\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$T_1\left(\frac{L}{2} + x\right) - T_2\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

Подставим в это уравнение значение $T_1 = T_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$*:*

$$T_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + x\right) - T_2\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + x\right) = \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2} - x}{\frac{L}{2} + x}$$

Учитывая, что $L = 6x$:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2} - x}{\frac{L}{2} + x} = \frac{\frac{6x}{2} - x}{\frac{6x}{2} + x} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

Отсюда $\frac{\alpha}{2} = 60°$*, что значит, что* $\alpha = 120°$

Проверим возможность нахождения центра тяжести слева от центра. Составим уравнение моментов сил относительно центра стержня:

$$T_1\left(\frac{L}{2} - x\right) - T_2\left(\frac{L}{2} + x\right) = 0$$

Решая данное уравнение, получим:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2} + x}{\frac{L}{2} - x} = \frac{\frac{6x}{2} + x}{\frac{6x}{2} - x} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = 2$$

Так как такое значение невозможно, то можем сделать вывод, что центр тяжести должен находится правее центра стержня.

Ответ: $\alpha = 120°$

Задача 8. В закрытом сосуде со свободно движущимся поршнем находится водяной пар под давлением 49860Па и имеет температуру 100℃ (Другие жидкости или газы в сосуде отсутствуют). Поршень медленно опускается, тем самым уменьшая объем пара внутри сосуда, до того момента, пока не упрется в жидкость. Какова будет высота жидкости в сосуде после остановки поршня? Высота, на которой вначале расположен поршень, - 37,3м. Температура воды и водяного пара поддерживается постоянной в течение всего процесса. (10 баллов)

Дано:

$T = 100℃$

$h_0 = 37{,}3\text{м}$

$p_0 = 49860\text{Па}$

$\rho_в = 1000\text{кг/м}^3$

$p_{н.п.} = 10^5\ \text{Па}$

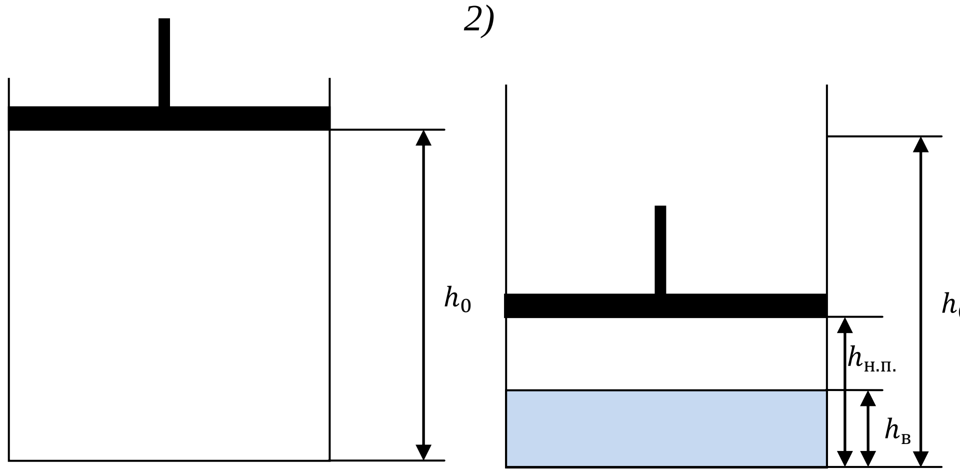
$M_{H_2O} = 18\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$

$h_в = ?$

Решение:

Рассмотрим этапы движения поршня:

1) *2)*



При медленном изотермическом перемещении поршня будет справедлив закон Бойля-Мариотта (pv=const). Давление будет подниматься до достижения давления насыщенного пара для этой температуры, которое как мы знаем, при температуре кипения воды в 100℃ равно атмосферному $p_{н.п.} = 10^5\ \text{Па}$. *Далее (схема 2) при дальнейшем движении поршня давление повышаться уже не будет, а пар будет конденсироваться.*

$$p_0 v_0 = p_{н.п.} v_{н.п.}$$

$$p_0 h_0 S = p_{н.п.} h_{н.п.} S$$

$$h_{н.п.} = \frac{p_0 h_0}{p_{н.п.}}$$

Поршень будет двигаться, пока весь пар не перейдет в состояние жидкости, откуда получаем, что масса насыщенного пара будет равна массе сконденсировавшейся воды:

$$m_{н.п.} = m_в$$

$$v_{н.п.} \rho_{н.п.} = v_в \rho_в$$

$$h_{н.п.} S \rho_{н.п.} = h_в S \rho_в$$

Выразим высоту получившейся воды:

$$h_{в} = \frac{h_{н.п.}\rho_{н.п.}}{\rho_{в}}$$

Плотность пара можем посчитать из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$p_{н.п.}v_{н.п.} = \frac{m_{н.п.}}{M}RT$$

Отсюда получаем:

$$p_{н.п.}v_{н.п.} = \frac{v_{н.п.}\rho_{н.п.}}{M}RT$$

$$\rho_{н.п.} = \frac{Mp_{н.п.}}{RT}$$

Подставим это значение в формулу высоты воды:

$$h_{в} = \frac{h_{н.п.}\rho_{н.п.}}{\rho_{в}} = \frac{\frac{p_0 h_0}{p_{н.п.}} \cdot \frac{Mp_{н.п.}}{RT}}{\rho_{в}} = \frac{p_0 h_0 M}{RT\rho_{в}}$$

$$= \frac{49860 \cdot 37{,}3 \cdot 0{,}018}{8{,}31 \cdot 373 \cdot 1000} = 0{,}0108\text{м}$$

$$= 10{,}8\text{ мм}$$

Ответ: $h_{в} = 0{,}0108\text{м} = 10{,}8\text{ мм}$

Задача 9. На гладком столе располагается система, состоящая из груза массой 4 г, прикрепленного к горизонтально расположенной закрепленной пружине. В грузик выстреливают небольшим шариком массой 4 г, вследствие чего он застревает в грузике, и эта система начинает совершать колебания. В тот момент, когда грузик с шариком двигаются в направлении противоположном выстрелу и проходят положение равновесия, в них стреляют еще одним таким же шариком с той же скоростью, который также застревает. Найдите соотношение скорости грузика с шариком после первого выстрела к скорости после второго в положениях, когда их смещения равны трети соответствующих амплитуд колебаний.

Дано:

$m = 4$ г

$M = 4$ г

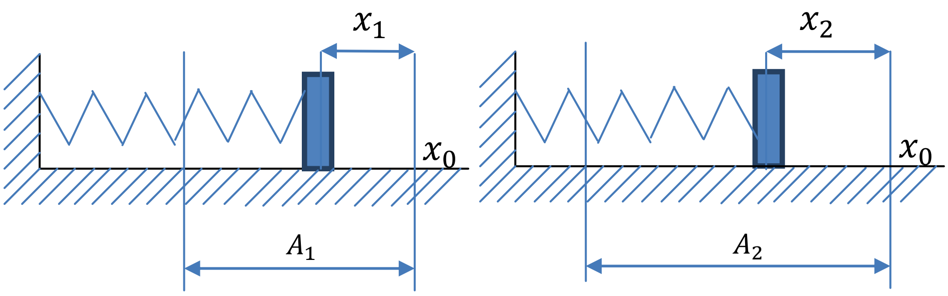
$x_1 = \frac{1}{3}A_1$

$x_2 = \frac{1}{3}A_2$

$\frac{v_1}{v_2} = ?$

Решение:

При попадании пуля застревает в грузике, и система начинает совершать колебания по гармоническому закону. Запишем уравнения для смещения и скорости в искомых точках.



Для описания гармонического колебания используем функцию sin(), так как в начальном положении смещение точки равно 0.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t_1) \\ v_1 = A_1 \omega_1 cos(\omega_1 t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t_2) \\ v_2 = A_2 \omega_2 cos(\omega_2 t_2) \end{cases}$$

Выразим через основное тригонометрическое тождество:

$$cos(\omega_1 t_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)}, \text{ где } \sin(\omega_1 t_1) = \frac{x_1}{A_1}$$

$$cos(\omega_2 t_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_2 t_2)}, \text{ где } \sin(\omega_2 t_2) = \frac{x_2}{A_2}$$

Подставим все в уравнение скоростей:

$$v_1 = A_1 \omega_1 cos(\omega_1 t_1) = A_1 \omega_1 \sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)} = A_1 \omega_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A_1^2}}$$

$$= \omega_1 \sqrt{A_1^2 - x_1^2}$$

Аналогично для второго:

$$v_2 = \omega_2 \sqrt{A_2^2 - x_2^2}$$

С учетом $x_1 = \frac{1}{3}A_1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}A_2$ *получим*

$$v_1 = \omega_1 \sqrt{A_1^2 - \frac{A_1^2}{9}} = \omega_1 \sqrt{\frac{8A_1^2}{9}} = \omega_1 A_1 \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$v_2 = \omega_2 A_2 \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Отношение скоростей в искомых точках на трети амплитуд:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1 A_1 \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\omega_2 A_2 \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2}$$

Из уравнения видим, что скорости в одинаковых фазах колебаний на всем пути будут соотносится одинаково, и соответствовать отношению амплитудных значений скоростей колебаний.

