



ВАРИАНТ 1

Задача 1 (6 баллов).

Проверить, делится ли число $2025^{2024} + 2024^{2025}$ на 6 без остатка.

Решение:

Возведение числа в степень можно заменить на возведение его остатка от деления в степень: $2025 = 6 \cdot 334 + 1$, следовательно, 2025^{2024} имеет такой же остаток от деления на 6, как и 1^{2024} , то есть 1. Так как $2024 = 6 \cdot 334$, то $2025^{2024} + 2024^{2025}$ при делении на 6 даёт остаток 1, то есть на 6 оно не делится.

Ответ: нет.

Задача 2 (6 баллов).

Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана формулой: $x_{n-1} = f(x_n)$, где $f(x) = \frac{5-x}{x+1}$.

Известно, что $x_{16} = 5$. Найти произведение $x_{2024} \cdot x_{2025}$.

Решение:

Составим и решим уравнение: $5 = \frac{5-x_{15}}{x_{15}+1}$, откуда $x_{15} = 0$. Тогда $0 = \frac{5-x_{14}}{x_{14}+1}$, откуда $x_{14} = 5$. Можно заметить закономерность, что каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный – 5. Следовательно, заданное произведение будет равно 0.

Ответ: 0.

Задача 3 (8 баллов).

На нефтеперерабатывающем заводе проводится серия технологических операций над образцом нефти. После каждой операции объем нефти уменьшается на 40% и еще 2 литра. Всего объема нефти хватило на 5 операций. Сколько литров нефти было в образце первоначально? Определить с точностью до целого.

Решение:

Пусть начальный объем нефти x литров, тогда задачу можно представить в виде уравнения:

$$0,6^5 \cdot x - 2 \cdot (1 + 0,6 + \dots + 0,6^4) = 0$$

Тогда:

$$x = \frac{2 \cdot (1 + 0,6 + \dots + 0,6^4)}{0,6^5} = \frac{2 \cdot (0,6^5 - 1)}{0,6^5 \cdot (0,6 - 1)} \approx 59,300 \text{ л}$$

Ответ: 59 л.



Задача 4 (15 баллов).

Известно, что некоторые три числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а числа $a_1 - 1, a_2 + 1, a_3 + 15$ - геометрическую. При этом $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Найти a_1 при условии, что разность арифметической прогрессии больше нуля.

Решение:

Воспользуемся формулами для арифметических и геометрических прогрессий:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 24 \Rightarrow d = 8 - a_1$$

Так как по условию разность арифметической прогрессии больше нуля, то первый член прогрессии должен быть меньше 8.

Для геометрической прогрессии справедливо:

$$\frac{a_2 + 1}{a_1 - 1} = \frac{a_3 + 15}{a_2 + 1} \Rightarrow (a_2 + 1)^2 = (a_1 - 1)(a_3 + 15),$$

Так как $a_2 = d + 1$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_1 = 8 - d$, то

$$(a_1 + d + 1)^2 = (a_1 - 1)(a_1 + 2d + 15) \Rightarrow 9^2 = (a_1 - 1)(31 - a_1),$$

$$31a_1 - a_1^2 - 31 + a_1 - 81 = 0 \Rightarrow a_1^2 - 32a_1 + 112 = 0$$

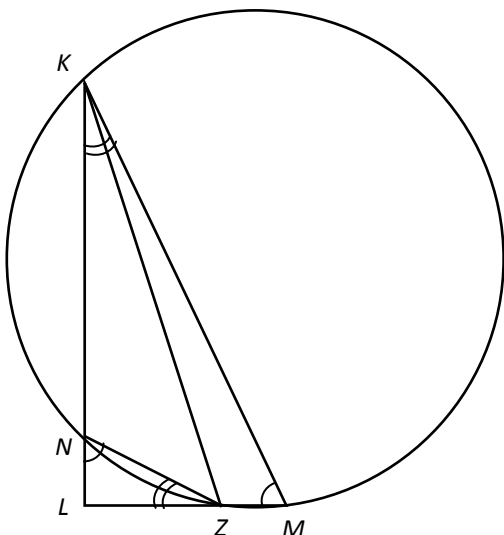
$$D = 32^2 - 4 \cdot 1 \cdot 112 = 576 = 24^2 \Rightarrow a_1 = \frac{32+24}{2} = 28 \text{ или } a_1 = \frac{32-24}{2} = 4.$$

Так как разность прогрессии должна быть положительной, то $a_1 = 4$

Ответ: 4.

