9 класс

Вариант 1-1

Задача 1 (5 баллов). Последовательность $\{x_n\}$ задана первыми двумя членами $x_1 = 2, x_2 = 3$ и условием $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}}{x_k}$ $(k = 1,2,3,...)$. Найдите x_{2024}.

Решение: Выпишем первые члены этой последовательности: 2,3,3/2, 1/2, 1/3, 2/3, 2, 3…

Так как два соседних члена x_7 и x_8 такие же, как x_1 и x_2, а каждый следующий член вычисляется по двум предыдущим, то последовательность будет повторяться с периодом 6. Так как 2024=6·337+2, то $x_{2024} = 3$

Ответ: 3.

Задача 2 (7 баллов). Про натуральные числа x и y известно, что десятичная запись числа $x^2 + xy + y^2$ оканчивается нулем. Доказать, что это число кратно 4.

Решение. Разность $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ делится на 10. Поэтому у чисел x^3 и y^3 одинаковые последние цифры. Значит, и у чисел х и у последние цифры одинаковы. Следовательно, одинаковы последние цифры чисел x^2, xy и y^2, и последняя цифра числа такая же, как у $3x^2$. Поэтому x (а вместе с ним и y) делится на 10. Значит, $x^2 + xy + y^2$ делится на 100. Число, которое оканчивается двумя нулями делится на 4.

Задача 3 (10 баллов). В лаборатории проводится серия анализов над образцом нефти, объем которого выражается целым числом литров. После каждого анализа объем образца уменьшается на половину и еще пол-литра, оставшаяся нефть передается на следующий анализ. Всего объема нефти в образце хватило на серию из семи анализов. Сколько литров нефти было в образце первоначально?

Решение. Пусть в серии анализов участвует весь объем нефти в образце и еще один «запасной» литр нефти. Если на некоторый анализ передали m литров нефти и один «запасной», то на этом анализе останется $\frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2}$ - ровно половина нефти. Поэтому после каждого анализа число литров нефти уменьшается ровно вдвое. После серии из семи анализов объем образца уменьшается в $2^7 = 128$ раз, а остается один «запасной». Значит, вначале было 128 литров нефти, из них 127 л – первоначальный объем исследуемого образца.

Ответ: 127.

Задача 4 (13 баллов). Иван Петрович в 9 часов утра поехал из дома на дачу на автомобиле. В этот же момент с дачи домой по той же дороге возвращаются два его сына: Петр, который поехал на автобусе, и Василий – на мотоцикле, причем скорость мотоцикла в два раза больше скорости автобуса. Иван Петрович прибывает на дачу в 14 ч 50 мин, а встречает Василия не ранее 11 ч 30 мин. Во сколько Петр приедет домой, если известно, что между моментами встречи Ивана Петровича с Василием и встречей Ивана Петровича с автобусом, на котором ехал Петр, прошло не менее часа?

Решение. Обозначим расстояние от дома до дачи s, а также скорости участников задачи: $v_И$ - скорость автомобиля Ивана Петровича, $v_П$ - скорость автобуса, на котором едет Петр. Тогда скорость мотоцикла $v_В$ будет равна $2v_П$.

Составим уравнения и неравенства по условиям задачи:

1. Иван Петрович прибывает на дачу в 14 ч 50 мин, то есть через 5 ч 50 минут:

$$\frac{s}{v_И} = \frac{36}{5}.$$

2. Иван Петрович встречает Василия не ранее 11 ч 30 мин, то есть не ранее, чем через 2 ч 30 минут:

$$\frac{s}{v_И + 2v_П} \geq \frac{5}{2}.$$

3. Между моментами встречи Ивана Петровича с Василием и встречей Ивана Петровича с автобусом, на котором ехал Петр, прошло не менее часа:

$$\frac{s}{v_И + v_П} - \frac{s}{v_И + 2v_П} \geq 1.$$

Преобразуем неравенства из пп.2,3 следующим образом:

$$\frac{\frac{s}{v_И}}{1 + 2\frac{v_П}{v_И}} \geq \frac{5}{2}, \quad \frac{\frac{s}{v_И}}{1 + \frac{v_П}{v_И}} - \frac{\frac{s}{v_И}}{1 + 2\frac{v_П}{v_И}} \geq 1.$$

Подставляя в эти неравенства значение отношения $\frac{s}{v_И}$ из уравнения (п.1) и выполняя преобразования, получим систему неравенств:

$$\frac{v_П}{v_И} \leq \frac{2}{3}, 12\left(\frac{v_П}{v_И}\right)^2 - 17\left(\frac{v_П}{v_И}\right) + 6 \leq 0,$$

или

$$\frac{v_П}{v_И} \le \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \le \frac{v_П}{v_И} \le \frac{3}{4}.$$

Для того, чтобы такая система неравенств была совместна, необходимо выполнение равенства $\frac{v_П}{v_И} = \frac{2}{3}$. Это равенство дает нам недостающее уравнение. В задаче требуется найти время прибытия Петра домой, то есть величину $\frac{s}{v_П}$. Имеем: $\frac{s}{v_П} = \frac{s}{v_И} \cdot \frac{v_И}{v_П} = \frac{35}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{35}{4}$. Итак, Петр, поехав на автобусе, затрачивает на дорогу 8 ч 45 минут и прибывает в пункт А в 17 ч 45 минут.

Ответ: 17:45.

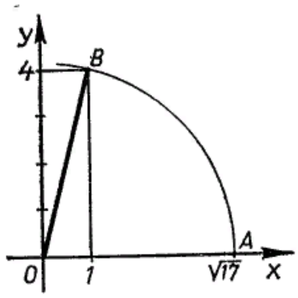
Задача 5 (15 баллов). У топографа при создании плана местности имеются только два инструмента: циркуль и линейка без делений. На карте задан отрезок длиной 1. Описать алгоритм, с помощью которого он может построить на плане отрезки длиной:

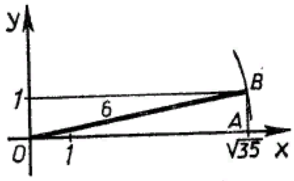
а) $\sqrt{17}$; (4 балла)

б) $\sqrt{35}$; (5 баллов)

в) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. (6 баллов)

Решение: а) и б)

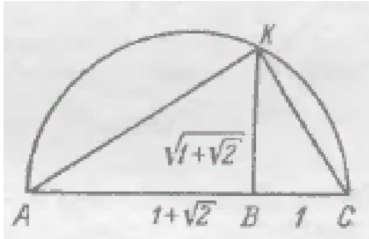




Можно решить иначе. Действительно $\left(\sqrt{n}\right)^2 = 1 \cdot n$. Значит $\sqrt{n}$ − среднее пропорциональное между 1 и n, поэтому можно использовать свойство перпендикуляра, проведенного из точки окружности на ее диаметр.

в) Построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длины 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$.

Отложим на прямой отрезок АВ длины $1+\sqrt{2}$, а затем – отрезок ВС длины 1 (см. рис.).

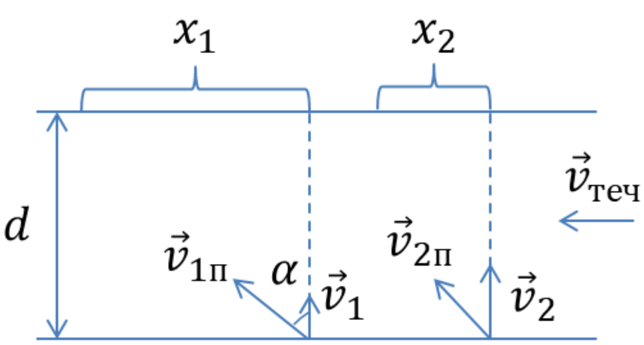


Построим на отрезке АС как на диаметре окружность. Проведем через точку В прямую, перпендикулярную диаметру АС. Пусть К – одна из точек пересечения последней прямой с окружностью. Докажем, что $BK = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник АКС – прямоугольный. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т.е. $(1+\sqrt{2})\cdot 1$

Задача 6. Студенты Вася и Петя подошли к одному и тому же берегу реки в разных его местах. Вася сразу поплыл прямо к противоположному берегу. Через 20 с Петя его заметил и тоже поплыл прямо к противоположному берегу. Доплыли они одновременно. Сколько времени потратил каждый из студентов на пересечение реки, если расстояние x_1, на которое снесло течением Васю, в два раза больше расстояния x_2, на которое снесло Петю? Найдите скорость течения, если известно, что ширина реки 90 м и тангенс угла между направлением, в котором отплыл от берега Вася, и направлением его общей скорости равен 1. (9 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_1$ – скорость Васи, $\vec{v}_{1п}$ – полная скорость Васи, α – угол между ними, $\vec{v}_2$ – скорость Пети, $\vec{v}_{2п}$ – полная скорость Пети, $\vec{v}_{теч}$ – скорость течения, d – ширина реки, x_1 – расстояние, на которое снесло течением Васю, x_2 – расстояние, на которое снесло течением Петю.

Так как Вася отплыл раньше, а прибыли студенты одновременно, то можем записать следующее соотношение для времени:

$$t_1 = t_2 + \Delta t$$

Так как Вася и Петя оба отплыли прямо к противоположному берегу, то есть направились перпендикулярно берегу, то расстояние, на которое их снесло течением, определяется только скоростью течения реки. То есть:

$$\begin{cases} x_1 = v_{\text{теч}} t_1 \\ x_2 = v_{\text{теч}} t_2 \end{cases}$$

Вспомнив, что соотношение между x_1 и x_2 известно, мы можем поделить одно на другое. С учётом записанного выше соотношения между временами получим:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_2 + \Delta t}{t_2} = 1 + \frac{\Delta t}{t_2}$$

Отсюда:

$$t_2 = \frac{\Delta t}{\frac{x_1}{x_2} - 1} = \frac{20}{2 - 1} = 20 \text{ с}$$

$$t_1 = t_2 + \Delta t = \frac{\Delta t}{\frac{x_1}{x_2} - 1} + \Delta t = \frac{\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1}\Delta t = \frac{2}{2 - 1} 20 = 40 \text{ с}$$

А теперь учтём соотношение для угла. Из равенства тангенса угла единице, следует, что сам угол равен 45°:

$$tg(\alpha) = 1 \Longrightarrow \alpha = 45° \Longrightarrow d = x_1$$

Тогда из выражения для x_1 можем выразить скорость течения:

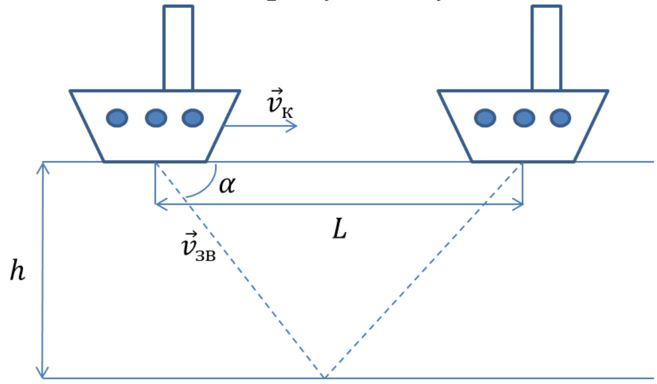
$$v_{\text{теч}} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{d}{\frac{\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1}\Delta t} = \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2}\Delta t} = \frac{90 \cdot (2 - 1)}{2 \cdot 20} = \frac{90}{40} = 2{,}25 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: время движения Васи t_1 равно 40 с; время движения Пети t_2 равно 20 с; скорость течения реки $v_{\text{теч}}$ равна 2,25 м/с.