Для нахождения скорости колебания после первого выстрела воспользуемся ЗСИ:

$$mv_0 = (M+m)v_1$$

Откуда:

$$v_1 = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

Аналогично воспользуемся ЗСИ для системы после второго выстрела. Так как скорость пули и движущейся системы сонаправлены, получим:

$$mv_0 + (M+m)v_1 = (M+2m)v_2$$

Откуда:

$$v_2 = \frac{mv_0 + (M+m)v_1}{(M+2m)}$$

Заменив $(M+m)v_1 = mv_0$ *получим:*

$$v_2 = \frac{2mv_0}{(M+2m)}$$

Найдем отношение амплитудных значений скоростей колебаний, которое равно отношению искомых в задаче скоростей:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{mv_0}{(M+m)}}{\frac{2mv_0}{(M+2m)}} = \frac{(M+2m)}{2(M+m)} = \frac{(4+2\cdot 4)\cdot 10^{-3}}{2(4+4)\cdot 10^{-3}} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{4}$

Задача 10. В плоском конденсаторе с квадратными пластинами расположены две пластины, такой же площади, как и сами пластины конденсатора. Длина стороны пластины конденсатора составляет 40 см. Толщина пластин одинаковая, а в конденсатор они вставлены так, что каждая из них плотно прилегает к своей пластине конденсатора, и друг к другу. Каждую из пластин сдвигают внутри конденсатора в горизонтальном направлении в разные стороны на одинаковое расстояние, так, что они частично выходят за его пределы, при этом емкость конденсатора становится равно 0,74 от начальной. Чему равна ширина перекрытия соприкасающейся части пластин друг с другом? Диэлектрическая проницаемость первой пластины – 3, а второй – 5. Итоговая схема будет представлять собой систему из 3 параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из двух последовательно соединенных конденсаторов. (15 баллов)

Дано:

$\varepsilon_1 = 3$

$\varepsilon_2 = 5$

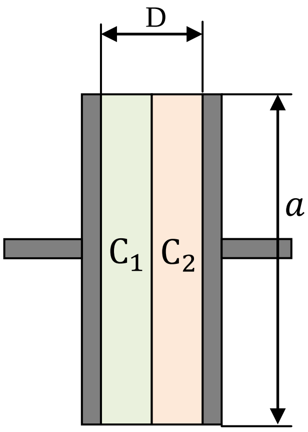
$a = 40$ см

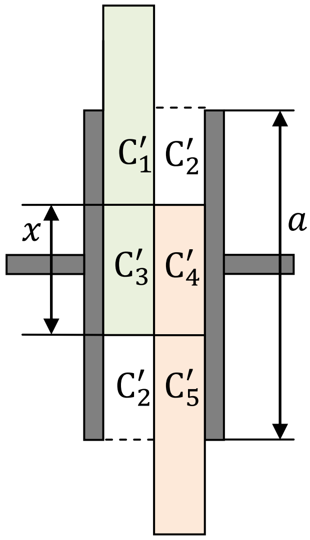
$C' = 0{,}74C_0$

$d_1 = d_2 = \dfrac{D}{2}$

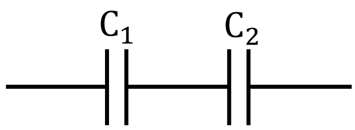
$x = ?$

Решение:





1)Определим электроемкость конденсатора в первом случае. Так как пластины в конденсаторе расположены друг за другом, такую систему можно представить, как два последовательно соединенных конденсатора.



Запишем емкость такой системы:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

С учетом того, что емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ *распишем емкости* C_1 *и* C_2 *и подставим в выражение выше:*

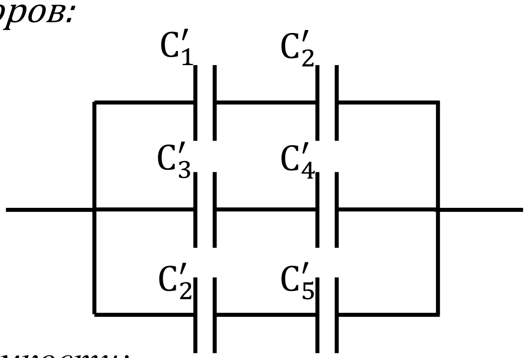
$$C_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}$$

$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1}\cdot\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}}$$

С учетом того, что $d_1 = d_2 = d$:

$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d}\cdot\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0^2 a^4}{d^2}\frac{d}{(\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2+\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2)} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

2) Теперь разберем вторую систему после сдвига пластин. Система можно представить как 3 параллельных пары последовательно соединенных конденсаторов:



Распишем емкости:

$$C_1' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad C_2' = \frac{\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad C_3' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 ax}{d}$$

$$C_4' = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d} \quad C_5' = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d}$$

Общая емкость системы:

$$C' = \frac{C_1'\,C_2'}{C_1'+\,C_2'} + \frac{C_3'\,C_4'}{C_3'+\,C_4'} + \frac{C_2'\,C_5'}{C_2'+\,C_5'}$$

По аналогии с расчетом первой системы:

$$\frac{C_1'\,C_2'}{C_1'+\,C_2'} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)}$$

$$\frac{C_3'\,C_4'}{C_3'+\,C_4'} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{C_2'\,C_5'}{C_2'+\,C_5'} = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}$$

Приравняем емкости конденсаторов до и после сдвига:

$$C' = 0{,}74C_0$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a x}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)} = 0{,}74\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Выразим отсюда значение x:

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a x}{2d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a x}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a x}{2d(\varepsilon_2+1)}$$

$$= 0{,}74\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}74\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}74\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}$$

$$x = \frac{\frac{0{,}74\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2}{2(\varepsilon_2+1)}}$$

$$= \frac{\frac{0{,}74\cdot 3\cdot 5\cdot 0{,}4}{(3+5)} - \frac{3\cdot 0{,}4}{2(3+1)} - \frac{5\cdot 0{,}4}{2(5+1)}}{\frac{3\cdot 5}{(3+5)} - \frac{3}{2(3+1)} - \frac{5}{2(5+1)}}$$

$$= \frac{\frac{0{,}74\cdot 6}{8} - \frac{1{,}2}{8} - \frac{2}{12}}{\frac{15}{8} - \frac{3}{8} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{4{,}44-1{,}2}{8} - \frac{2}{12}}{\frac{18}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{9{,}72}{24} - \frac{4}{24}}{\frac{13}{12}}$$

$$= \frac{572\cdot 12}{100\cdot 24\cdot 13} = 0{,}22\text{м}$$

Ответ: $x = 0{,}22\text{м} = 22\text{см}$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 2-3

Задача 1. (5 баллов) Найти значение $n \geq 2$, при котором величина $\frac{\log_7 2 \cdot \log_7 3 \cdot \ldots \cdot \log_7 n}{7^n}$ принимает наименьшее значение.

Решение:

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную рекуррентно:

$$x_n = \frac{\log_7 2 \cdot \log_7 3 \cdot \ldots \cdot \log_7 (n-1) \cdot \log_7 n}{7^n} = \frac{\log_7 n}{7} \cdot x_{n-1},\ x_1 = 1.$$

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\log_7 n}{7} < 1$, последовательность является убывающей, а при условии $\frac{\log_7 n}{7} > 1$ - возрастающей:

$\frac{\log_7 n}{7} < 1 \Leftrightarrow \log_7 n < 7 \Leftrightarrow \log_7 n < \log_7 7^7 \Leftrightarrow n < 7^7$.

При значении n, для которого выполняется условие $\frac{\log_7 n}{7} = 1$, два соседних члена с номерами $n-1$ и n равны между собой:

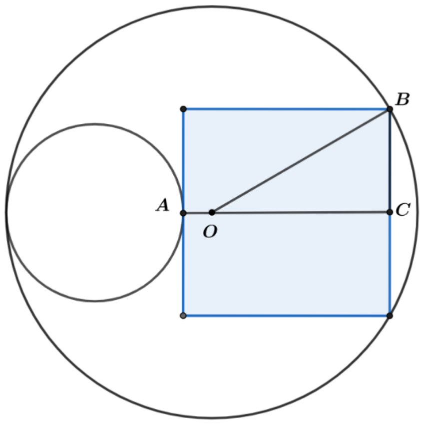
$\frac{\log_7 n}{7} = 1 \Leftrightarrow \log_7 n = 7 \Leftrightarrow \log_7 n = \log_7 7^7 \Leftrightarrow n = 7^7$.

Значит, данная величина принимает своё наименьшее значение при $n = 7^7 - 1$ и $n = 7^7$.

Ответ: $n = 7^7 - 1$ и $n = 7^7$.

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 15$ ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 9$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OC = 2x - OA = 2x - (R-d) = 2x - (15-9) = 2x - 6$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (2x-6)^2 + x^2 = 4x^2 - 24x + 36 + x^2 = 5x^2 - 24x + 36 \Rightarrow 5x^2 - 24x + 36 = 225 \Rightarrow$

$5x^2-24x-189=0 \Rightarrow x=\frac{12+\sqrt{144+945}}{5}=\frac{12+\sqrt{1089}}{5}=\frac{12+33}{5}=\frac{45}{5}=9$, тогда искомая площадь равна $(9)^2=81$ кв.ед.