**Задача 5 (15 баллов).**

В прямоугольном треугольнике KLM угол L равен 90 градусов. На стороне KL находится точка N , которая делит сторону в отношении 5:1, а на стороне LM — точка Z , которая делит сторону в отношении 2:1. При этом, $KL = 12$, $LM = 6$. Доказать, что вокруг четырехугольника $KNZM$ можно описать окружность и найти её радиус.

**Решение:**

- 1) $LN = \frac{1}{6}KL = 2$; $ZL = \frac{2}{3}LM = 4$.
- 2) В $\triangle KLM$ и $\triangle ZLM$ отношение сторон $\frac{KL}{ZL} = \frac{LM}{LN} = 3$, $\angle L$ — общий. Следовательно, треугольники подобны: $\triangle KLM \sim \triangle ZLM$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
- 3) $\angle LNZ = \angle LMK \Rightarrow \angle KNZ + \angle KML = 180^\circ$,
 $\angle LZN = \angle LKM \Rightarrow \angle MZN + \angle MKL = 180^\circ$.
Следовательно, вокруг четырехугольника $KNZM$ можно описать окружность.
- 4) Радиус окружности, описанной около четырехугольника $KNZM$ равен радиусу окружности, описанной около $\triangle KNZ$.
- 5) По теореме Пифагора $KZ = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$, $NZ = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.
- 6) $\sin(\angle KNZ) = \sin(\angle LNZ) = \frac{LZ}{NZ} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 7) По теореме синусов $2R = \frac{KZ}{\sin(\angle KNZ)} = \frac{4\sqrt{10}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 10\sqrt{2} \Rightarrow R = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Задача 6. Объём атомного ядра равен объёму куба со стороной 5,05 фм. Чему равно массовое число для данного атома химического элемента? Что это за элемент? Константа $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Ответ округлить до целых. (7 баллов)

Решение:

Радиус ядра атома можно оценить по следующей формуле:

$$R = r_0 A^{1/3}$$

В первом приближении ядро можно представить как шар. Тогда его объём равен:

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$$

Объём куба равен:

$$V_{\text{к}} = a^3$$

Приравняв объёмы, выразим массовое число:

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A = a^3 = V_{\text{к}}$$



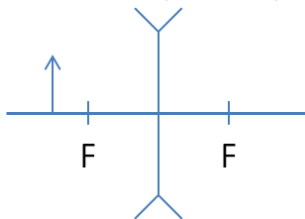
$$A = \frac{3a^3}{4\pi r_0^3}$$

Подставим численные значения:

$$A = \frac{3 \cdot (5,05 \cdot 10^{-15})^3}{4 \cdot \pi \cdot (1,3 \cdot 10^{-15})^3} \approx 14$$

Ответ: массовое число равно 14; это атом азота.

Задача 7. Школьник при подготовке к опыту с линзой, оптическая сила которой равна 5 дптр, использовал формулу тонкой линзы в следующем виде: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Он выяснил, каким будет расстояние от линзы до изображения при расстоянии от предмета до линзы 25 см. Затем он собрал установку на оптической скамье, чтобы проверить выкладки. Какое изображение и на каком расстоянии от линзы он получит, если схема собранной им оптической системы представлена ниже? Ответ укажите в см и округлите до целых. (7 баллов)



Решение:

Формула тонкой линзы в общем виде выглядит следующим образом:

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F}$$

Здесь $+d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает расходящийся пучок лучей; $-d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает сходящийся пучок лучей; $+f$ – расстояние от действительного изображения до линзы; $-f$ – расстояние от мнимого изображения до линзы; $+F$ – фокусное расстояние собирающей линзы; $-F$ – фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Формуле, которую использовал школьник, относится к собирающей линзе, которая даёт действительное изображение, а схема собрана для рассеивающей линзы, изображение которой всегда мнимое прямое уменьшенное. Таким образом, формула должна быть записана иначе:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

Связь между оптической силой линзы и фокусным расстоянием:

$$D = \frac{1}{F}$$

Тогда расстояние между линзой и изображением:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + D = \frac{1 + dD}{d}$$
$$f = \frac{d}{1 + dD}$$

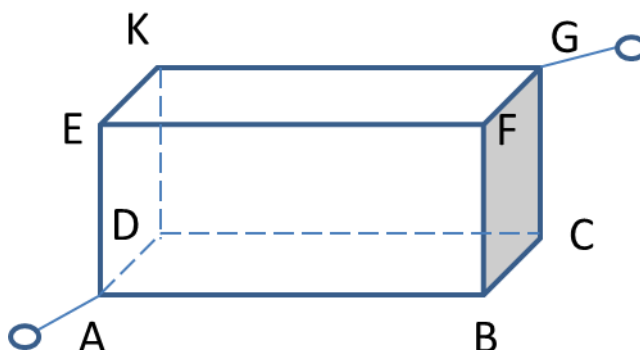
Подставим численные значения:

$$f = \frac{0,25}{1 + 0,25 \cdot 5} \approx 0,11 \text{ м} = 11 \text{ см}$$

Ответ: это будет мнимое прямое уменьшенное изображение на расстоянии от линзы примерно 11 см.



Задача 8. Из бронзовой проволоки диаметром 1,5 мм сделан параллелограмм со сторонами 5 см и 10 см. Чему равно его эквивалентное сопротивление? Удельное сопротивление бронзы $9,5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, плотность бронзы 8700 кг/м^3 . Ответ дайте с точностью до сотых долей кОм. (10 баллов)



Решение:

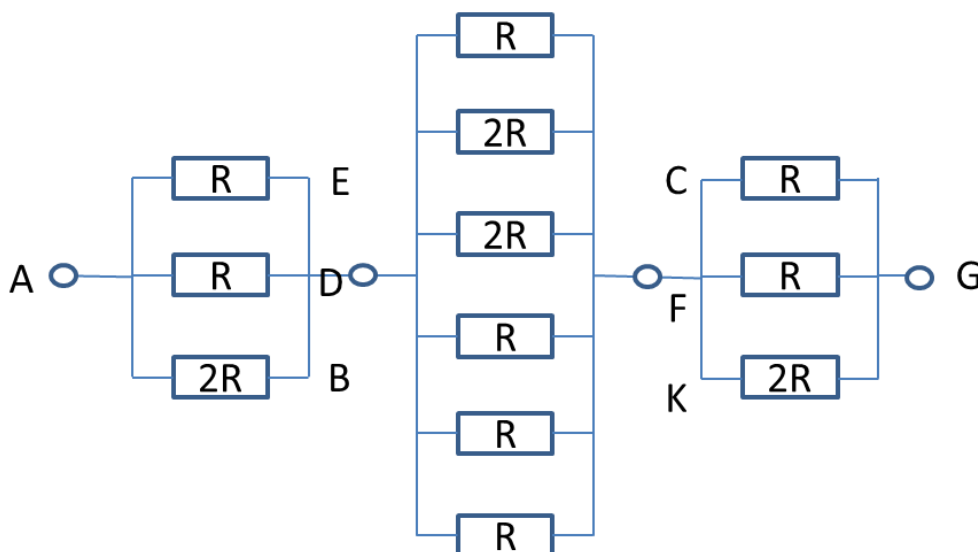
Сначала определим сопротивление рёбер параллелограмма. Для коротких рёбер оно составит:

$$R_K = \rho \frac{l}{S} = R$$

Для длинных рёбер оно составит:

$$R_D = \rho \frac{2l}{S} = 2R$$

Ток, дойдя до точки А, распределяется между тремя рёбрами параллелограмма. Так как сопротивление ребра АВ в два раза больше, чем сопротивления рёбер AD и AE, то сила тока, текущего по нему, в два раза меньше, чем сила тока, текущего по рёбрам AD и AE. Учтём, что напряжение на концах участка цепи без ЭДС равно произведению силы тока, текущего по участку, на его сопротивление. Тогда очевидно, что напряжения на рёбрах АВ, AD и AE одинаковы, значит потенциалы точек В, D и Е равны. Из соображений симметрии то же самое можно сказать про потенциалы точек С, F и К. В результате получим, что рёбра АВ, AD и AE «соединяются» в одной точке, а рёбра CG, FG и KG «соединяются» в другой точке. Между этими двумя точками находятся остальные шесть рёбер. Тогда эквивалентная схема будет выглядеть следующим образом:





Вспомнив, чему равно сопротивление последовательно и параллельно соединённых резисторов, запишем эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_{\Sigma} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1}$$
$$R_{\Sigma} = \left(\frac{5}{2R}\right)^{-1} + \left(\frac{10}{2R}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2R}\right)^{-1} = \frac{2R}{5} + \frac{2R}{10} + \frac{2R}{5} = \frac{5R}{5} = R$$
$$R_{\Sigma} = R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Подставим численные значения:

$$R_{\Sigma} = R = \rho \frac{4l}{\pi d^2} = 9,5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2} \approx 2,69 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = 2,69 \text{ мОм}$$

Ответ: эквивалентное сопротивление составляет 2,69 мОм.

Задача 9. По железному проводу диаметром 1,5 мм и длиной 1 м течёт ток 5 А. Провод находится при комнатной температуре. Чему равен коэффициент теплоотдачи через полчаса, если известно, что в окружающую среду провод отдаёт 10 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током? Удельное сопротивление железа $1 \cdot 10^{-7}$ Ом·м, плотность железа 7800 кг/м^3 , удельная теплоёмкость железа 460 Дж/(кг·К) . (13 баллов)

Решение:

Мощность тепловых потерь определяется по формуле:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}},$$

где α – искомый коэффициент теплоотдачи, T – температура, до которой нагрелся провод, $T_{\text{окр}}$ – температура окружающей среды, $S_{\text{пов}}$ – площадь поверхности провода.

Теплота, выделяемая в проводнике с током, определяется по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t,$$

где I – сила тока, протекающего по проводу, R – сопротивление провода, t – время, в течение которого шёл ток.

Сопротивление задаётся через параметры самого провода:

$$R = \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}},$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина провода, $S_{\text{сеч}}$ – площадь поперечного сечения провода.

Известно, что при прохождении электрического тока по проводу происходит превращение электрической энергии в тепловую. При этом по закону сохранения энергии количество теплоты, выделяемое в проводнике с током, будет равно работе электрического тока. Тогда можно записать выражение для мощности электрического тока:

$$N = I^2 R$$

Теперь учтём, что в окружающую среду провод отдаёт 10 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током, и запишем соответствующее равенство:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}} = kI^2 R = kI^2 \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}} = kN$$

Заменим площадь поперечного сечения провода и площадь поверхности провода соответствующими формулами:

$$\alpha(T - T_{\text{окр}})\pi d l = kI^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Отсюда выразим искомый коэффициент теплоотдачи α :



$$\alpha = \frac{4kI^2\rho}{\pi^2 d^3(T - T_{\text{окр}})}$$

Теперь найдём температуру, до которой нагрелся провод. Для этого определим, как сильно нагреется провод при протекании электрического тока (часть этой теплоты впоследствии выделится через поверхность провода в окружающую среду):

$$Q = I^2 R t = c m (T - T_{\text{окр}})$$
$$T = \frac{I^2 R t}{c m} + T_{\text{окр}} = \frac{I^2 \rho l t}{c m S_{\text{сеч}}} + T_{\text{окр}} = \frac{4I^2 \rho l t}{c m \pi d^2} + T_{\text{окр}}$$