Задача 7. На научно-исследовательском корабле для определения глубины используется новый ультразвуковой генератор, который позволяет создавать в воде узкие направленные пучки звука. Когда неподвижный корабль измерял глубину, отправляя сигнал частотой 30 кГц вертикально вниз, сигнал возвращался обратно через 1360 мс. Когда движущийся корабль отправляет сигнал с частотой в 1,5 раза больше под углом 30° к поверхности моря, отражённый сигнал он улавливает, пройдя 12,24 м. Чему равна скорость корабля, если скорость звука в море составляет 1468,5 м/с. Считать, что при отражении звука от дна угол падения равен углу отражения. (10 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_{зв}$ – скорость звука, $\vec{v}_к$ – скорость корабля, α – угол между поверхностью моря и направлением распространения звука, h – глубина моря, L – расстояние, которое успел проплыть корабль.

Введём обозначения: $t_в$ – время, через которое вернётся обратно отправленный вертикально вниз сигнал; $t_н$ – время, через которое вернётся обратно отправленный под углом сигнал.

Выражение для глубины моря для эхолокации хорошо известно. Для стандартного случая, когда звук распространяется вертикально, можем записать:

$$h = \frac{v_{зв} t_в}{2}$$

Известно, что скорость звука не зависит от частоты волны и её амплитуды. При распространении под углом скорость звука можно разложить на два компонента: вертикальный и горизонтальный. С вертикальной скоростью звук за время $t_н$ проходит путь до дна и обратно. С горизонтальной скоростью звук за это же время смещается на расстояние L. Тогда мы можем записать для глубины и расстояния L:

$$h = \frac{v_{зв\ верт} t_н}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot t_н}{2}$$

$$L = v_к t_н$$

Из второго выражения можем записать:

$$t_н = \frac{L}{v_к}$$

Тогда

$$h = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

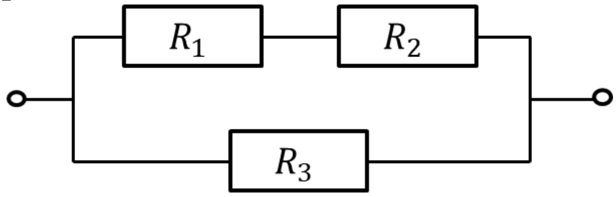
Приравняв оба выражения для глубины, получим:

$$\frac{v_{зв} t_в}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

$$v_к = \frac{\sin\alpha \cdot L}{t_в} = \frac{\sin 30 \cdot 12{,}24}{1{,}36} = 0{,}5 \cdot 9 = 4{,}5 \text{ м/с}$$

Ответ: скорость корабля составляет 4,5 м/с.

Задача 8. Студент собрал трансформатор, первичное напряжение на котором эквивалентно напряжению на представленной ниже цепи. Не удовлетворённый работой собранного прибора, студент перемотал вторичную обмотку. Сколько витков добавил студент на вторичную обмотку, если вторичное напряжение увеличилось на 2 В? Число витков N_1 в первичной обмотке равно 36. Сопротивления в приведённой ниже цепи равны друг другу и равны 2 Ом, сила тока составляет 3 А. (11 баллов)



Решение:

Сначала запишем соотношение между напряжениями и количеством витков на обмотках трансформатора:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Отсюда можно выразить вторичное напряжение до и после перемотки вторичной обмотки:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$$

$$U'_2 = \frac{N'_2}{N_1} U_1$$

Здесь U_1 – напряжение на первичной обмотке; U_2 – напряжение на вторичной обмотке до перемотки; U'_2 – напряжение на вторичной обмотке после перемотки; N_1 – количество витков на первичной обмотке; N_2 – количество витков на вторичной обмотке до перемотки; N'_2 – количество витков на вторичной обмотке после перемотки.

Вычтем из второго выражения первое:

$$U'_2 - U_2 = \frac{N'_2 - N_2}{N_1} U_1$$

Откуда

$$N'_2 - N_2 = \frac{U'_2 - U_2}{U_1} N_1$$

Теперь найдём напряжение на первичной обмотке. Для этого надо умножить силу тока, текущего по участку цепи, на эквивалентное сопротивление участка.

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_{12} + R_3}{R_{12}R_3}$$

$$R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$U_1 = IR_{123} = I\frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{(2+2)\cdot 2}{2+2+2} = 3 \cdot \frac{8}{6} = 4 \text{ В}$$

Тогда разница в количестве витков на вторичной обмотке:

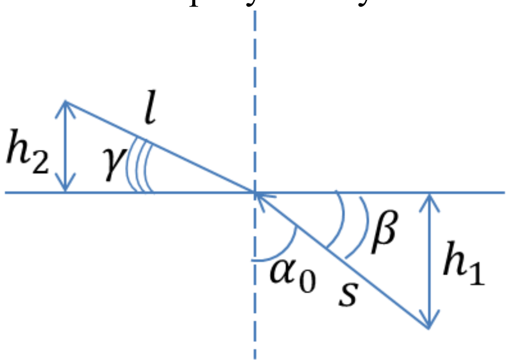
$$\Delta N_2 = N'_2 - N_2 = \frac{U'_2 - U_2}{U_1} N_1 = \frac{2}{4} \cdot 36 = 18 \text{ витков}$$

Ответ: студент добавил во вторичную обмотку 18 витков.

Задача 9. Феечки любят летать над аллиловым спиртом и любоваться своим отражением. А в аллиловом спирте живут наяды, которые охотятся на феечек. Чтобы их не заметили, наяды подплывают из глубины к самой поверхности таким образом, чтобы феечкам их было не видно под аллиловым спиртом, а затем выстреливают своим языком. Найдите угол, под которым наяды подплывают к поверхности, и угол между языком и поверхностью аллилового спирта. Известно, что длина языка наяды составляет 25 см, высота полёта феечек над аллиловым спиртом в 2 раза меньше той глубины, с которой начинают заход на цель наяды, двигаясь со скоростью 7,1 см/с в течение 5 с. Показатель преломления аллилового спирта составляет примерно 1,41. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



Обозначим буквой k отношение глубины h_1, с которой начинают заход на цель наяды, к высоте h_2 полёта феечек над аллиловым спиртом. Чтобы феечки их не заметили, наяды подплывают к поверхности под предельным углом полного отражения α_0. Тогда:

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_{\text{возд}}}{n_{\text{ас}}} = \frac{1}{n_{\text{ас}}}$$

Угол β, под которым наяды подплывают к поверхности, является дополнительным к предельному углу полного отражения α_0:

$$\beta = 90° - \alpha_0$$

Путь s, который наяда проплывает до поверхности, равен:

$$s = vt$$

Здесь v – скорость наяды, а t – время, за которое они подплывают к поверхности. Тогда из прямоугольного треугольника:

$$\sin\beta = \frac{h_1}{s}$$

$$h_1 = s \cdot \sin\beta$$

Вспомнив связь с высотой полёта феечек h_2 над аллиловым спиртом:

$$\frac{h_1}{h_2} = k$$

$$h_2 = \frac{h_1}{k} = \frac{s}{k}\sin\beta = \frac{vt}{k}\sin\beta$$

Для угла γ между языком и поверхностью аллилового спирта из другого прямоугольного треугольника можем записать:

$$\sin\gamma = \frac{h_2}{l}$$

Тогда:

$$\sin\gamma = \frac{vt}{kl}\sin\beta$$

В итоге получим:

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{1{,}41} \Longrightarrow \alpha_0 \approx 45°$$

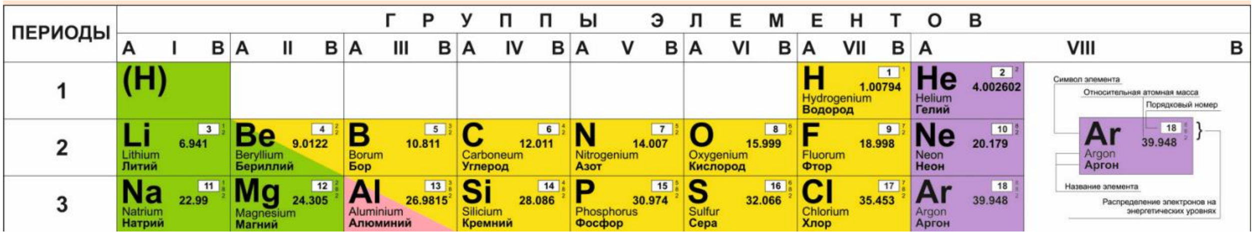
$$\beta = 90° - \alpha_0 = 90° - 45° = 45°$$

$$\sin\gamma = \frac{0{,}071 \cdot 5}{2 \cdot 0{,}25}\sin 45° \approx 0{,}5 \Longrightarrow \gamma \approx 30°$$

Ответ: Угол β, под которым наяды подплывают к поверхности, равен 45°, а угол γ между языком и поверхностью аллилового спирта равен 30°.

Задача 10. Альфа-частица в полном соответствии с восточными философскими практиками решила познать себя. В результате долгих

медитация она выяснила, что её удельная энергия связи составляет 7,875 МэВ. Определите дефект масс альфа-частицы.
Масса протона равна $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг, масса нейтрона равна $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $1\text{ а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, $1\text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. (7 баллов)



Решение:

Удельная энергия связи вычисляется по формуле:
$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}$$
Отсюда можно выразить энергию связи:
$$E_{\text{св}} = A \cdot \delta E_{\text{св}}$$
Вспомним связь между энергией связи и дефектом масс:
$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$$
Тогда для дефекта масс имеем:
$$\Delta m = \frac{E_{\text{св}}}{c^2} = \frac{A \cdot \delta E_{\text{св}}}{c^2} = \frac{4 \cdot 7{,}875 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 5{,}6 \cdot 10^{-29}\text{ кг}$$

Ответ: дефект масс равен $5{,}6 \cdot 10^{-29}$ кг.