Ответ: 81 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R=\sqrt{2}$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{y(2x^2-1)}{x(2y^2-1)}=-1.$$

Решение:

ОДЗ: $x(2y^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ 2y^2-1\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ y^2\neq \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\neq 0 \\ y\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Пусть $x=\sqrt{2}\cos\alpha$, $y=\sqrt{2}\sin\alpha$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\sin\alpha(2\cdot 2\cos^2\alpha-1)=-\sqrt{2}\cos\alpha(2\cdot 2\sin^2\alpha-1),$$

$$\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)+\cos\alpha(4\sin^2\alpha-1)=0,$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin\alpha=0,$$

$$2\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$$

$(2\sin 2\alpha-1)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=0,$ тогда $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$ или $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Leftrightarrow tg\alpha=-1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0\le\alpha\le 2\pi$, находим:

$\alpha_1=\frac{\pi}{12}, \alpha_2=\frac{5\pi}{12}, \alpha_3=\frac{13\pi}{12}, \alpha_4=\frac{17\pi}{12}, \alpha_5=\frac{3\pi}{4}, \alpha_6=\frac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

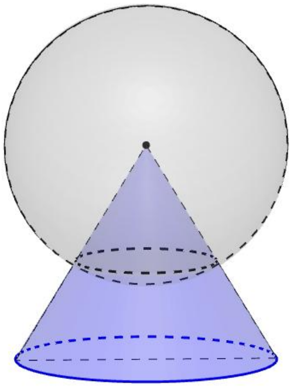
$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{12}\right),$$

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}\right), (1,-1), (-1,1)$$

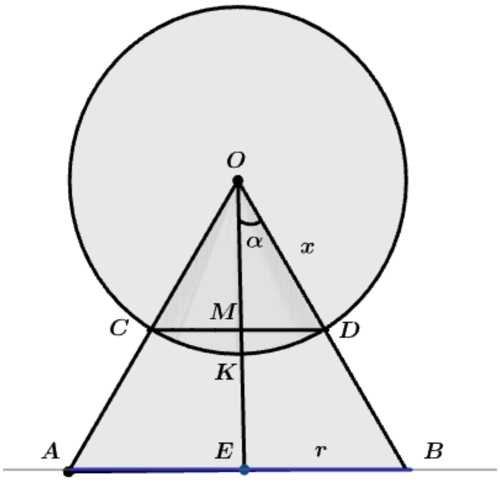
Ответ: $\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{12}\right),$

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}, \sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}\right), (1,-1), (-1,1).$$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r=2$ и угол между осью конуса и его образующей $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь сечения жемчужины и конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2.

Тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x\cdot\cos\alpha) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1-\cos\alpha) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По условию $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, значит $\frac{4}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x = \frac{2}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 1\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}},$$

тогда радиус сечения $MD = x\cdot\sin\alpha = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$,

площадь искомого сечения $S = \pi\cdot\left(\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2 = \pi\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt[3]{54}\pi}{4}$

Ответ: $S = \frac{\sqrt[3]{54}\pi}{4}$

Задача 5. (15 баллов) На соревнованиях по спортивному ориентированию спортсмену предлагается пройти два маршрута, случайно выбранных из 32 возможных. Вероятность прохождения заранее изученного маршрута равна 1, а неизученного - $\frac{1}{3}$. Найти минимальное количество маршрутов, которые необходимо изучить спортсмену заранее, чтобы с вероятностью не менее 0,75 пройти оба маршрута.

Решение:

Пусть m - число маршрутов, которые спортсмен изучил заранее.

Вероятность того, что на соревнованиях спортсмену выпали два изученных маршрута, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен точно знает, как пройти 1 из двух маршрутов, равна $\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен проходит 2 маршрута, не изучая их заранее равна $\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Тогда вероятность пройти 2 маршрута равна

$$\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{32}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{32-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{31}\cdot 1\right)+\left(\frac{32-m}{32}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{31-m}{31}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{32\cdot 31}+\frac{2m(32-m)}{32\cdot 31\cdot 3}+\frac{(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(32-m)+(32-m)\cdot(31-m)}{32\cdot 31\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+192m+992-31m-32m+m^2}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{4m^2+120m+992}{32\cdot 31\cdot 9}=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}$$

$$P=\frac{m^2+30m+248}{8\cdot 31\cdot 9}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{m^2+30m+248}{2\cdot 31\cdot 9}\geq 3\Leftrightarrow m^2+30m+248-6\cdot 31\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+30m-1426\geq 0$$

$m^2+30m-1426=0$ при $m=-15+\sqrt{15^2+1426}=-15+\sqrt{1651}>25$

Значит заранее нужно изучить минимум 26 маршрута.

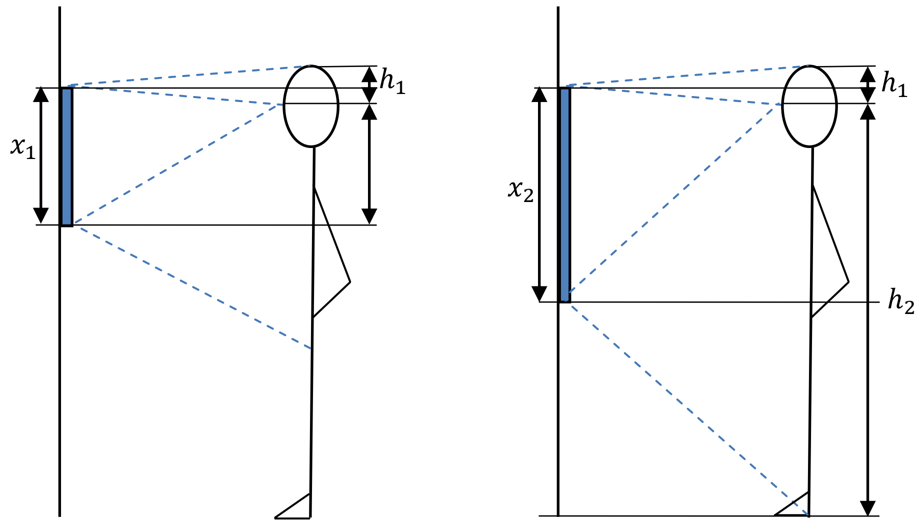
Ответ: 26

Задача 6. В коридоре зеркало висит таким образом, что девушка, смотрящаяся в него, видит себя в нем ровно до макушки, по верхнему краю, а по нижнему краю она не может увидеть свои ноги. Было принято решение -поменять зеркало на такое, в котором она сможет увидеть себя в полный рост, для чего было выбрано другое зеркало, у которого высота в 2 раза больше. Какой рост у девушки, если высота первого зеркала 40 см? (5 баллов)

Дано:
$x_1 = 40$ см
$2x_1 = x_2$

$h = ?$

Решение:
Сделаем рисунок, как будут выглядеть оба случая с зеркалами:



Из второго рисунка видно, что:

$$x_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}$$
$$h_1 + h_2 = h$$

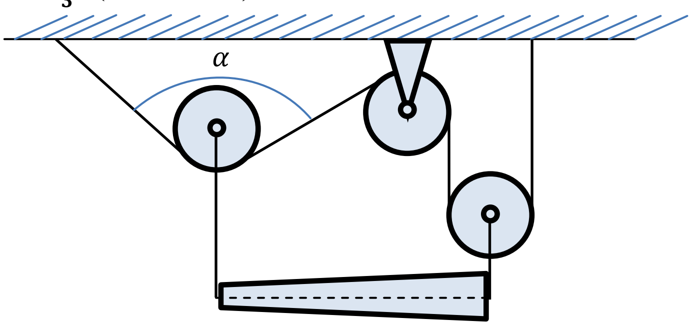
Отсюда получаем:

$$x_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{h}{2}$$

$$h = 2x_2 = 4x_1 = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \text{ м}$$

Ответ: $h = 1{,}6$ м $= 160$ см

Задача 7. Длинный усеченный конус подвешен центрами своих концов к нитям, через систему легких блоков, как показано на рисунке. При этом ось конуса располагается горизонтально и находится в равновесии. Найдите угол $\boldsymbol{\alpha}$, если отношение расстояния от левого края до центра тяжести конуса ко всей его длине равно $\frac{2}{3}$. (7 баллов)



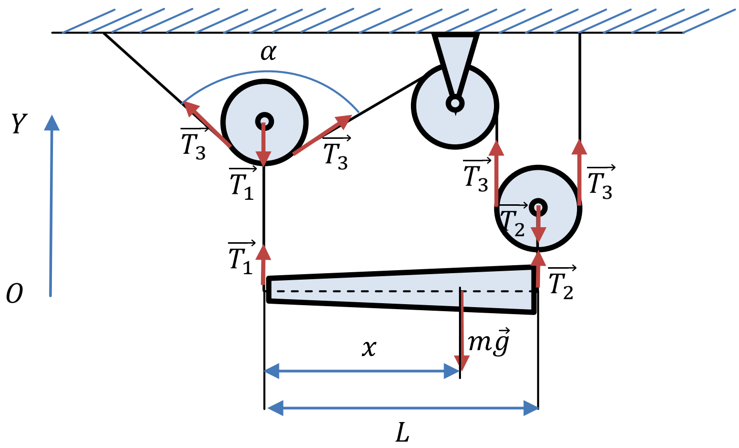
Дано:

$\frac{x}{L} = \frac{2}{3}$

$\alpha = ?$

Решение:

Укажем на схеме силы, действующие в системе:



Так как объект находится в равновесии можем записать I закон Ньютона для левого подвижного блока:

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_3} = 0$$

$$OY: -T_1 + 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Сделаем аналогично для правого подвижного блока:

$$\overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_3} = 0$$

$$OY: -T_2 + 2T_3 = 0$$

$$T_2 = 2T_3$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ T_2 = 2T_3 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$T_1 = T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно центра тяжести стержня (выберем положительное направление по часовой стрелке):

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1} + \overrightarrow{\mathrm{M}_2} = 0$$

$$\mathrm{M}_1 = T_1 x$$

$$\mathrm{M}_2 = T_2(L - x)$$

$$T_1 x - T_2(L - x) = 0$$

Подставим в это уравнение значение $T_1 = T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$*:*

$$T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x - T_2(L - x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(L - x)}{x}$$