Подставим температуру в выражение для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{4kI^2\rho}{\pi^2 d^3 \frac{4I^2 \rho l t}{c m \pi d^2}} = \frac{c m k}{\pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} l S_{\text{сеч}} k}{\pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} l \pi d^2 k}{4 \pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} d k}{4 t}$$

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

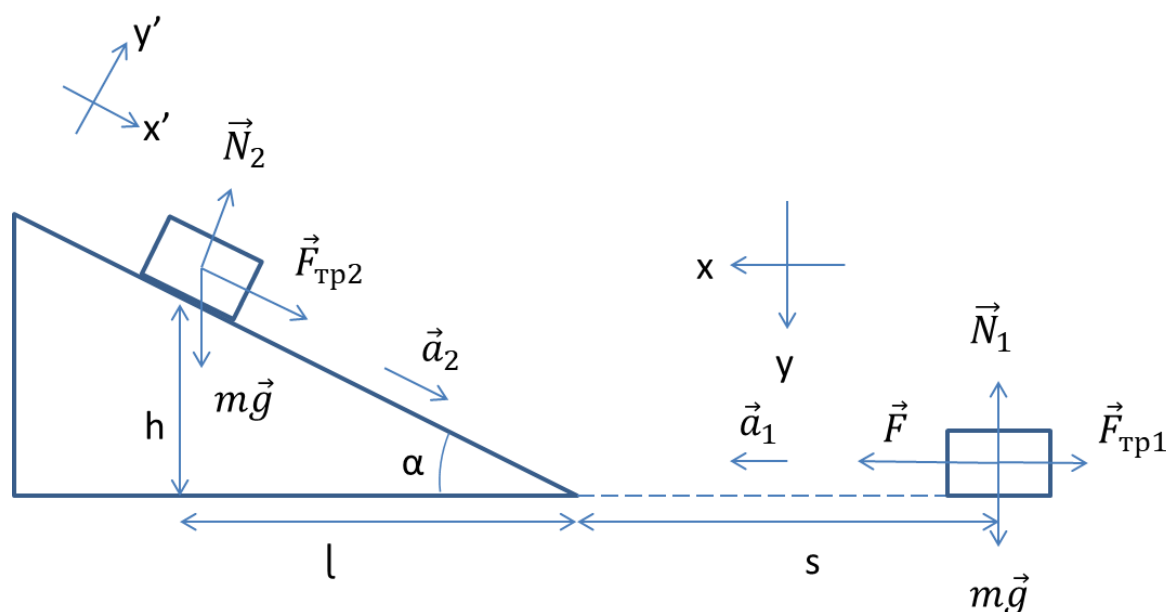
$$\alpha = \frac{460 \cdot 7800 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{4 \cdot 0,5 \cdot 60 \cdot 60} = 0,07475 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = 74,75 \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$$

Ответ: коэффициент теплоотдачи равен 74,75 мВт/(м²·К).

Задача 10. Лыжник разогнался перед склоном на горизонтальной заснеженной поверхности, коэффициент трения которой равен 0,2. После въезда на склон он прекратил разгон и двигался по инерции до полной остановки. С какой силой лыжник приводил себя в движение? Масса лыжника 80 кг, коэффициент трения склона равен 0,3, высота подъёма над горизонтом h в два раза меньше расстояния l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию, ускорение свободного падения 9,8 кг/с². Ответ округлить до десятых. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисует схематичный рисунок к условию задачи:



Для начала запишем второй закон Ньютона в векторном виде для горизонтального участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр1}} + \vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1$$



Теперь проецируем это уравнение на оси $0x$ и $0y$:

$$\begin{cases} 0x: F - F_{\text{тр}1} = ma_1 \\ 0y: mg - N_1 = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на горизонтальном участке пути:

$$N_1 = mg$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$$

Далее запишем второй закон Ньютона в векторном виде для наклонного участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2$$