Вариант 1-2

Задача 1 (5 баллов). В ряд стоят 2024 числа. Второе число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

Решение. Обозначим числа через $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{2023}, a_{2024}$. Складывая равенства $a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ и $a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+1}$, получим, что $a_{n+3} + a_n = 0$ или $a_{n+3} = -a_n$. Отсюда $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$, то есть последовательность имеет период 6. Поэтому $a_{2024} = a_{6\cdot 337+2} = a_2 = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2 (7 баллов). Строится числовая последовательность $\{x_n\}$: первый ее член равен $x_1 = 3^{2024}$, а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Найдите двенадцатый член этой последовательности.

Решение. Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9, а так как $3^{2024} = 3^{2022} \cdot 9$, то все члены данной последовательности делятся на 9. Оценим их величины. Из неравенства $3^2 < 10$ следует, что $3^{2024} < 10^{1012}$, поэтому в числе 3^{2024} не больше 1013 цифр. Значит, второй член последовательности не больше, чем $9 \cdot 1013 < 10^4$, то есть в нем не больше четырех цифр. Тогда третий член последовательности не больше, чем $9 \cdot 4 = 36$, а четвертый – меньше чем 18. Поскольку четвертый член, как и предыдущие, делится на 9, он равен 9. А значит, и все следующие равны 9.

Ответ: 9.

Задача 3 (10 баллов). Геологи привезли из командировки образец породы, масса которого выражается целым числом килограмм, для выполнения серии экспериментов в лаборатории. После каждого эксперимента масса образца уменьшалась на треть и еще треть килограмма, а остальная часть передавалась для проведения следующего эксперимента. Всего образца породы хватило на серию из шести экспериментов. Какова была масса образца породы до начала экспериментов?

Решение. Пусть в серии экспериментов участвует весь образец породы и еще один «запасной» килограмм. Если на некоторый эксперимент передали m кг породы и один «запасной», то на этом эксперименте останется $\frac{m}{3} + \frac{1}{3} = \frac{m+1}{3}$ - ровно треть массы породы. Поэтому после каждого эксперимента масса образца породы уменьшается ровно втрое. После серии из шести экспериментов масса образца уменьшается в $3^6 = 729$ раз, а остается один «запасной». Значит, вначале было 729 кг породы, из них 728 кг – объем исследуемого образца.

Ответ: 728.

Задача 4 (13 баллов). Два друга, Андрей и Денис, в 8 ч утра из поселка Арбузово отправляются на дискотеку в поселок Березово по течению реки: Андрей на байдарке, а Денис на катере, собственная скорость которого в два раза больше собственной скорости байдарки. Андрей приплывает в Берёзовку в 18 ч того же дня. Денис же, дойдя до поселка Березово, вспомнил, что забыл дома выключить свет. Он сразу же поворачивает назад и на пути из Березово в Арбузово встречает Андрея не позднее 16 ч, а прибывает в Арбузово не ранее следующего дня. Через сколько часов после отправления Денис вспомнил, что оставил дома свет включенным?

Решение. Пусть $v_к, v_б$ и u - собственные скорости катера, байдарки и реки соответственно, $v_к = 2v_б$, s - расстояние между Арбузово и Березово. Составим уравнения и неравенства по условиям задачи:

1. Байдарка находилась в пути 10 ч:

$$\frac{s}{v_б + u} = 10.$$

2. На обратном пути из Березово в Арбузово катер встретил байдарку не позднее 16 ч того же дня:

$$\frac{s + (2v_б - u)\dfrac{s}{2v_б + u}}{3v_б} \le 8.$$

3. Катер прибыл обратно в Арбузово не ранее следующего дня:

$$\frac{s}{2v_б + u} + \frac{s}{2v_б - u} \ge 16,\ 2v_б > u.$$

Разделим числитель и знаменатель из дробей в левой части неравенств (пп.2,3) на $v_б + u$ и учитывая равенство из п.1, получим:

$$\frac{10 + 10 \cdot \dfrac{2v_б - u}{2v_б + u}}{3 \cdot \dfrac{v_б}{v_б + u}} \le 8$$

и $$\frac{10}{\dfrac{2v_б + u}{v_б + u}} + \frac{10}{\dfrac{2v_б - u}{v_б + u}} \ge 16.$$

Полученные неравенства можно представить в следующей форме:

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\le 3\left(2\cdot\frac{v_б}{u}+1\right),$$

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\frac{v_б}{u}\ge 2\left(4\cdot\left(\frac{v_б}{u}\right)^2-1\right),$$

Или $\frac{v_б}{u}\ge 2$ и $-\frac{1}{3}\le\frac{v_б}{u}\le 2$. Отсюда видно, что система совместна при $\frac{v_б}{u}=2$. Тогда из уравенения п.1 получим:

$\frac{s}{3u}=10,$ то есть $\frac{s}{u}=30$.

В задаче требуется найти, через сколько часов Андрей вспомнил, что он не выключил свет, то есть через сколько часов катер прибыл в Березово. Находим

$$T=\frac{s}{2v_б+u}=\frac{s}{5u}=\frac{1}{5}\cdot 30=6.$$

Ответ: через 6 часов.

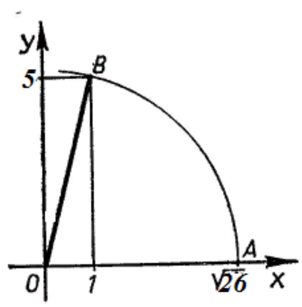
Задача 5 (15 баллов). У топографа при создании плана местности имеются только два инструмента: циркуль и линейка без делений. На карте задан отрезок длиной 1. Описать алгоритм, с помощью которого он может построить на плане отрезки длиной:

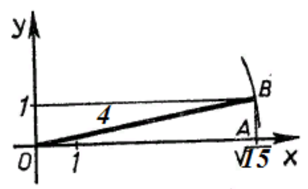
а) $\sqrt{26}$; (4 балла)

б) $\sqrt{15}$; (5 баллов)

в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. (6 баллов)

Решение: а) и б)



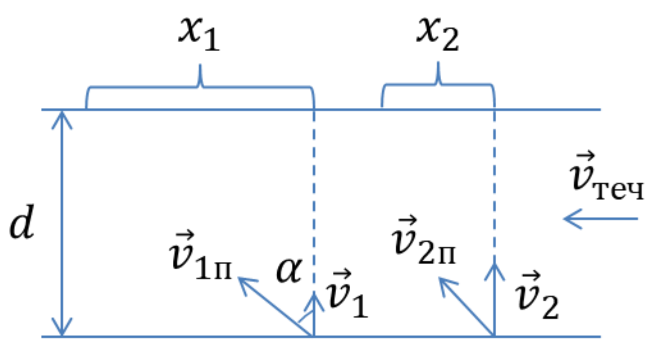


в) Пусть $a=1, b=\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}, c=\sqrt{3}=\sqrt{b^2+1^2}$. Тогда $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{ab}{b+c}$. Чтобы построить заданный отрезок используем теорему о пропорциональных отрезках. На одной стороне угла (не равного 180°) с вершиной O последовательно отложим отрезки $OC=b+c$ и $CB=b$ (С между О и В), а на второй стороне – отрезок $OA=a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC. Пусть эта прямая пересекается с прямой ОА в точке D. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{OA}=\frac{BC}{OC}$, или $\frac{AD}{a}=\frac{b}{b+c}$, то есть AD – искомый отрезок $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Задача 6. Студенты Ваня и Федя подошли к одному и тому же берегу реки в разных его местах. Ваня сразу поплыл прямо к противоположному берегу. Через 20 с Федя его заметил и тоже поплыл прямо к противоположному берегу. Доплыли они одновременно. Сколько времени потратил каждый из студентов на пересечение реки, если расстояние x_1, на которое снесло течением Ваню, в три раза больше расстояния x_2, на которое снесло Федю? Найдите скорость течения, если известно, что ширина реки 90 м и расстояние x_1 в два раза меньше того расстояния, которое проплыл Ваня. (9 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_1$ – скорость Вани, $\vec{v}_{1п}$ – полная скорость Вани, α – угол между ними, $\vec{v}_2$ – скорость Феди, $\vec{v}_{2п}$ – полная скорость Феди, $\vec{v}_{теч}$ – скорость течения, d – ширина реки, x_1 – расстояние, на которое снесло течением Ваню, x_2 – расстояние, на которое снесло течением Федю.

Так как Ваня отплыл раньше, а прибыли студенты одновременно, то можем записать следующее соотношение для времени:

$$t_1 = t_2 + \Delta t$$

Так как Ваня и Федя оба отплыли прямо к противоположному берегу, то есть направились перпендикулярно берегу, то расстояние, на которое их снесло течением, определяется только скоростью течения реки. То есть:

$$\begin{cases} x_1 = v_{теч} t_1 \\ x_2 = v_{теч} t_2 \end{cases}$$

Вспомнив, что соотношение между x_1 и x_2 известно, мы можем поделить одно на другое. С учётом записанного выше соотношения между временами получим:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{t_2+\Delta t}{t_2}=1+\frac{\Delta t}{t_2}$$

Отсюда:

$$t_2=\frac{\Delta t}{\frac{x_1}{x_2}-1}=\frac{20}{3-1}=10\ \text{с}$$

$$t_1=t_2+\Delta t=\frac{\Delta t}{\frac{x_1}{x_2}-1}+\Delta t=\frac{\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}\Delta t=\frac{3}{3-1}20=30\ \text{с}$$

А теперь учтём соотношение для угла. Так как расстояние x_1 в два раза меньше того расстояния, которое проплыл Ваня, то из геометрии следует, что сам угол равен 30°:

$$tg(30°)=\frac{x_1}{d}\Longrightarrow x_1=d\cdot tg(30°)$$

Тогда из выражения для x_1 можем выразить скорость течения:

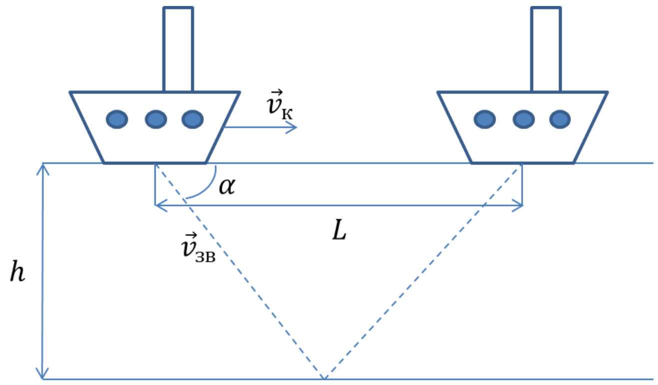
$$v_{\text{теч}}=\frac{x_1}{t_1}=\frac{d\cdot tg(30°)}{\frac{\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}\Delta t}=\frac{d\cdot tg(30°)\cdot\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}\Delta t}=\frac{90\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(3-1)}{3\cdot 20}\approx 1{,}73\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: время движения Васи t_1 равно 30 с; время движения Пети t_2 равно 10 с; скорость течения реки $v_{\text{теч}}$ равна 1,73 м/с.