Учитывая, что $L = \frac{3}{2}x$:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(L-x)}{x} = \frac{\left(\frac{3}{2}x - x\right)}{x} = \frac{1}{2}$$

Отсюда $\frac{\alpha}{2} = 60°$, *что значит, что* $\alpha = 120°$

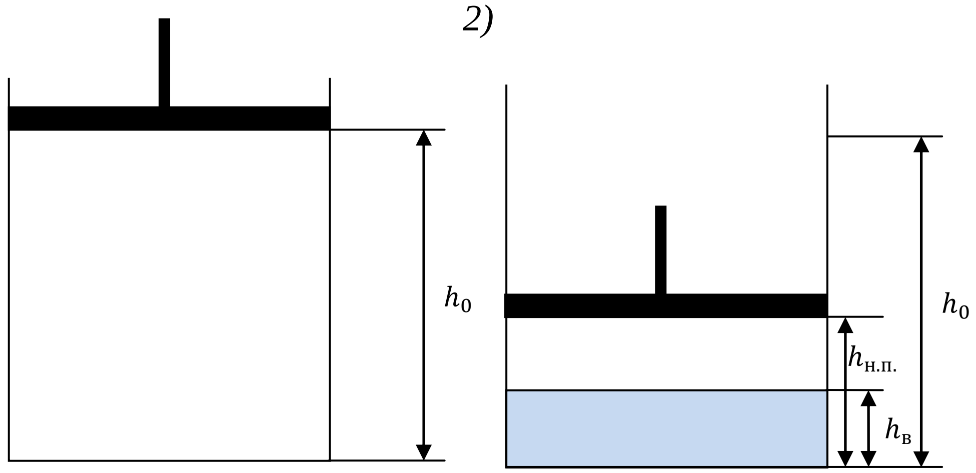
Ответ: $\alpha = 120°$

Задача 8. Водяной пар, имеющий давление **12465**Па и температуру 100℃, находится в закрытом поршнем сосуде (других газов или жидкостей в сосуде нет). Поршень медленно двигают вниз, тем самым уменьшая объем пара внутри сосуда, до момента, пока он не упрется в жидкость. Какова была начальная высота, на которой находился поршень, если высота жидкости в сосуде после остановки поршня составляет 0,54 см. Температура воды и водяного пара поддерживается постоянной. (10 баллов)

Дано:
$T = 100℃$
$p_0 = 12465 Па$
$\rho_в = 1000 кг/м^3$
$p_{н.п.} = 10^5$ Па
$h_в = 0{,}54 см = 0{,}0054 м$
$M_{H_2O} = 18 \frac{г}{моль}$

$h_0 = ?$

Решение:
Рассмотрим этапы движения поршня:
1) *2)*



При медленном изотермическом перемещении поршня будет справедлив закон Бойля-Мариотта (pv=const). Давление будет подниматься до достижения давления насыщенного пара для этой температуры, которое как мы знаем, при температуре кипения воды в 100℃ равно атмосферному $p_{н.п.} = 10^5$ Па. *Далее (схема 2) при дальнейшем движении поршня давление повышаться уже не будет, а пар будет конденсироваться.*

$$p_0 v_0 = p_{н.п.} v_{н.п.}$$
$$p_0 h_0 S = p_{н.п.} h_{н.п.} S$$
$$h_{н.п.} = \frac{p_0 h_0}{p_{н.п.}}$$

Поршень будет двигаться, пока весь пар не перейдет в состояние жидкости, откуда получаем, что масса насыщенного пара будет равна массе сконденсировавшейся воды:

$$m_{н.п.} = m_в$$
$$v_{н.п.} \rho_{н.п.} = v_в \rho_в$$
$$h_{н.п.} S \rho_{н.п.} = h_в S \rho_в$$

Выразим высоту получившейся воды:

$$h_{\text{в}} = \frac{h_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{\rho_{\text{в}}}$$

Плотность пара можем посчитать из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$p_{\text{н.п.}} v_{\text{н.п.}} = \frac{m_{\text{н.п.}}}{M} RT$$

Отсюда получаем:

$$p_{\text{н.п.}} v_{\text{н.п.}} = \frac{v_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{M} RT$$

$$\rho_{\text{н.п.}} = \frac{M p_{\text{н.п.}}}{RT}$$

Подставим это значение в формулу высоты воды:

$$h_{\text{в}} = \frac{h_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\frac{p_0 h_0}{p_{\text{н.п.}}} \cdot \frac{M p_{\text{н.п.}}}{RT}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{p_0 h_0 M}{RT \rho_{\text{в}}}$$

Выразим отсюда начальную высоту:

$$h_0 = \frac{RT \rho_{\text{в}} h_{\text{в}}}{M p_0} = \frac{8{,}31 \cdot 373 \cdot 1000 \cdot 0{,}0054}{12465 \cdot 0{,}018} = 74{,}6 \text{ м}$$

Ответ: $h_0 = 74{,}6$м

Задача 9. Груз массой 4 г, лежащий на гладком столе, закреплен на конце горизонтально расположенной пружины, прикрепленной к стене. В грузик стреляют маленькой пулькой массой 4 г, вследствие чего она застревает в нем, и вся эта система начинает совершать колебания. В тот момент, когда грузик с первой пулей проходят положение равновесия, в них стреляют еще одной такой же пулькой с той же скоростью, которая также застревает. Скорости второй пули и грузика с пулей в момент попадания сонаправлены. Как будут соотносится скорости грузика с пулями после второго выстрела и первого в положениях, когда их смещения равны трети соответствующих амплитуд колебаний.

Дано:

$m = 4$ г

$M = 4$ г

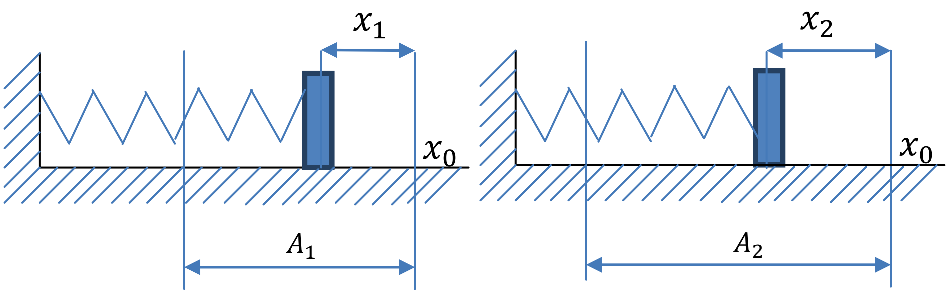
$x_1 = \frac{1}{3}A_1$

$x_2 = \frac{1}{3}A_2$

$\frac{v_2}{v_1} = ?$

Решение:

При попадании пуля застревает в грузике, и система начинает совершать колебания по гармоническому закону. Запишем уравнения для смещения и скорости в искомых точках.



Для описания гармонического колебания используем функцию sin(), *так как в начальном положении смещение точки равно 0.*

$$\begin{cases} x_1 = A_1\sin(\omega_1 t_1) \\ v_1 = A_1\omega_1 cos(\omega_1 t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A_2\sin(\omega_2 t_2) \\ v_2 = A_2\omega_2 cos(\omega_2 t_2) \end{cases}$$

Выразим через основное тригонометрическое тождество:

$$cos(\omega_1 t_1) = \sqrt{1-\sin^2(\omega_1 t_1)}, \text{ где } \sin(\omega_1 t_1) = \frac{x_1}{A_1}$$

$$cos(\omega_2 t_2) = \sqrt{1-\sin^2(\omega_2 t_2)}, \text{ где } \sin(\omega_2 t_2) = \frac{x_2}{A_2}$$

Подставим все в уравнение скоростей:

$$v_1 = A_1\omega_1 cos(\omega_1 t_1) = A_1\omega_1\sqrt{1-\sin^2(\omega_1 t_1)} = A_1\omega_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{A_1^2}}$$

$$= \omega_1\sqrt{A_1^2 - x_1^2}$$

Аналогично для второго:

$$v_2 = \omega_2\sqrt{A_2^2 - x_2^2}$$

С учетом $x_1 = \frac{1}{3}A_1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}A_2$ *получим*

$$v_1 = \omega_1 \sqrt{A_1^2 - \frac{A_1^2}{9}} = \omega_1 \sqrt{\frac{8A_1^2}{9}} = \omega_1 A_1 \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$v_2 = \omega_2 A_2 \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Отношение скоростей в искомых точках на трети амплитуд:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 A_2 \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\omega_1 A_1 \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\omega_2 A_2}{\omega_1 A_1}$$

Из уравнения видим, что скорости в одинаковых фазах колебаний на всем пути будут соотносится одинаково, и соответствовать отношению амплитудных значений скоростей колебаний.