Задача 7. На научно-исследовательском корабле для определения глубины используется новый ультразвуковой генератор, который позволяет создавать в воде узкие направленные пучки звука. Когда неподвижный корабль измерял глубину, отправляя сигнал частотой 40 кГц вертикально вниз, сигнал возвращался обратно через 1420 мс. Когда движущийся корабль отправляет сигнал с частотой в 2 раза меньше под углом 60° к направлению на дно моря, отражённый сигнал он улавливает, пройдя 17,04 м. Чему равна скорость корабля, если скорость звука в море составляет 1407 м/с. Считать, что при отражении звука от дна угол падения равен углу отражения. (10 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_{зв}$ – скорость звука, $\vec{v}_к$ – скорость корабля, α – угол между поверхностью моря и направлением распространения звука, h – глубина моря, L – расстояние, которое успел проплыть корабль.

Введём обозначения: $t_в$ – время, через которое вернётся обратно отправленный вертикально вниз сигнал; $t_н$ – время, через которое вернётся обратно отправленный под углом сигнал.

Выражение для глубины моря для эхолокации хорошо известно. Для стандартного случая, когда звук распространяется вертикально, можем записать:

$$h = \frac{v_{зв} t_в}{2}$$

Известно, что скорость звука не зависит от частоты волны и её амплитуды. Угол между направлением распространения сигнала и направлением на дно моря является дополнительным к углу α:

$$\alpha = 90° - 60° = 30°$$

При распространении под углом скорость звука можно разложить на два компонента: вертикальный и горизонтальный. С вертикальной скоростью звук за время $t_н$ проходит путь до дна и обратно. С горизонтальной скоростью звук за это же время смещается на расстояние L. Тогда мы можем записать для глубины и расстояния L:

$$h = \frac{v_{зв\ верт} t_н}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot t_н}{2}$$

$$L = v_к t_н$$

Из второго выражения можем записать:

$$t_н = \frac{L}{v_к}$$

Тогда

$$h = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

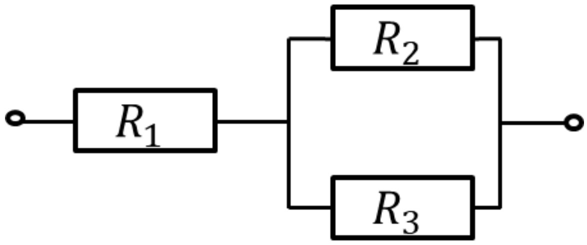
Приравняв оба выражения для глубины, получим:

$$\frac{v_{зв} t_в}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

$$v_к = \frac{\sin\alpha \cdot L}{t_в} = \frac{\sin 30 \cdot 17{,}04}{1{,}42} = 0{,}5 \cdot 12 = 6 \text{ м/с}$$

Ответ: скорость корабля составляет 6 м/с.

Задача 8. Студент собрал трансформатор, первичное напряжение на котором эквивалентно напряжению на представленной ниже цепи. Не удовлетворённый работой собранного прибора, студент перемотал вторичную обмотку. Сколько витков добавил студент на вторичную обмотку, если вторичное напряжение увеличилось на 2 В? Число витков N_1 в первичной обмотке равно 36. Сопротивления в приведённой ниже цепи равны друг другу и равны 2 Ом, сила тока составляет 3 А. (11 баллов)



Решение:

Сначала запишем соотношение между напряжениями и количеством витков на обмотках трансформатора:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Отсюда можно выразить вторичное напряжение до и после перемотки вторичной обмотки:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$$

$$U'_2 = \frac{N'_2}{N_1} U_1$$

Здесь U_1 – напряжение на первичной обмотке; U_2 – напряжение на вторичной обмотке до перемотки; U'_2 – напряжение на вторичной обмотке после перемотки; N_1 – количество витков на первичной обмотке; N_2 – количество витков на вторичной обмотке до перемотки; N'_2 – количество витков на вторичной обмотке после перемотки.

Вычтем из второго выражения первое:

$$U'_2 - U_2 = \frac{N'_2 - N_2}{N_1} U_1$$

Откуда

$$N'_2 - N_2 = \frac{U'_2 - U_2}{U_1} N_1$$

Теперь найдём напряжение на первичной обмотке. Для этого надо умножить силу тока, текущего по участку цепи, на эквивалентное сопротивление участка.

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$U_1 = IR_{123} = I\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) = 3 \cdot \left(2 + \frac{2 \cdot 2}{2 + 2}\right) = 3 \cdot 3 = 9 \text{ В}$$

Тогда разница в количестве витков на вторичной обмотке:

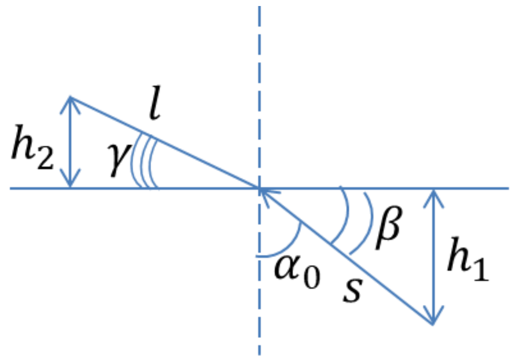
$$\Delta N_2 = N'_2 - N_2 = \frac{U'_2 - U_2}{U_1} N_1 = \frac{2}{9} \cdot 36 = 8 \text{ витков}$$

Ответ: студент добавил во вторичную обмотку 8 витков.

Задача 9. Феечки любят летать над трихлорфторметаном и любоваться своим отражением. А в трихлорфторметане живут наяды, которые охотятся на феечек. Чтобы их не заметили, наяды подплывают из глубины к самой поверхности таким образом, чтобы феечкам их было не видно под трихлорфторметаном, а затем выстреливают своим языком. Найдите угол, под которым наяды подплывают к поверхности, и угол между языком и поверхностью трихлорфторметана. Известно, что длина языка наяды составляет 20 см, высота полёта феечек над трихлорфторметаном в 4 раза меньше той глубины, с которой начинают заход на цель наяды, двигаясь со скоростью 34,6 см/с в течение 4 с. Показатель преломления трихлорфторметана составляет примерно 1,15. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



Обозначим буквой k отношение глубины h_1, с которой начинают заход на цель наяды, к высоте h_2 полёта феечек над трихлорфторметаном. Чтобы феечки их не заметили, наяды подплывают к поверхности под предельным углом полного отражения α_0. Тогда:

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_{\text{возд}}}{n_{\text{ас}}} = \frac{1}{n_{\text{ас}}}$$

Угол β, под которым наяды подплывают к поверхности, является дополнительным к предельному углу полного отражения α_0:

$$\beta = 90° - \alpha_0$$

Путь s, который наяда проплывает до поверхности, равен:

$$s = vt$$

Здесь v – скорость наяды, а t – время, за которое они подплывают к поверхности. Тогда из прямоугольного треугольника:

$$\sin\beta = \frac{h_1}{s}$$

$$h_1 = s \cdot \sin\beta$$

Вспомнив связь с высотой полёта феечек h_2 над трихлорфторметаном:

$$\frac{h_1}{h_2} = k$$

$$h_2 = \frac{h_1}{k} = \frac{s}{k}\sin\beta = \frac{vt}{k}\sin\beta$$

Для угла γ между языком и поверхностью трихлорфторметана из другого прямоугольного треугольника можем записать:

$$\sin\gamma = \frac{h_2}{l}$$

Тогда:

$$\sin\gamma = \frac{vt}{kl}\sin\beta$$

В итоге получим:

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{1{,}15} \Longrightarrow \alpha_0 \approx 60°$$

$$\beta = 90° - \alpha_0 = 90° - 60° = 30°$$

$$\sin\gamma = \frac{0{,}346 \cdot 4}{4 \cdot 0{,}2} \sin 30° \approx 0{,}5 \Longrightarrow \gamma \approx 60°$$

Ответ: Угол β, под которым наяды подплывают к поверхности, равен 30°, а угол γ между языком и поверхностью трихлорфторметана равен 60°.

Задача 10. Альфа-частица в полном соответствии с восточными философскими практиками решила познать себя. В результате долгих медитация она выяснила, что её энергия связи составляет 31,5 МэВ. Определите отношение массы ядра альфа-частицы к массе электрона.
Масса протона равна $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг, масса нейтрона равна $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $1\ \text{а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. (7 баллов)

ПЕРИОДЫ	ГРУППЫ ЭЛЕМЕНТОВ: A I B	A II B	A III B	A IV B	A V B	A VI B	A VII B	A VIII B
1	(H)						H 1 1.00794 Hydrogenium Водород	He 2 4.002602 Helium Гелий
2	Li 3 6.941 Lithium Литий	Be 4 9.0122 Beryllium Бериллий	B 5 10.811 Borum Бор	C 6 12.011 Carboneum Углерод	N 7 14.007 Nitrogenium Азот	O 8 15.999 Oxygenium Кислород	F 9 18.998 Fluorum Фтор	Ne 10 20.179 Neon Неон
3	Na 11 22.99 Natrium Натрий	Mg 12 24.305 Magnesium Магний	Al 13 26.9815 Aluminium Алюминий	Si 14 28.086 Silicium Кремний	P 15 30.974 Phosphorus Фосфор	S 16 32.066 Sulfur Сера	Cl 17 35.453 Chlorium Хлор	Ar 18 39.948 Argon Аргон

Символ элемента; Относительная атомная масса; Порядковый номер; Ar 18 39.948 Argon Аргон; Название элемента; Распределение электронов на энергетических уровнях

Решение:

Вспомним связь между энергией связи и дефектом масс:

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2$$

Тогда для дефекта масс имеем:

$$\Delta m = \frac{E_{св}}{c^2}$$

Запишем формулу для дефекта масс:

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_я$$

Отсюда можно выразить массу ядра и поделить на массу электрона:

$$\frac{m_я}{m_e} = \frac{Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - \frac{E_{св}}{c^2}}{m_e}$$

$$\frac{m_я}{m_e} = \frac{2 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} + 2 \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27} - \frac{31{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}$$

$$\frac{m_я}{m_e} = \frac{2 \cdot (1{,}673 + 1{,}675) \cdot 10^{-27} - 0{,}056 \cdot 10^{-27}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = \frac{6{,}64}{9{,}1} \cdot 10^4 \approx 7297$$

Ответ: отношение массы ядра альфа-частицы к массе электрона равно 7297.

Вариант 2-1

Задача 1 (5 баллов). Последовательность $\{x_n\}$ задана первыми двумя членами $x_1 = 2, x_2 = 3$ и условием $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$ $(k = 1,2,3,...)$. Найдите x_{2024}.

Решение: Выпишем первые члены этой последовательности: 2,3,3/2, 1/2, 1/3, 2/3, 2, 3…

Так как два соседних члена x_7 и x_8 такие же, как x_1 и x_2, а каждый следующий член вычисляется по двум предыдущим, то последовательность будет повторяться с периодом 6. Так как 2024=6·337+2, то $x_{2024} = 3$

Ответ: 3.

Задача 2 (7 баллов). Про натуральные числа x и y известно, что десятичная запись числа $x^2 + xy + y^2$ оканчивается нулем. Доказать, что это число кратно 4.

Решение. Разность $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ делится на 10. Поэтому у чисел x^3 и y^3 одинаковые последние цифры. Значит, и у чисел x и y последние цифры одинаковы. Следовательно, одинаковы последние цифры чисел x^2, xy и y^2, и последняя цифра числа такая же, как у $3x^2$. Поэтому x (а вместе с ним и y) делится на 10. Значит, $x^2 + xy + y^2$ делится на 100. Число, которое оканчивается двумя нулями делится на 4.

Задача 3 (10 баллов). В лаборатории проводится серия анализов над образцом нефти, объем которого выражается целым числом литров. После каждого анализа объем образца уменьшается на половину и еще пол-литра, оставшаяся нефть передается на следующий анализ. Всего объема нефти в образце хватило на серию из семи анализов. Сколько литров нефти было в образце первоначально?

Решение. Пусть в серии анализов участвует весь объем нефти в образце и еще один «запасной» литр нефти. Если на некоторый анализ передали m литров нефти и один «запасной», то на этом анализе останется $\dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2}$ - ровно половина нефти. Поэтому после каждого анализа число литров нефти уменьшается ровно вдвое. После серии из семи анализов объем образца уменьшается в $2^7 = 128$ раз, а остается один «запасной». Значит, вначале было 128 литров нефти, из них 127 л – первоначальный объем исследуемого образца.

Ответ: 127.

Задача 4 (13 баллов). Иван Петрович в 9 часов утра поехал из дома на дачу на автомобиле. В этот же момент с дачи домой по той же дороге возвращаются два его сына: Петр, который поехал на автобусе, и Василий – на мотоцикле, причем скорость мотоцикла в два раза больше скорости автобуса. Иван Петрович прибывает на дачу в 14 ч 50 мин, а встречает Василия не ранее 11 ч 30 мин. Во сколько Петр приедет домой, если известно, что между моментами встречи Ивана Петровича с Василием и встречей Ивана Петровича с автобусом, на котором ехал Петр, прошло не менее часа?

Решение. Обозначим расстояние от дома до дачи s, а также скорости участников задачи: $v_И$ - скорость автомобиля Ивана Петровича, $v_П$ - скорость автобуса, на котором едет Петр. Тогда скорость мотоцикла $v_В$ будет равна $2v_П$.

Составим уравнения и неравенства по условиям задачи:

4. Иван Петрович прибывает на дачу в 14 ч 50 мин, то есть через 5 ч 50 минут:

$$\frac{s}{v_И} = \frac{36}{5}.$$

5. Иван Петрович встречает Василия не ранее 11 ч 30 мин, то есть не ранее, чем через 2 ч 30 минут:

$$\frac{s}{v_И + 2v_П} \geq \frac{5}{2}.$$

6. Между моментами встречи Ивана Петровича с Василием и встречей Ивана Петровича с автобусом, на котором ехал Петр, прошло не менее часа:

$$\frac{s}{v_И + v_П} - \frac{s}{v_И + 2v_П} \geq 1.$$

Преобразуем неравенства из пп.2,3 следующим образом:

$$\frac{\frac{s}{v_И}}{1 + 2\frac{v_П}{v_И}} \geq \frac{5}{2}, \quad \frac{\frac{s}{v_И}}{1 + \frac{v_П}{v_И}} - \frac{\frac{s}{v_И}}{1 + 2\frac{v_П}{v_И}} \geq 1.$$

Подставляя в эти неравенства значение отношения $\frac{s}{v_И}$ из уравнения (п.1) и выполняя преобразования, получим систему неравенств:

$$\frac{v_П}{v_И} \leq \frac{2}{3}, 12\left(\frac{v_П}{v_И}\right)^2 - 17\left(\frac{v_П}{v_И}\right) + 6 \leq 0,$$

или

$$\frac{v_П}{v_И} \le \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \le \frac{v_П}{v_И} \le \frac{3}{4}.$$

Для того, чтобы такая система неравенств была совместна, необходимо выполнение равенства $\frac{v_П}{v_И} = \frac{2}{3}$. Это равенство дает нам недостающее уравнение. В задаче требуется найти время прибытия Петра домой, то есть величину $\frac{s}{v_П}$. Имеем: $\frac{s}{v_П} = \frac{s}{v_И} \cdot \frac{v_И}{v_П} = \frac{35}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{35}{4}$. Итак, Петр, поехав на автобусе, затрачивает на дорогу 8 ч 45 минут и прибывает в пункт А в 17 ч 45 минут.

Ответ: 17:45.

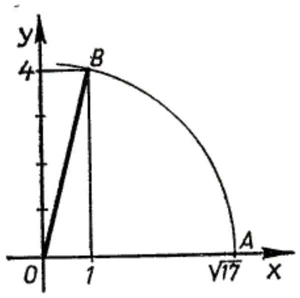
Задача 5 (15 баллов). У топографа при создании плана местности имеются только два инструмента: циркуль и линейка без делений. На карте задан отрезок длиной 1. Описать алгоритм, с помощью которого он может построить на плане отрезки длиной:

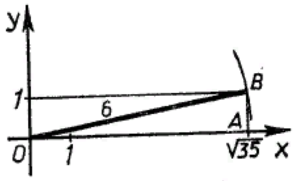
а) $\sqrt{17}$; (4 балла)

б) $\sqrt{35}$; (5 баллов)

в) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. (6 баллов)

Решение: а) и б)

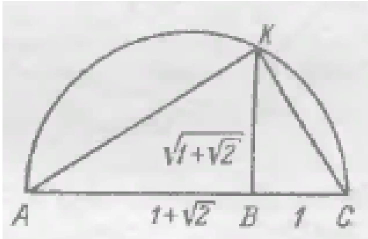




Можно решить иначе. Действительно $\left(\sqrt{n}\right)^2 = 1 \cdot n$. Значит $\sqrt{n}$ − среднее пропорциональное между 1 и n, поэтому можно использовать свойство перпендикуляра, проведенного из точки окружности на ее диаметр.

в) Построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длины 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$.

Отложим на прямой отрезок АВ длины $1+\sqrt{2}$, а затем – отрезок ВС длины 1 (см. рис.).



Построим на отрезке AC как на диаметре окружность. Проведем через точку B прямую, перпендикулярную диаметру AC. Пусть K – одна из точек пересечения последней прямой с окружностью. Докажем, что $BK=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник AKC – прямоугольный. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т.е. $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot 1$

Задача 6. Группа школьников играла в мяч в парке. Один из ребят бросил мяч по параболической траектории. В этот же момент его товарищ бросил второй мяч ему навстречу. Мячи столкнулись в верхней точке своих траекторий. Сидящая на ветке расположенного неподалёку дерева белка заметила, что расстояние L между ребятами было примерно 27,32 м. Также она заметила, что первый мяч был брошен под углом α_1 30° к горизонту с начальной скоростью v_{01} 20 м/с, а угол α_2 к горизонту, под которым был брошен второй мяч, в 1,5 раза больше угла α_1. Помогите белке посчитать начальную скорость второго мяча v_{02}. (12 баллов)

Решение:

Сначала введём стандартную систему координат и направим ось OX вдоль горизонта вправо, а ось OY вверх. Дальше запишем проекции на эти оси начальных скоростей мячей:

$$\begin{cases} v_{01x} = v_{01}\cos\alpha_1 \\ v_{01y} = v_{01}\sin\alpha_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_{02x} = v_{02}\cos\alpha_2 \\ v_{02y} = v_{02}\sin\alpha_2 \end{cases}$$

С горизонтальной составляющей скорости мяч движется вдоль оси OX. Вертикальная составляющая скорости «отвечает» за высоту подъёма над тем уровнем, с которого мяч стартовал.

Известно, что мячи столкнулись в верхних точках своих параболических траекторий. Это значит, что выше мячи уже не поднимались, значит проекция скорости на ось OY равна нулю. Тогда можно выразить время подъёма t_y:

$$v_{1y} = 0 = v_{01y} - gt_y$$
$$t_{y1} = \frac{v_{01y}}{g} = \frac{v_{01}}{g}\sin\alpha_1$$

Аналогично получаем:

$$t_{y2} = \frac{v_{02y}}{g} = \frac{v_{02}}{g}\sin\alpha_2$$

Зная время подъёма, можем найти максимальную высоту подъёма для каждого из мячей:

$$H = \frac{g{t_{y1}}^2}{2} = \frac{{v_{01}}^2}{2g}\sin^2\alpha_1$$

$$H = \frac{g{t_{y2}}^2}{2} = \frac{{v_{02}}^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

Так как максимальная высота подъёма одинакова для обоих мячей, то можем получить следующее равенство:

$$\frac{{v_{01}}^2}{2g}\sin^2\alpha_1 = H = \frac{{v_{02}}^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

Из условия известно, что угол α_2 к горизонту, под которым был брошен второй мяч, в 1,5 раза больше угла α_1, под которым был брошен первый мяч. Значит:

$$\alpha_2 = 1{,}5\alpha_1 = 45°$$

Тогда имеем для скорости второго мяча:

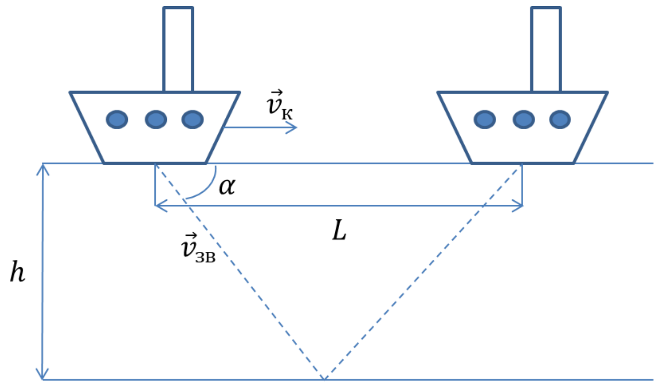
$$v_{02} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}v_{01} = \frac{\sin 30°}{\sin 45°}20 = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14\ \text{м/с}$$

Ответ: начальная скорость второго мяча равна 14,14 м/с.