Для нахождения скорости колебания после первого выстрела воспользуемся ЗСИ:

$$mv_0 = (M+m)v_1$$

Откуда:

$$v_1 = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

Аналогично воспользуемся ЗСИ для системы после второго выстрела. Так как скорость пули и движущейся системы сонаправлены, получим:

$$mv_0 + (M+m)v_1 = (M+2m)v_2$$

Откуда:

$$v_2 = \frac{mv_0 + (M+m)v_1}{(M+2m)}$$

Заменив $(M+m)v_1 = mv_0$ *получим:*

$$v_2 = \frac{2mv_0}{(M+2m)}$$

Найдем отношение амплитудных значений скоростей колебаний, которое равно отношению искомых в задаче скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{2mv_0}{(M+2m)}}{\frac{mv_0}{(M+m)}} = \frac{2(M+m)}{(M+2m)} = \frac{2(4+4)\cdot 10^{-3}}{(4+2\cdot 4)\cdot 10^{-3}} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}$

Задача 10. В плоском конденсаторе с квадратными пластинами расположены две пластины, такой же площади, как и сами пластины конденсатора. Длина стороны пластины конденсатора составляет 60 см. Пластины в конденсатор вставлены так, что каждая из них плотно прилегает к своей пластине конденсатора, и друг к другу, к тому же они имеют одинаковую толщину. Каждую из пластин сдвигают внутри конденсатора в горизонтальном направлении в разные стороны на равное расстояние, так, что они частично выходят за его пределы, при этом емкость конденсатора становится равно 0,62 от начальной. Чему равна площадь перекрытия соприкасающейся части пластин друг с другом после сдвига? Диэлектрическая проницаемость первой пластины - два, а второй – пять. Итоговая схема будет представлять собой систему из 3 параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из двух последовательно соединенных конденсаторов. (15 баллов)

Дано:

$\varepsilon_1 = 2$

$\varepsilon_2 = 5$

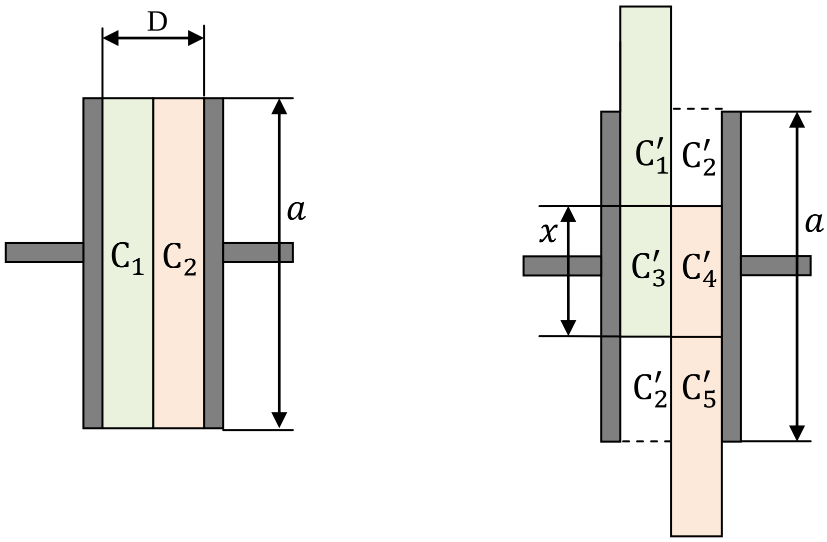
$a = 60$ см

$C' = 0{,}62C_0$

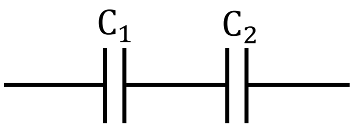
$d_1 = d_2 = \dfrac{D}{2}$

$S = ?$

Решение:



1)Определим электроемкость конденсатора в первом случае. Так как пластины в конденсаторе расположены друг за другом, такую систему можно представить, как два последовательно соединенных конденсатора.



Запишем емкость такой системы:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$$

С учетом того, что емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ *распишем емкости* C_1 *и* C_2 *и подставим в выражение* *выше:*

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}$$

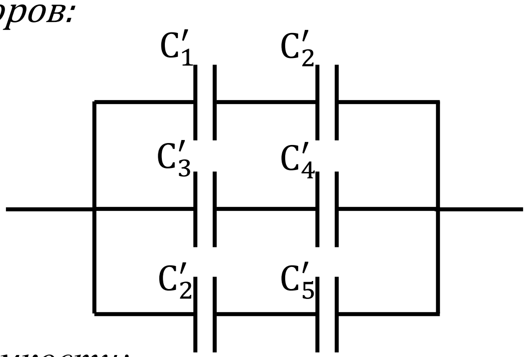
$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d_2}}$$

С учетом того, что $d_1 = d_2 = d$*:*

$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d} \cdot \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d}}{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0^2 a^4}{d^2} \frac{d}{(\varepsilon_1 \varepsilon_0 a^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2)}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

2) Теперь разберем вторую систему после сдвига пластин. Система можно представить как 3 параллельных пары последовательно соединенных конденсаторов:



Распишем емкости:

$$\mathrm{C}_1' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad \mathrm{C}_2' = \frac{\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad \mathrm{C}_3' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a x}{d}$$

$$\mathrm{C}_4' = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a x}{d} \quad \mathrm{C}_5' = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d}$$

Общая емкость системы:

$$C' = \frac{\mathrm{C}_1'\,\mathrm{C}_2'}{\mathrm{C}_1' + \mathrm{C}_2'} + \frac{\mathrm{C}_3'\,\mathrm{C}_4'}{\mathrm{C}_3' + \mathrm{C}_4'} + \frac{\mathrm{C}_2'\,\mathrm{C}_5'}{\mathrm{C}_2' + \mathrm{C}_5'}$$

По аналогии с расчетом первой системы:

$$\frac{\mathrm{C}_1'\,\mathrm{C}_2'}{\mathrm{C}_1' + \mathrm{C}_2'} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1 + 1)}$$

$$\frac{\mathrm{C}_3'\,\mathrm{C}_4'}{\mathrm{C}_3' + \mathrm{C}_4'} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 a x}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{\mathrm{C}_2'\,\mathrm{C}_5'}{\mathrm{C}_2' + \mathrm{C}_5'} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2 + 1)}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}$$

Приравняем емкости конденсаторов до и после сдвига:

$$C' = 0{,}62C_0$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)} = 0{,}62\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Выразим отсюда значение x:

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_2+1)} = 0{,}62\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}62\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}62\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}$$

$$x = \frac{\frac{0{,}62\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2}{2(\varepsilon_2+1)}}$$

$$= \frac{\frac{0{,}62\cdot 2\cdot 5\cdot 0{,}6}{(2+5)} - \frac{2\cdot 0{,}6}{2(2+1)} - \frac{5\cdot 0{,}6}{2(5+1)}}{\frac{2\cdot 5}{(2+5)} - \frac{2}{2(2+1)} - \frac{5}{2(5+1)}}$$

$$= \frac{\frac{0{,}62\cdot 6}{7} - \frac{1{,}2}{6} - \frac{3}{12}}{\frac{10}{7} - \frac{2}{6} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{3{,}72}{7} - \frac{5{,}4}{12}}{\frac{10}{7} - \frac{9}{12}} = \frac{\frac{44{,}64}{84} - \frac{37{,}8}{84}}{\frac{120}{84} - \frac{63}{84}} = \frac{684}{100\cdot 57}$$

$$= 0{,}12 \text{ м}$$

Площадь перекрытия:

$$S = ax = 0{,}6\cdot 0{,}12 = 0{,}072 \text{ м}^2$$

Ответ: $S = 0{,}072$ м^2

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ВАРИАНТ 2-4

Задача 1. (5 баллов) Найти значение $n \geq 2$, при котором величина $\dfrac{\log_9 2 \cdot \log_9 3 \cdot \ldots \cdot \log_9 n}{9^n}$ принимает наименьшее значение.

Решение:

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную рекуррентно:

$$x_n = \frac{\log_9 2 \cdot \log_9 3 \cdot \ldots \cdot \log_9 (n-1) \cdot \log_9 n}{9^n} = \frac{\log_9 n}{9} \cdot x_{n-1},\ x_1 = 1.$$

При значении n, для которого выполняется условие $\dfrac{\log_9 n}{9} < 1$, последовательность является убывающей, а при условии $\dfrac{\log_9 n}{9} > 1$ - возрастающей:

$$\frac{\log_9 n}{9} < 1 \Leftrightarrow \log_9 n < 9 \Leftrightarrow \log_9 n < \log_9 9^9 \Leftrightarrow n < 9^9.$$

При значении n, для которого выполняется условие $\dfrac{\log_9 n}{9} = 1$, два соседних члена с номерами $n-1$и nравны между собой:

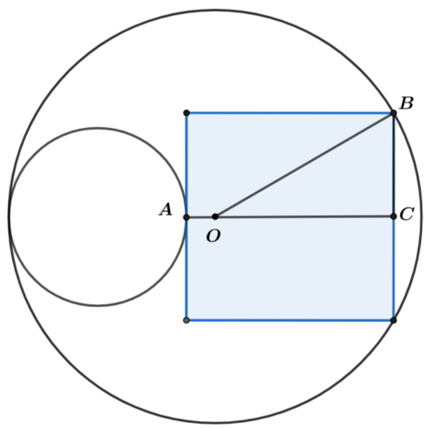
$$\frac{\log_9 n}{9} = 1 \Leftrightarrow \log_9 n = 9 \Leftrightarrow \log_9 n = \log_9 9^9 \Leftrightarrow n = 9^9.$$

Значит, данная величина принимает своё наименьшее значение при $n = 9^9 - 1$ и $n = 9^9$.

Ответ: $n = 9^9 - 1$ и $n = 9^9$.

Задача 2. (8 баллов) В трубе радиуса $R = 25$ед. необходимо разместить электрический провод диаметра $d = 15$ ед. и кабель-канал квадратного сечения так, чтобы площадь этого сечения была максимальной. Найти площадь сечения кабель-канала.

Решение:



Обозначим сторону квадрата за $2x$, тогда $OC = 2x - OA = 2x - (R-d) = 2x - (25-15) = 2x - 10$. Из прямоугольного треугольника ΔOBC находим:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = (2x-10)^2 + x^2 = 4x^2 - 40x + 100 + x^2 = 5x^2 - 40x + 100 \Rightarrow$

$5x^2 - 40x + 100 = 625 \Rightarrow$

$5x^2 - 40x - 525 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{20 + \sqrt{400 + 2625}}{5} = \dfrac{20 + \sqrt{3025}}{5} = \dfrac{20+55}{5} = \dfrac{75}{5} = 15$, тогда искомая площадь равна $(30)^2 = 900$ кв.ед.