Задача 7. На научно-исследовательском корабле для определения глубины используется новый ультразвуковой генератор, который позволяет создавать в воде узкие направленные пучки звука. Когда неподвижный корабль измерял глубину, отправляя сигнал частотой 30 кГц вертикально вниз, сигнал возвращался обратно через 1360 мс. Когда движущийся корабль отправляет сигнал с частотой на треть меньше под углом α к поверхности моря, отражённый сигнал он улавливает, пройдя 12,24 м со скоростью 4,5 м/с. Чему равен угол α, если скорость звука в море составляет 1468,5 м/с. Считать, что при отражении звука от дна угол падения равен углу отражения. (10 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_{зв}$ – скорость звука, $\vec{v}_к$ – скорость корабля, α – угол между поверхностью моря и направлением распространения звука, h – глубина моря, L – расстояние, которое успел проплыть корабль.

Введём обозначения: $t_в$ – время, через которое вернётся обратно отправленный вертикально вниз сигнал; $t_н$ – время, через которое вернётся обратно отправленный под углом сигнал.

Выражение для глубины моря для эхолокации хорошо известно. Для стандартного случая, когда звук распространяется вертикально, можем записать:

$$h = \frac{v_{зв} t_в}{2}$$

Известно, что скорость звука не зависит от частоты волны и её амплитуды. При распространении под углом скорость звука можно разложить на два компонента: вертикальный и горизонтальный. С вертикальной скоростью звук за время $t_н$ проходит путь до дна и обратно. С горизонтальной скоростью звук за это же время смещается на расстояние L. Тогда мы можем записать для глубины и расстояния L:

$$h = \frac{v_{зв\ верт} t_н}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot t_н}{2}$$

$$L = v_к t_н$$

Из второго выражения можем записать:

$$t_н = \frac{L}{v_к}$$

Тогда

$$h = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

Приравняв оба выражения для глубины, получим:

$$\frac{v_{зв} t_в}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_к}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_к \cdot t_в}{L} = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}36}{12{,}24} = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30°$$

Ответ: угол равен 30°.

Задача 8. Вася настраивал колебательный контур для радио приёмника, чтобы послушать песни на любимой волне $n_0 = 87{,}5$ МГц. Однако он слегка напортачил при подключении контура, в результате чего электроёмкость конденсатора C приняла значение 2 нФ, а индуктивность катушки L стала равна 1,62 нГн. Он попытался всё исправить, в результате чего электроёмкость конденсатора уменьшилась на 15%, индуктивность катушки увеличилась на 0,08 нГн. На какую величину различаются между собой исходная длина волны, на которую хотел настроить приёмник Вася, и та длина волны, на которую в итоге настроил? (7 баллов)

Решение:

Период свободных электромагнитных колебаний определяется по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Если при попытке всё исправить электроёмкость снизилась на 15%, то конечная электроёмкость составляет 85% от предыдущей:

$$C' = 0.85C$$

$$L' = L + \Delta L$$

Длина волны связана с периодом колебаний и частотой следующим образом:

$$\lambda = cT = \frac{\text{c}}{n}$$

Тогда в результате мы получаем:

$$C' = 0.85C = 1{,}7 \text{ нФ}$$

$$L' = L + \Delta L = 1{,}62 + 0{,}08 = 1{,}7 \text{ нГн}$$

$$\lambda_0 = \frac{\text{c}}{n_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{87{,}5 \cdot 10^6} = \frac{300}{87{,}5} = \frac{3 \cdot 8}{7} \approx 3{,}43 \text{ м}$$

$$\lambda' = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{1{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-9}} \approx 3{,}20 \text{ м}$$

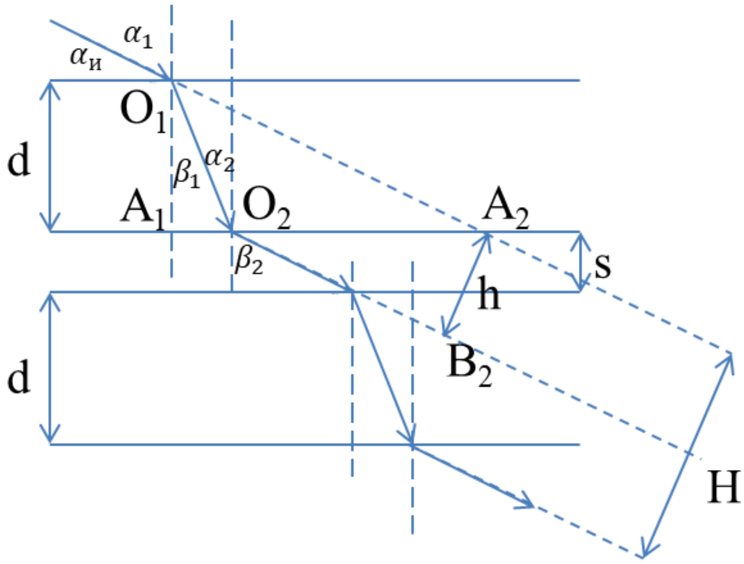
$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda' = 3{,}43 - 3{,}20 = 0{,}23 \text{ м}$$

Ответ: длины волн различаются на 0,23 м.

Задача 9. Солнечный лучик летел на Землю, чтобы поиграть с детьми в солнечных зайчиков. Однако на планете он, влетая в дом, прошёл через препятствие из двух прямоугольных платин кронгласа, находящихся на расстоянии 1 см друг от друга. Помогите лучику посчитать, на какое расстояние от первоначального направления он сместился, если он упал на кронглас под углом 60° к поверхности. Показатель преломления кронгласа равен 1,5, а толщина каждой пластины составляет 3 см. Считать, что вне пластин находится воздух. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке d – ширина пластины кронгласа; s – расстояние между пластинами; h – смещение солнечного лучика после прохождения одной пластины; H – смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин; α_1 – угол падения; β_1 – угол преломления; α_2 – вертикальный к предыдущему угол; β_2 – угол вылета из кронгласа; $\alpha_и$ – угол к поверхности.

Угол к поверхности является дополнительным к углу падения:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_и$$

Показатель преломления воздуха равен 1. Тогда из закона преломления:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n \Longrightarrow \sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}$$

$$\alpha_2 = \beta_1$$

$$\beta_2 = \alpha_1$$

$$O_2B_2 \parallel O_1A_2$$

Из геометрии следует:

$$O_2A_1 = d \cdot tg\beta_1$$

$$A_1A_2 = d \cdot tg\alpha_1$$

Тогда для смещения солнечного лучика после прохождения одной пластины можно написать:

$$h = \sin\alpha_и \cdot A_2O_2 = \sin\alpha_и \cdot (A_1A_2 - A_1O_2) = \cos\alpha_1 \cdot (d \cdot tg\alpha_1 - d \cdot tg\beta_1)$$

$$h = d\cos\alpha_1 \cdot \left(\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} - \frac{\sin\beta_1}{\cos\beta_1}\right) = d \cdot \left(\sin\alpha_1 - \sin\beta_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right)$$

$$h = d \cdot \left(\sin\alpha_1 - \frac{\sin\alpha_1}{n}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right) = d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\cos\alpha_1}{n\cos\beta_1}\right)$$

$$h = d\sin\alpha_1 \cdot \frac{n\cos\beta_1 - \cos\alpha_1}{n\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right)^2}} = d\sin\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1} - \sqrt{1-\sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}$$

$$h = d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}\right)$$

Так как между пластинами изменения направления солнечного лучика нет, то смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин:

$$H = 2d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_{и} = 90° - 60° = 30°$$

$$H = 2\cdot 0{,}03\cdot\sin 30°\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2 30°}}{\sqrt{(1{,}5)^2-\sin^2 30°}}\right)$$

$$H = 2\cdot 0{,}03\cdot 0{,}5\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{1-0{,}25}}{\sqrt{2{,}25-0{,}25}}\right) = 0{,}03 - 0{,}03\cdot\sqrt{\frac{0{,}75}{2}}$$

$$H = 0{,}03 - 0{,}03\cdot\sqrt{\frac{3}{2\cdot 4}} = 0{,}03 - 0{,}03\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}03 - 0{,}03\cdot\frac{1{,}72}{2\cdot 1{,}41}$$

$$H \approx 0{,}03 - 0{,}018 = 0{,}012 \text{ м}$$

Ответ: смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин 12 мм.

Задача 10. Когда Питера Паркера укусил радиоактивный паук, он сразу же взял у себя пробу крови и поспешил в свою домашнюю лабораторию, чтобы её исследовать. Однако в лаборатории он успел лишь посчитать количество нераспавшихся ядер, после чего отрубился на несколько суток. Очнувшись, он снова произвёл подсчёт нераспавшихся ядер и сумел определить, что период полураспада вещества равен 64 часа. Сколько суток Питер пролежал без сознания, и какое число ядер осталось к этому моменту нераспавшимися, если первоначальное число нераспавшихся ядер составляет 1000 штук, а процент нераспавшихся ядер составлял 25%? (8 баллов)

Решение:

Сначала запишем закон радиоактивного распада:

$$N = N_0\cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Здесь N – количество нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 – количество нераспавшихся ядер в момент времени $t = 0$; $T_{1/2}$ – период полураспада.

Из закона сохранения можно записать:

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Из условия известно, что процент нераспавшихся ядер составлял 25%. Это значит, что отношение нераспавшихся ядер к первоначальному количеству составляло 25% или 0,25. Тогда

$$\frac{N}{N_0} = 0{,}25 \Longrightarrow N = 0{,}25N_0 = 0{,}25 \cdot 1000 = 250 \text{ штук}$$

Теперь найдём время, которое Питер пролежал без сознания:

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = 0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

$$\frac{t}{T_{1/2}} = 2$$

$$t = 2T_{1/2} = 2 \cdot 64 = 128 \text{ часов} = 5\frac{1}{3} \text{суток}$$

Ответ: Питер пролежал без сознания 5 суток с третью, а число нераспавшихся ядер равно 250 штукам.