Ответ: 900 кв. ед.

Задача 3. (10 баллов) На окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ и центром в начале координат найти все точки, координаты которых удовлетворяют соотношению:

$$\frac{y\left(\sqrt{2}x^2 - 1\right)}{x\left(\sqrt{2}y^2 - 1\right)} = -1.$$

Решение:

ОДЗ: $x\left(\sqrt{2}y^2 - 1\right) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \neq 0 \\ \sqrt{2}y^2 - 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \neq 0 \\ y^2 \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \neq 0 \\ y \neq \pm\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Пусть $x = \sqrt{2}\cos\alpha$, $y = \sqrt{2}\sin\alpha$, $0 \le \alpha \le 2\pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\sin\alpha\left(\sqrt{2}\cdot 2\cos^2\alpha - 1\right) = -\sqrt{2}\cos\alpha\left(\sqrt{2}\cdot 2\sin^2\alpha - 1\right),$$

$$\sin\alpha\left(2\sqrt{2}\cos^2\alpha - 1\right) + \cos\alpha\left(2\sqrt{2}\sin^2\alpha - 1\right) = 0,$$

$$\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha - \cos\alpha + \sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin\alpha = 0,$$

$$\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha + \cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha) = 0,$$

$\left(\sqrt{2}\sin 2\alpha - 1\right)\cdot(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$, тогда $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow tg\alpha = -1$.

Решая полученные уравнения и учитывая , что $0 \le \alpha \le 2\pi$, находим:

$\alpha_1 = \dfrac{\pi}{8}, \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{8}, \alpha_3 = \dfrac{9\pi}{8}, \alpha_4 = \dfrac{11\pi}{8}, \alpha_5 = \dfrac{3\pi}{4}, \alpha_6 = \dfrac{7\pi}{4}$ и получим 6 пар решений:

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right), \left(\sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

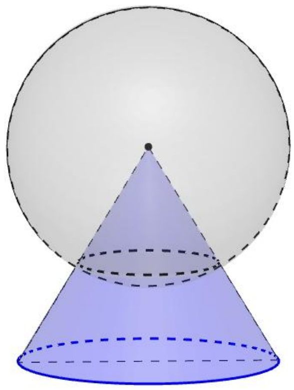
$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{8}\right), (1,-1), (-1,1)$$

Ответ: $\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\right), \left(\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{8}\right), \left(\sqrt{2}\cos\dfrac{9\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\dfrac{9\pi}{8}\right),$

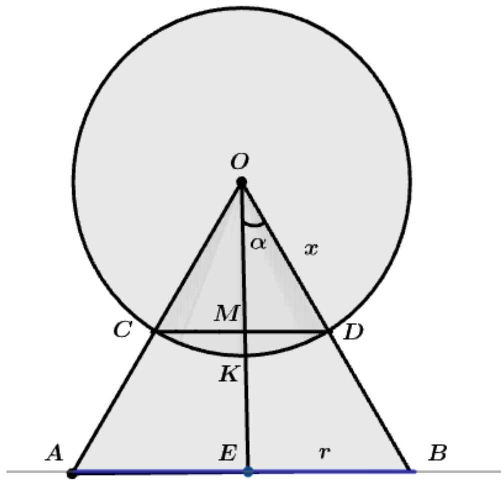
$\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{11\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\dfrac{11\pi}{8}\right), (1,-1), (-1,1)$

Задача 4. (12 баллов) Ювелир получил заказ на украшение: в центр жемчужины, имеющей форму шара поместить вершину конуса из серебра так, чтобы объём конуса был разделён жемчужиной пополам. Известны радиус основания конуса $r = 2$ и угол между осью конуса и его образующей

$\alpha : \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Найти площадь сечения жемчужины и конуса.



Решение:



Обозначим радиус жемчжины x, объём конуса V_1, объём шарового сектора V_2. Тогда $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot OE = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot KM = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (OK - OM) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (x - x \cdot \cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - \cos\alpha)$$

По условию $V_2 = \dfrac{1}{2}V_1$, значит $\dfrac{2}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - \cos\alpha) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, откуда

$$x = r \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha(1-\cos\alpha)}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{\frac{4}{5}}{4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}}} = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{45}}{3},$$

тогда радиус сечения $MD = x \cdot \sin\alpha = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{45}}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2\sqrt[3]{45}}{5}$,

площадь искомого сечения $S = \pi \cdot \left(\dfrac{2\sqrt[3]{45}}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25} \cdot \sqrt[3]{2025}\pi = \dfrac{12\sqrt[3]{75}}{25}\pi$

Ответ: $S = \dfrac{12\sqrt[3]{75}}{25}\pi$

Задача 5. (15 баллов) На соревнованиях по спортивному ориентированию спортсмену предлагается пройти два маршрута, случайно выбранных из 28 возможных. Вероятность прохождения заранее изученного маршрута равна 1, а неизученного - $\frac{1}{3}$. Найти минимальное количество маршрутов, которые необходимо изучить спортсмену заранее, чтобы с вероятностью не менее $\frac{5}{7}$ пройти оба маршрута.

Решение:

Пусть m - число маршрутов, которые спортсмен изучил заранее.

Вероятность того, что на соревнованиях спортсмену выпали два изученных маршрута, равна $\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен точно знает, как пройти 1 из двух маршрутов, равна $\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{27}\cdot 1\right)$;

вероятность того, что спортсмен проходит 2 маршрута, не изучая их заранее равна $\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Тогда вероятность пройти 2 маршрута равна

$$\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{m-1}{27}\cdot 1\right)+\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{28-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{28}\cdot 1\right)+\left(\frac{28-m}{28}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{27-m}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{m(m-1)}{28\cdot 27}+\frac{2m(28-m)}{28\cdot 27\cdot 3}+\frac{(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{9m(m-1)+6m(28-m)+(28-m)\cdot(27-m)}{28\cdot 27\cdot 9}=$$

$$=\frac{9m^2-9m-6m^2+168m+756-27m-28m+m^2}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{4m^2+104m+756}{28\cdot 27\cdot 9}=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}$$

$$P=\frac{m^2+26m+189}{7\cdot 27\cdot 9}\geq\frac{5}{7}\Leftrightarrow\frac{m^2+26m+189}{9\cdot 27}\geq 5\Leftrightarrow m^2+26m+189-5\cdot 27\cdot 9\geq 0\Leftrightarrow m^2+26m-1026\geq 0$$

$m^2+26m-1026=0$ при $m=-13+\sqrt{13^2+1026}=-13+\sqrt{1195}>21$

Значит заранее нужно изучить минимум 22 маршрута.

Ответ: 22

Задача 6. В коридоре зеркало висит таким образом, что человек, смотрящийся в него, видит себя в нем ровно до макушки, по верхнему краю, а по нижнему краю он не видит ног. Тогда им было решено, что надо поменять зеркало на такое, в котором он сможет увидеть себя в полный рост, для чего подошло другое зеркало, у которого высота в 3 раза больше начального. Найдите какого роста был человек, если высота первого зеркала составляет 20 см? (5 баллов)

Дано:

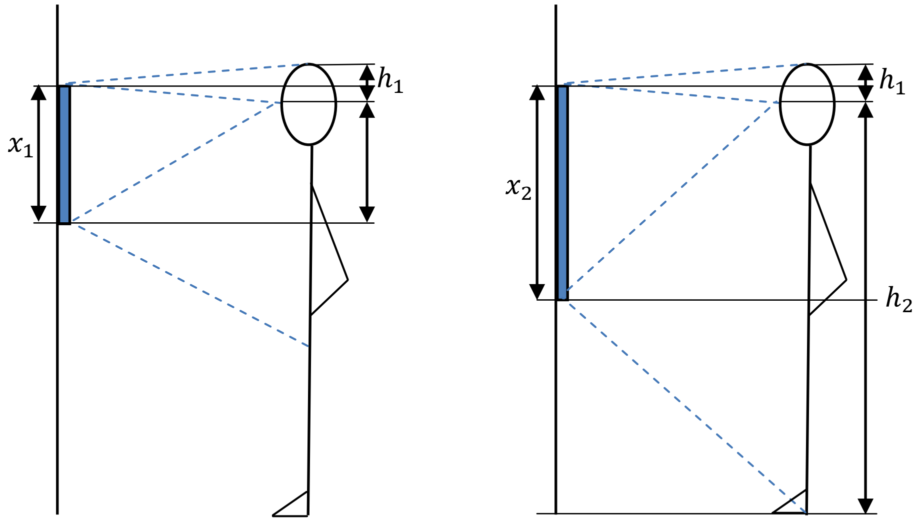
$x_1 = 30$ см

$3x_1 = x_2$

$h = ?$

Решение:

Сделаем рисунок, как будут выглядеть оба случая с зеркалами:



Из второго рисунка видно, что:

$$x_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}$$

$$h_1 + h_2 = h$$

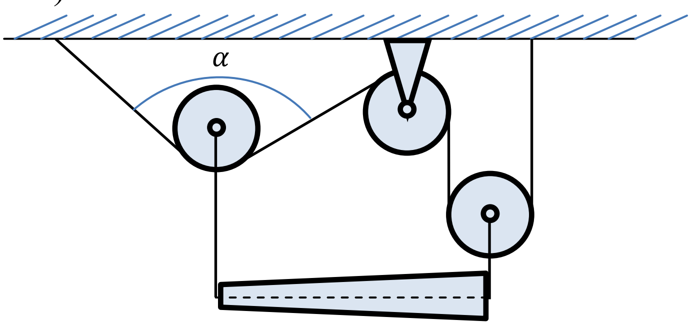
Отсюда получаем:

$$x_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{h}{2}$$

$$h = 2x_2 = 6x_1 = 6 \cdot 0{,}3 = 1{,}8 \text{ м}$$

Ответ: $h = 1{,}8$ м $= 180$ см

Задача 7. Длинный усеченный конус подвешен центрами своих концов к нитям, через систему легких блоков, как показано на рисунке. При этом его ось располагается горизонтально и находится в равновесии. Найдите какую часть от всей длины стержня составляет расстояние от его левого края до центра тяжести, если угол $\boldsymbol{\alpha}$, между нитями на левом блоке равен 120°. (7 баллов)



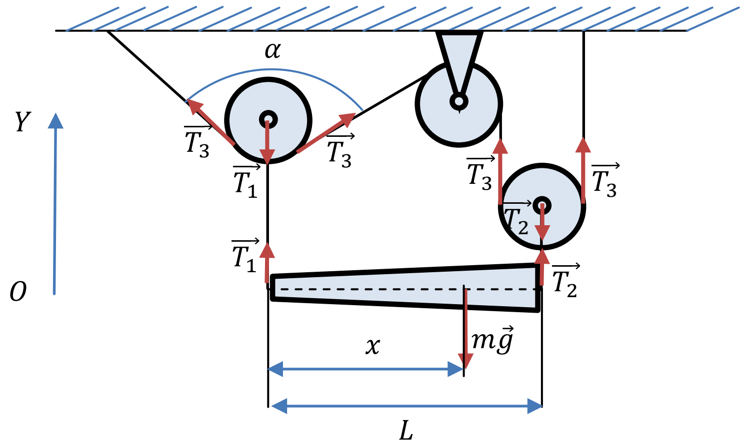
Дано:

$\alpha = 120°$

$\dfrac{x}{L} = ?$

Решение:

Укажем на схеме силы, действующие в системе, предполагая, что центр тяжести находится правее центра конуса:



Так как объект находится в равновесии можем записать I закон Ньютона для левого подвижного блока:

$$\vec{T_1} + \vec{T_3} + \vec{T_3} = 0$$

$$OY\!: -T_1 + 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Сделаем аналогично для правого подвижного блока:

$$\vec{T_2} + \vec{T_3} + \vec{T_3} = 0$$

$$OY\!: -T_2 + 2T_3 = 0$$

$$T_2 = 2T_3$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T_1 = 2T_3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ T_2 = 2T_3 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$T_1 = T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно центра стержня (выберем положительное направление по часовой стрелке):

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1} + \overrightarrow{\mathrm{M}_2} = 0$$

$$\mathrm{M}_1 = T_1 x$$

$$\mathrm{M}_2 = T_2(L - x)$$

$$T_1 x - T_2(L - x) = 0$$

Подставим в это уравнение значение $T_1 = T_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$*:*

$$T_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) x - T_2(L - x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) x = L - x$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L - x}{x} = \frac{L}{x} - 1$$

$$\frac{L}{x} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{x}{L} = \frac{2}{3}$

Задача 8. В закрытом сосуде со свободно движущимся поршнем находится водяной пар (другие газы и жидкости там отсутствуют) под давлением **24930**Па и имеет температуру 100°С. Поршень медленно опускается, тем самым уменьшая объем пара внутри сосуда, до того момента, пока не упрется в жидкость. Какова начальная высота, на которой находился поршень? Высота жидкости в сосуде после остановки поршня 10,8 мм. Температура воды и водяного пара поддерживается постоянной. (10 баллов)

Дано:

$T = 100°\text{C}$

$p_0 = 24930\text{Па}$

$\rho_{\text{в}} = 1000\text{кг/м}^3$

$p_{\text{н.п.}} = 10^5$ Па

$h_{\text{в}} = 10{,}8\text{мм} = 0{,}0108\text{м}$

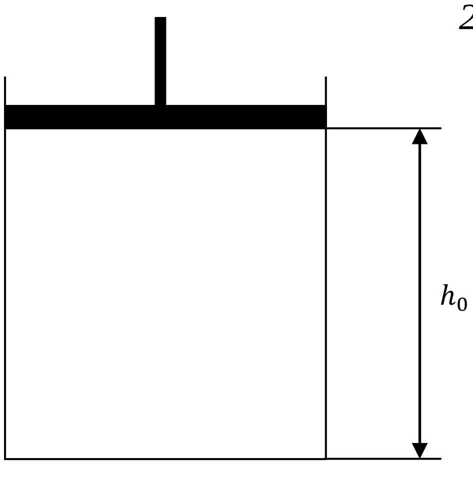
$M_{H_2O} = 18\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$

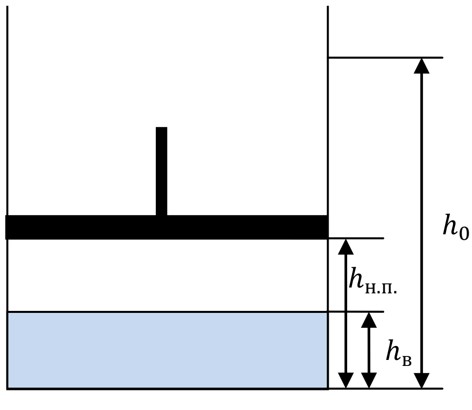
$h_0 = ?$

Решение:

Рассмотрим этапы движения поршня:

1) *2)*





При медленном изотермическом перемещении поршня будет справедлив закон Бойля-Мариотта (pv=const). Давление будет подниматься до достижения давления насыщенного пара для этой температуры, которое как мы знаем, при температуре кипения воды в 100°С равно атмосферному $p_{\text{н.п.}} = 10^5$ Па. *Далее (схема 2)* *при дальнейшем движении поршня давление повышаться уже не будет, а пар будет конденсироваться.*

$$p_0 v_0 = p_{\text{н.п.}} v_{\text{н.п.}}$$
$$p_0 h_0 S = p_{\text{н.п.}} h_{\text{н.п.}} S$$
$$h_{\text{н.п.}} = \frac{p_0 h_0}{p_{\text{н.п.}}}$$

Поршень будет двигаться, пока весь пар не перейдет в состояние жидкости, откуда получаем, что масса насыщенного пара будет равна массе сконденсировавшейся воды:

$$m_{\text{н.п.}} = m_{\text{в}}$$
$$v_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}} = v_{\text{в}} \rho_{\text{в}}$$
$$h_{\text{н.п.}} S \rho_{\text{н.п.}} = h_{\text{в}} S \rho_{\text{в}}$$

Выразим высоту получившейся воды:

$$h_{\text{в}} = \frac{h_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{\rho_{\text{в}}}$$

Плотность пара можем посчитать из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$p_{\text{н.п.}} v_{\text{н.п.}} = \frac{m_{\text{н.п.}}}{M} RT$$

Отсюда получаем:

$$p_{\text{н.п.}} v_{\text{н.п.}} = \frac{v_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{M} RT$$
$$\rho_{\text{н.п.}} = \frac{M p_{\text{н.п.}}}{RT}$$

Подставим это значение в формулу высоты воды:

$$h_{\text{в}} = \frac{h_{\text{н.п.}} \rho_{\text{н.п.}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\frac{p_0 h_0}{p_{\text{н.п.}}} \cdot \frac{M p_{\text{н.п.}}}{RT}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{p_0 h_0 M}{RT \rho_{\text{в}}}$$

Выразим отсюда начальную высоту:

$$h_0 = \frac{RT \rho_{\text{в}} h_{\text{в}}}{M p_0} = \frac{8{,}31 \cdot 373 \cdot 1000 \cdot 0{,}0108}{24930 \cdot 0{,}018} = 74{,}6 \text{ м}$$

Ответ: $h_0 = 74{,}6$ м

Задача 9. На гладком столе располагается система, состоящая из груза массой 4 г, прикрепленного к горизонтально расположенной закрепленной к стене пружине. В грузик выстреливают небольшим шариком массой 2 г, вследствие чего он застревает в грузике, и эта система начинает совершать колебания. В момент, когда грузик с пулей двигается в противоположную сторону от места первоначального выстрела и проходит положение равновесия, в него стреляют еще одним таким же шариком с той же скоростью, который также застревает. Найдите соотношение скорости грузика с шариком после первого выстрела к скорости после второго в положениях, когда их смещения равны половине соответствующих амплитуд колебаний.

Дано:

$m = 2$ г

$M = 4$ г

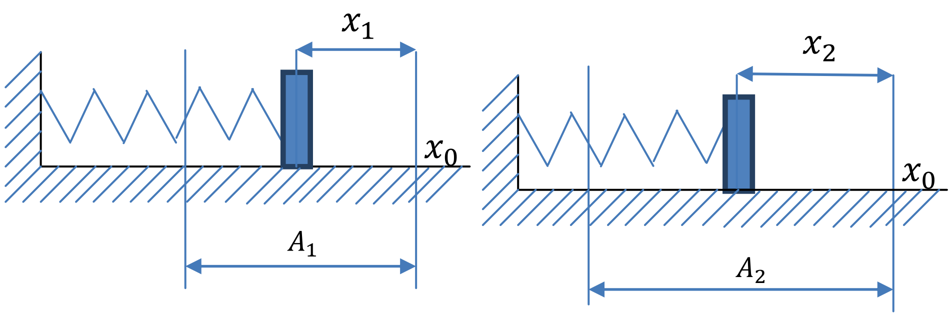
$x_1 = \frac{1}{2} A_1$

$x_2 = \frac{1}{2} A_2$

$\frac{v_1}{v_2} = ?$

Решение:

При попадании пуля застревает в грузике, и система начинает совершать колебания по гармоническому закону. Запишем уравнения для смещения и скорости в искомых точках.