Вариант 2-2

Задача 1 (5 баллов). В ряд стоят 2024 числа. Второе число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

Решение. Обозначим числа через $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{2023}, a_{2024}$. Складывая равенства $a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ и $a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+1}$, получим, что $a_{n+3} + a_n = 0$ или $a_{n+3} = -a_n$. Отсюда $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$, то есть последовательность имеет период 6. Поэтому $a_{2024} = a_{6\cdot 337+2} = a_2 = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2 (7 баллов). Строится числовая последовательность $\{x_n\}$: первый ее член равен $x_1 = 3^{2024}$, а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Найдите двенадцатый член этой последовательности.

Решение. Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9, а так как $3^{2024} = 3^{2022} \cdot 9$, то все члены данной последовательности делятся на 9. Оценим их величины. Из неравенства $3^2 < 10$ следует, что $3^{2024} < 10^{1012}$, поэтому в числе 3^{2024} не больше 1013 цифр. Значит, второй член последовательности не больше, чем $9 \cdot 1013 < 10^4$, то есть в нем не больше четырех цифр. Тогда третий член последовательности не больше, чем $9 \cdot 4 = 36$, а четвертый – меньше чем 18. Поскольку четвертый член, как и предыдущие, делится на 9, он равен 9. А значит, и все следующие равны 9.

Ответ: 9.

Задача 3 (10 баллов). Геологи привезли из командировки образец породы, масса которого выражается целым числом килограмм, для выполнения серии экспериментов в лаборатории. После каждого эксперимента масса образца уменьшалась на треть и еще треть килограмма, а остальная часть передавалась для проведения следующего эксперимента. Всего образца породы хватило на серию из шести экспериментов. Какова была масса образца породы до начала экспериментов?

Решение. Пусть в серии экспериментов участвует весь образец породы и еще один «запасной» килограмм. Если на некоторый эксперимент передали m кг породы и один «запасной», то на этом эксперименте останется $\frac{m}{3} + \frac{1}{3} = \frac{m+1}{3}$ - ровно треть массы породы. Поэтому после каждого эксперимента масса образца породы уменьшается ровно втрое. После серии из шести экспериментов масса образца уменьшается в $3^6 = 729$ раз, а остается один «запасной». Значит, вначале было 729 кг породы, из них 728 кг – объем исследуемого образца.

Ответ: 728.

Задача 4 (13 баллов). Два друга, Андрей и Денис, в 8 ч утра из поселка Арбузово отправляются на дискотеку в поселок Березово по течению реки: Андрей на байдарке, а Денис на катере, собственная скорость которого в два раза больше собственной скорости байдарки. Андрей приплывает в Берёзовку в 18 ч того же дня. Денис же, дойдя до поселка Березово, вспомнил, что забыл дома выключить свет. Он сразу же поворачивает назад и на пути из Березово в Арбузово встречает Андрея не позднее 16 ч, а прибывает в Арбузово не ранее следующего дня. Через сколько часов после отправления Денис вспомнил, что оставил дома свет включенным?

Решение. Пусть $v_к, v_б$ и u - собственные скорости катера, байдарки и реки соответственно, $v_к = 2v_б$, s - расстояние между Арбузово и Березово. Составим уравнения и неравенства по условиям задачи:

1. Байдарка находилась в пути 10 ч:

$$\frac{s}{v_б + u} = 10.$$

2. На обратном пути из Березово в Арбузово катер встретил байдарку не позднее 16 ч того же дня:

$$\frac{s + (2v_б - u)\frac{s}{2v_б + u}}{3v_б} \le 8.$$

3. Катер прибыл обратно в Арбузово не ранее следующего дня:

$$\frac{s}{2v_б + u} + \frac{s}{2v_б - u} \ge 16,\ 2v_б > u.$$

Разделим числитель и знаменатель из дробей в левой части неравенств (пп.2,3) на $v_б + u$ и учитывая равенство из п.1, получим:

$$\frac{10 + 10 \cdot \frac{2v_б - u}{2v_б + u}}{3 \cdot \frac{v_б}{v_б + u}} \le 8$$

и $\dfrac{10}{\frac{2v_б + u}{v_б + u}} + \dfrac{10}{\frac{2v_б - u}{v_б + u}} \ge 16.$

Полученные неравенства можно представить в следующей форме:

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right) \le 3\left(2\cdot\frac{v_б}{u}+1\right),$$

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\frac{v_б}{u} \ge 2\left(4\cdot\left(\frac{v_б}{u}\right)^2-1\right),$$

Или $\frac{v_б}{u} \ge 2$ и $-\frac{1}{3} \le \frac{v_б}{u} \le 2$. Отсюда видно, что система совместна при $\frac{v_б}{u} = 2$. Тогда из уравенения п.1 получим:

$\frac{s}{3u} = 10$, то есть $\frac{s}{u} = 30$.

В задаче требуется найти, через сколько часов Андрей вспомнил, что он не выключил свет, то есть через сколько часов катер прибыл в Березово. Находим

$$T = \frac{s}{2v_б + u} = \frac{s}{5u} = \frac{1}{5}\cdot 30 = 6.$$

Ответ: через 6 часов.

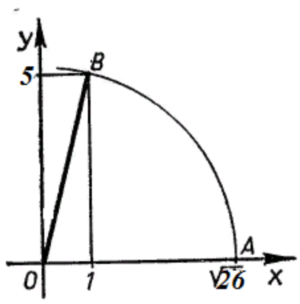
Задача 5 (15 баллов). У топографа при создании плана местности имеются только два инструмента: циркуль и линейка без делений. На карте задан отрезок длиной 1. Описать алгоритм, с помощью которого он может построить на плане отрезки длиной:

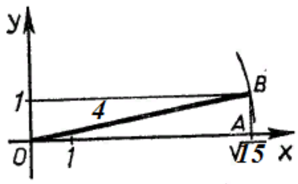
а) $\sqrt{26}$; (4 балла)

б) $\sqrt{15}$; (5 баллов)

в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. (6 баллов)

Решение: а) и б)





в) Пусть $a = 1, b = \sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}, c = \sqrt{3} = \sqrt{b^2+1^2}$. Тогда $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{ab}{b+c}$. Чтобы построить заданный отрезок используем теорему о пропорциональных отрезках. На одной стороне угла (не равного 180°) с вершиной O последовательно отложим отрезки $OC = b+c$ и $CB = b$ (C между O и B), а на второй стороне – отрезок $OA = a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC. Пусть эта прямая пересекается с прямой ОА в точке D. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{OA}=\frac{BC}{OC}$, или $\frac{AD}{a}=\frac{b}{b+c}$, то есть AD – искомый отрезок $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Задача 6. Ребята из кружка «Очумелые ручки» собрали модели катапульт и решили их испытать на ровной площадке рядом с кружком. Модели были поставлены ровно напротив друг друга по разным сторонам площадки шириной L 20,99 м. Выпущенные из катапульт снаряды столкнулись в верхней точке своих траекторий. Пролетающий мимо воробей сумел определить, что первый снаряд был брошен под углом α_1 45° к горизонту с начальной скоростью v_{01} 15 м/с, а угол α_2 к горизонту, под которым был брошен второй снаряд, в 1,5 раза меньше угла α_1. Помогите воробью посчитать начальную скорость второго снаряда v_{02}. (12 баллов)

Решение:

Сначала введём стандартную систему координат и направим ось OX вдоль горизонта вправо, а ось OY вверх. Дальше запишем проекции на эти оси начальных скоростей снарядов:

$$\begin{cases} v_{01x} = v_{01}\cos\alpha_1 \\ v_{01y} = v_{01}\sin\alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{02x} = v_{02}\cos\alpha_2 \\ v_{02y} = v_{02}\sin\alpha_2 \end{cases}$$

С горизонтальной составляющей скорости снаряд движется вдоль оси OX. Вертикальная составляющая скорости «отвечает» за высоту подъёма над тем уровнем, с которого снаряд стартовал.

Известно, что снаряды столкнулись в верхних точках своих параболических траекторий. Это значит, что выше снаряды уже не поднимались, значит проекция скорости на ось OY равна нулю. Тогда можно выразить время подъёма t_y:

$$v_{1y} = 0 = v_{01y} - gt_y$$

$$t_{y1} = \frac{v_{01y}}{g} = \frac{v_{01}}{g}\sin\alpha_1$$

Аналогично получаем:

$$t_{y2} = \frac{v_{02y}}{g} = \frac{v_{02}}{g}\sin\alpha_2$$

Зная время подъёма, можем найти максимальную высоту подъёма для каждого из снарядов:

$$H = \frac{g{t_{y1}}^2}{2} = \frac{{v_{01}}^2}{2g}\sin^2\alpha_1$$

$$H = \frac{g{t_{y2}}^2}{2} = \frac{{v_{02}}^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

Так как максимальная высота подъёма одинакова для обоих снарядов, то можем получить следующее равенство:

$$\frac{{v_{01}}^2}{2g}\sin^2\alpha_1 = H = \frac{{v_{02}}^2}{2g}\sin^2\alpha_2$$

Из условия известно, что угол α_2 к горизонту, под которым был брошен второй снаряд, в 1,5 раза меньше угла α_1, под которым был брошен первый снаряд. Значит:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{1{,}5} = 30°$$

Тогда имеем для скорости второго снаряд:

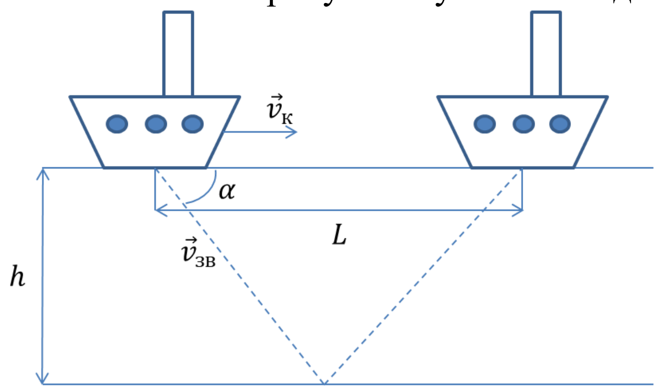
$$v_{02} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}v_{01} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°}15 \approx 21{,}21 \text{ м/с}$$

Ответ: начальная скорость второго снаряда равна 21,21 м/с.