Для описания гармонического колебания используем функцию sin(), так как в начальном положении смещение точки равно 0.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t_1) \\ v_1 = A_1 \omega_1 cos(\omega_1 t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t_2) \\ v_2 = A_2 \omega_2 cos(\omega_2 t_2) \end{cases}$$

Выразим через основное тригонометрическое тождество:

$cos(\omega_1 t_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)}$, *где* $\sin(\omega_1 t_1) = \frac{x_1}{A_1}$

$cos(\omega_2 t_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_2 t_2)}$, *где* $\sin(\omega_2 t_2) = \frac{x_2}{A_2}$

Подставим все в уравнение скоростей:

$$v_1 = A_1 \omega_1 cos(\omega_1 t_1) = A_1 \omega_1 \sqrt{1 - \sin^2(\omega_1 t_1)}$$

$$= A_1 \omega_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A_1^2}} = \omega_1 \sqrt{A_1^2 - x_1^2}$$

Аналогично для второго:

$$v_2 = \omega_2 \sqrt{A_2^2 - x_2^2}$$

С учетом $x_1 = \frac{1}{2}A_1$ *и* $x_2 = \frac{1}{2}A_2$ *получим*

$$v_1 = \omega_1\sqrt{A_1^2 - \frac{A_1^2}{4}} = \omega_1\sqrt{\frac{3A_1^2}{4}} = \omega_1 A_1\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_2 = \omega_2 A_2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отношение скоростей в искомых точках на середине амплитуд:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1 A_1\frac{\sqrt{3}}{2}}{\omega_2 A_2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2}$$

Из уравнения видим, что скорости в одинаковых фазах колебаний на всем пути будут соотносится одинаково, и соответствовать отношению амплитудных значений скоростей колебаний.

Для нахождения скорости колебания после первого выстрела воспользуемся ЗСИ:

$$mv_0 = (M+m)v_1$$

Откуда:

$$v_1 = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

Аналогично воспользуемся ЗСИ для системы после второго выстрела. Так как скорость пули и движущейся системы сонаправлены, получим:

$$mv_0 + (M+m)v_1 = (M+2m)v_2$$

Откуда:

$$v_2 = \frac{mv_0 + (M+m)v_1}{(M+2m)}$$

Заменив $(M+m)v_1 = mv_0$ *получим:*

$$v_2 = \frac{2mv_0}{(M+2m)}$$

Найдем отношение амплитудных значений скоростей колебаний, которое равно отношению искомых в задаче скоростей:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{mv_0}{(M+m)}}{\frac{2mv_0}{(M+2m)}} = \frac{(M+2m)}{2(M+m)} = \frac{(4+2\cdot 2)\cdot 10^{-3}}{2(4+2)\cdot 10^{-3}} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$

Задача 10. В плоском конденсаторе с квадратными пластинами расположены две диэлектрические пластины, такой же площади, как и сами пластины конденсатора. Пластины в конденсатор вставлены так, что каждая из них плотно прилегает к своей стороне конденсатора, и друг к другу, и имеют одинаковую толщину. Обе пластины сдвигают внутри конденсатора в горизонтальном направлении в разные на равное расстояние, так, что они частично выходят за его пределы, при этом емкость конденсатора становится равно 0,81 от начальной. Чему равна ширина перекрытия соприкасающейся части пластин друг с другом после сдвига? Диэлектрическая проницаемость первой пластины - 2, а второй – 5, а длина стороны пластины конденсатора составляет 60 см. Итоговая схема будет представлять собой систему из 3 параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из двух последовательно соединенных конденсаторов. (15 баллов)

Дано:

$\varepsilon_1 = 2$

$\varepsilon_2 = 5$

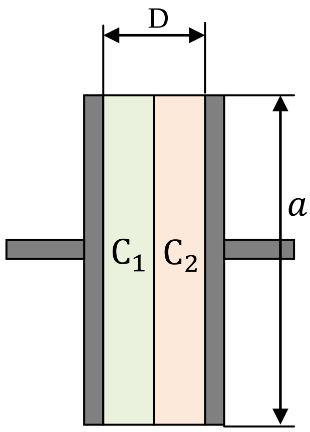
$a = 60$ см

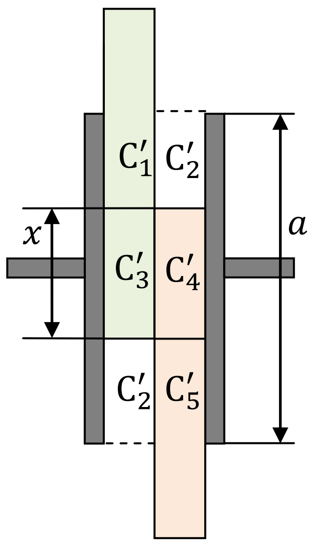
$C' = 0{,}81C_0$

$d_1 = d_2 = \frac{D}{2}$

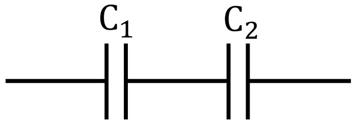
$x = ?$

Решение:





1)Определим электроемкость конденсатора в первом случае. Так как пластины в конденсаторе расположены друг за другом, такую систему можно представить, как два последовательно соединенных конденсатора.



Запишем емкость такой системы:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

С учетом того, что емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ *распишем емкости* C_1 *и* C_2 *и подставим в выражение выше:*

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}$$

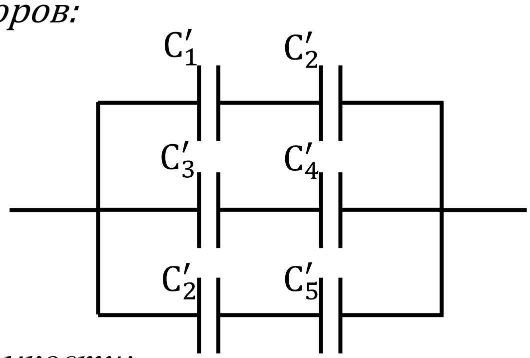
$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d_1} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d_2}}$$

С учетом того, что $d_1 = d_2 = d$*:*

$$C_0 = \frac{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d} \cdot \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0^2 a^4}{d^2}\frac{d}{(\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2 + \varepsilon_2\varepsilon_0 a^2)}$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

2) Теперь разберем вторую систему после сдвига пластин. Система можно представить как 3 параллельных пары последовательно соединенных конденсаторов:



Распишем емкости:

$$\mathrm{C}_1' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad \mathrm{C}_2' = \frac{\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d} \quad \mathrm{C}_3' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 ax}{d}$$

$$\mathrm{C}_4' = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d} \quad \mathrm{C}_5' = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d}$$

Общая емкость системы:

$$C' = \frac{\mathrm{C}_1'\,\mathrm{C}_2'}{\mathrm{C}_1' + \mathrm{C}_2'} + \frac{\mathrm{C}_3'\,\mathrm{C}_4'}{\mathrm{C}_3' + \mathrm{C}_4'} + \frac{\mathrm{C}_2'\,\mathrm{C}_5'}{\mathrm{C}_2' + \mathrm{C}_5'}$$

По аналогии с расчетом первой системы:

$$\frac{\mathrm{C}_1'\,\mathrm{C}_2'}{\mathrm{C}_1' + \mathrm{C}_2'} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1 + 1)}$$

$$\frac{C_3'\,C_4'}{C_3' + C_4'} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{C_2'\,C_5'}{C_2' + C_5'} = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)}$$

Приравняем емкости конденсаторов до и после сдвига:

$$C' = 0{,}81C_0$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a\left(\frac{a-x}{2}\right)}{d(\varepsilon_2+1)} = 0{,}81\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Выразим отсюда значение x:

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{2d(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 ax}{2d(\varepsilon_2+1)} = 0{,}81\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 a^2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}81\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 x}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 x}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 x}{2(\varepsilon_2+1)} = \frac{0{,}81\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}$$

$$x = \frac{\frac{0{,}81\varepsilon_1\varepsilon_2 a}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1 a}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2 a}{2(\varepsilon_2+1)}}{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_1+1)} - \frac{\varepsilon_2}{2(\varepsilon_2+1)}} = \frac{\frac{0{,}81\cdot 2\cdot 5\cdot 0{,}6}{(2+5)} - \frac{2\cdot 0{,}6}{2(2+1)} - \frac{5\cdot 0{,}6}{2(5+1)}}{\frac{2\cdot 5}{(2+5)} - \frac{2}{2(2+1)} - \frac{5}{2(5+1)}}$$

$$= \frac{\frac{0{,}81\cdot 6}{7} - \frac{1{,}2}{6} - \frac{3}{12}}{\frac{10}{7} - \frac{2}{6} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{4{,}86}{7} - \frac{5{,}4}{12}}{\frac{10}{7} - \frac{9}{12}} = \frac{\frac{58{,}32}{84} - \frac{37{,}8}{84}}{\frac{120}{84} - \frac{63}{84}}$$

$$= \frac{2052}{100\cdot 57} = 0{,}36\text{м}$$

Ответ: $x = 0{,}36\text{ м} = 36\text{см}$