Задача 7. На научно-исследовательском корабле для определения глубины используется новый ультразвуковой генератор, который позволяет создавать в воде узкие направленные пучки звука. Когда неподвижный корабль измерял глубину, отправляя сигнал частотой 50 кГц вертикально вниз, сигнал возвращался обратно через 1420 мс. Когда движущийся корабль отправляет сигнал с частотой в 2 раза меньше под углом α к поверхности моря, отражённый сигнал он улавливает, пройдя 17,04 м со скоростью 6 м/с. Чему равен угол β к направлению на дно моря, если скорость звука в море составляет 1407 м/с. Считать, что при отражении звука от дна угол падения равен углу отражения. (10 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке $\vec{v}_{зв}$ – скорость звука, $\vec{v}_{к}$ – скорость корабля, α – угол между поверхностью моря и направлением распространения звука, h – глубина моря, L – расстояние, которое успел проплыть корабль.

Введём обозначения: $t_{в}$ – время, через которое вернётся обратно отправленный вертикально вниз сигнал; $t_{н}$ – время, через которое вернётся обратно отправленный под углом сигнал.

Выражение для глубины моря для эхолокации хорошо известно. Для стандартного случая, когда звук распространяется вертикально, можем записать:

$$h = \frac{v_{зв} t_{в}}{2}$$

Известно, что скорость звука не зависит от частоты волны и её амплитуды.

При распространении под углом скорость звука можно разложить на два компонента: вертикальный и горизонтальный. С вертикальной скоростью звук за время $t_{н}$ проходит путь до дна и обратно. С горизонтальной скоростью звук за это же время смещается на расстояние L. Тогда мы можем записать для глубины и расстояния L:

$$h = \frac{v_{зв\ верт} t_{н}}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot t_{н}}{2}$$

$$L = v_{к} t_{н}$$

Из второго выражения можем записать:

$$t_{н} = \frac{L}{v_{к}}$$

Тогда

$$h = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_{к}}$$

Приравняв оба выражения для глубины, получим:

$$\frac{v_{зв} t_{в}}{2} = \frac{v_{зв} \cdot \sin\alpha \cdot L}{2 v_{к}}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_{к} \cdot t_{в}}{L} = \frac{6 \cdot 1{,}42}{17{,}04} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \Longrightarrow \alpha = 30°$$

Угол между направлением распространения сигнала и направлением на дно моря является дополнительным к углу α:

$$\beta = 90° - 30° = 60°$$

Ответ: угол равен 60°.

Задача 8. Радиолюбитель настраивал колебательный контур для радио приёмника, чтобы послушать песни на любимой волне n_0. Однако он слегка отвлёкся при подключении контура, в результате чего электроёмкость конденсатора С приняла значение 2,4 нФ, а индуктивность катушки L стала равна 1,05 нГн. Он попытался всё исправить, в результате чего электроёмкость конденсатора уменьшилась на 0,9 нФ, а индуктивность катушки L выросла на величину, которая составляет 30% от нового значения. На какую частоту хотел настроиться радиолюбитель, если разница между исходной длиной волны, на которую он хотел настроить приёмник, и той длиной волны, на которую в итоге настроил, равна 50,4 см? (7 баллов)

Решение:

Период свободных электромагнитных колебаний определяется по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Если при попытке всё исправить электроёмкость уменьшилась на 0,9 нФ, то конечная электроёмкость равна:

$$C' = C - \Delta C$$

Индуктивность также изменилась на некоторую величину, которая составляет 30% от нового значения

$$L' = L + \Delta L = L + 0{,}3L'$$

$$L' = \frac{L}{0{,}7}$$

Длина волны связана с периодом колебаний и частотой следующим образом:

$$\lambda = cT = \frac{c}{n}$$

$$\lambda_0 = \lambda' + \Delta\lambda$$

Тогда в результате мы получаем:

$$C' = C - \Delta C = 2{,}4 - 0{,}9 = 1{,}5 \text{ нФ}$$

$$L' = \frac{L}{0{,}7} = \frac{1{,}05}{0{,}7} = 1{,}5 \text{ нГн}$$

$$\lambda' = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{1{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-9}} = 2{,}826\text{м}$$

$$\lambda_0 = \lambda' + \Delta\lambda = 2{,}826 + 0{,}504 = 3{,}33 \text{ м}$$

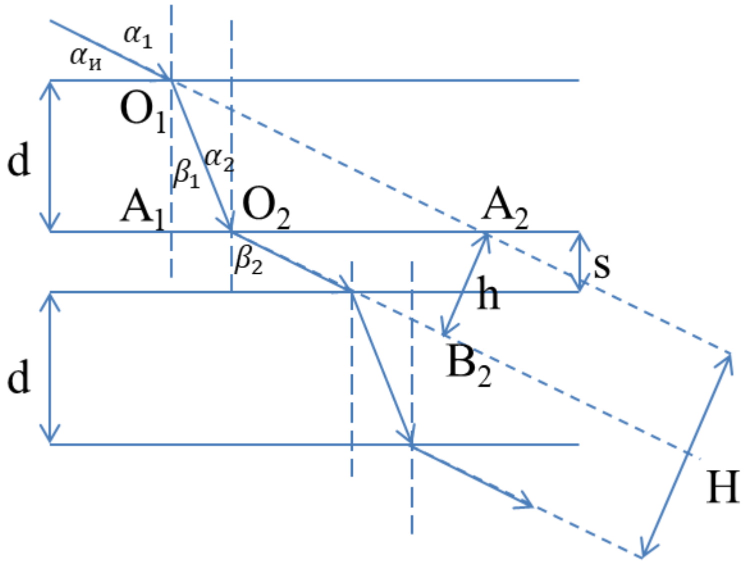
$$n_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}33} = 90090090{,}09 \approx 90{,}09 \text{ МГц}$$

Ответ: радиолюбитель хотел настроиться на частоту 90,09 МГц.

Задача 9. Безумный учёный раздобыл где-то лампочку Ильича. При помощи сложной системы из 15 линз он сумел собрать весь излучаемый свет в один луч. Полученный луч света он направил на препятствие из двух прямоугольных платин кронгласа, находящихся на расстоянии 3 см друг от друга. На какое расстояние от первоначального направления сместился луч света, если он упал на кронглас под углом 30° к поверхности. Показатель преломления кронгласа равен 1,5, а толщина каждой пластины составляет 3 см. Считать, что вне пластин находится воздух. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



На этом рисунке d – ширина пластины кронгласа; s – расстояние между пластинами; h – смещение солнечного лучика после прохождения одной пластины; H – смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин; α_1 – угол падения; β_1 – угол преломления; α_2 – вертикальный к предыдущему угол; β_2 – угол вылета из кронгласа; $\alpha_и$ – угол к поверхности.
Угол к поверхности является дополнительным к углу падения:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_и$$

Показатель преломления воздуха равен 1. Тогда из закона преломления:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n \Rightarrow \sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}$$

$$\alpha_2 = \beta_1$$

$$\beta_2 = \alpha_1$$

$$O_2B_2 \parallel O_1A_2$$

Из геометрии следует:

$$O_2A_1 = d \cdot tg\beta_1$$

$$A_1A_2 = d \cdot tg\alpha_1$$

Тогда для смещения солнечного лучика после прохождения одной пластины можно написать:

$$h = \sin\alpha_и \cdot A_2O_2 = \sin\alpha_и \cdot (A_1A_2 - A_1O_2) = \cos\alpha_1 \cdot (d \cdot tg\alpha_1 - d \cdot tg\beta_1)$$

$$h = d\cos\alpha_1 \cdot \left(\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} - \frac{\sin\beta_1}{\cos\beta_1}\right) = d \cdot \left(\sin\alpha_1 - \sin\beta_1\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right)$$

$$h = d \cdot \left(\sin\alpha_1 - \frac{\sin\alpha_1}{n}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right) = d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\cos\alpha_1}{n\cos\beta_1}\right)$$

$$h = d\sin\alpha_1 \cdot \frac{n\cos\beta_1 - \cos\alpha_1}{n\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right)^2}} = d\sin\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \sqrt{1 - \sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}}$$

$$h = d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}}\right)$$

Так как между пластинами изменения направления солнечного лучика нет, то смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин:

$$H = 2d\sin\alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_{и} = 90° - 30° = 60°$$

$$H = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \sin 30° \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 30°}}{\sqrt{(1{,}5)^2 - \sin^2 30°}}\right)$$

$$H = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1 - 0{,}75}}{\sqrt{2{,}25 - 0{,}75}}\right) = 0{,}02 \cdot \sqrt{3} - 0{,}02 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{0{,}25}{1{,}5}}$$

$$H = 0{,}02 \cdot \sqrt{3} - 0{,}02 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{3} - 0{,}02 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$H = 0{,}02 \cdot \sqrt{3} - 0{,}01 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}02 \cdot 1{,}72 - 0{,}01 \cdot 1{,}41 \approx 0{,}020 \text{ м}$$

Ответ: смещение солнечного лучика после прохождения двух пластин 20 мм.

Задача 10. Когда Питера Паркера укусил радиоактивный паук, он сразу же взял у себя пробу крови в надежде на прорыв в медицине и поспешил в свою домашнюю лабораторию. В лаборатории Питер посчитал количество нераспавшихся ядер и выяснил, процент нераспавшихся ядер составлял 3,125%. Чему равен найденный Питером период полураспада, и какое число ядер осталось к этому моменту нераспавшимися, если Питер добирался до лаборатории 50 мин, а первоначальное число нераспавшихся ядер составляет 100000 штук? (8 баллов)

Решение:

Сначала запишем закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Здесь N – количество нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 – количество нераспавшихся ядер в момент времени $t = 0$; $T_{1/2}$ – период полураспада.

Из закона сохранения можно записать:

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Из условия известно, что процент нераспавшихся ядер составлял 3,125%. Это значит, что отношение нераспавшихся ядер к первоначальному количеству составляло 3,125% или 0,03125. Тогда

$$\frac{N}{N_0} = 0{,}03125 \Longrightarrow N = 0{,}03125 N_0 = 0{,}03125 \cdot 100000 = 3125 \text{ штук}$$

Теперь найдём период полураспада:

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = 0{,}03125 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$$

$$\frac{t}{T_{1/2}} = 5$$

$$T_{1/2} = \frac{t}{5} = \frac{50}{5} = 10 \text{ мин}$$

Ответ: Период полураспада мин, а число нераспавшихся ядер равно 3125 штук.