Теперь проецируем это уравнение на оси $0x'$ и $0y'$:

$$\begin{cases} 0x': F_{\text{тр}2} - mg \sin \alpha = ma_2 \\ 0y': N_2 - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на наклонном участке пути:

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha$$

Далее найдём работу против силы трения на наклонном участке пути, учтём, что пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию:

$$A = F_{\text{тр}2} s = \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s$$

Работа равнодействующей силы на горизонтальном участке пути преобразуется в кинетическую энергию, которая частично расходуется на работу против силы трения на наклонном участке пути, а частично превращается в потенциальную энергию:

$$A = F_{\Sigma} s = (F - F_{\text{тр}1}) s = (F - \mu_1 mg) s$$

$$A = (F - \mu_1 mg) s = mgh + \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s$$

$$F = \frac{mgh + \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s + \mu_1 mg \cdot s}{s} = mg \frac{h}{s} + \mu_2 mg \cos \alpha + \mu_1 mg$$

$$F = mg(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha + \mu_1)$$

Так как по условию высота подъёма над горизонтом h в два раза меньше расстояния l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, то угол наклонной плоскости α равен 30° .

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

$$F = 80 \cdot 9,8 \cdot (\sin 30 + 0,3 \cdot \cos 30 + 0,2) \approx 752,5 \text{ Н}$$

Ответ: лыжник приводил себя в движение с силой 752,5 Н



ВАРИАНТ 2

Задача 1 (6 баллов).

Числа 2^{2024} и 5^{2024} записаны в десятичном виде друг за другом. Найти количество выписанных цифр.

Решение:

Пусть k – количество цифр в числе 2^{2024} , а l – количество цифр в числе 5^{2024} . Так как для любого положительного числа x верно: $10^{a-1} < x < 10^a$ (например, $10^3 < 5678 < 10^4$), то:

$$10^{k-1} < 2^{2024} < 10^k \text{ и } 10^{l-1} < 5^{2024} < 10^l \Rightarrow \\ 10^{k-1} \cdot 10^{l-1} < 2^{2024} \cdot 5^{2024} < 10^k \cdot 10^l \Rightarrow 10^{k+l-2} < 10^{2024} < 10^{k+l}$$

Тогда:

$$\begin{cases} k + l > 2024 \\ k + l - 2 < 2024 \end{cases} \Rightarrow k + l = 2025$$

Ответ: 2025.

Задача 2 (6 баллов).

Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана формулой: $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$. Известно, что $x_6 = 3$. Найти частное $\frac{x_{2025}}{x_{2024}}$.

Решение:

Составим и решим уравнение: $3 = \frac{3-x_5}{1-x_5}$, откуда $x_5 = 0$. Тогда $0 = \frac{3-x_4}{1-x_4}$, откуда $x_4 = 3$. Можно заметить закономерность, что каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный – 3. Следовательно, заданное частное будет равно 0.

Ответ: 0.

Задача 3 (8 баллов).

На нефтяном промысле находятся кустовые площадки, на которых располагаются скважины. Количество нефти, получаемое с каждой скважины в единицу времени (дебит) в процессе разработки месторождения, снижается. В начале дебит каждой скважины был постоянным, но каждый год он снижался на 20 %. Чтобы поддерживать уровень добычи на одном и том же уровне, компания планирует бурить ежегодно одинаковое количество новых скважин. Определите отношение числа скважин, которые были первоначально пробурены, к суммарному числу скважин, которое компания пробурит в течение 4 лет. Ответ округлить до сотых.

**Решение:**

Пусть Q – дебит одной скважины, т/сут, n – число скважин, которые были пробурены первоначально, ед., k – число скважин, которые бурятся ежегодно, ед. Составим таблицу:

Год	Дебит, т/сут	Количество скважин, ед.	Общий уровень добычи, т/сут
1	Q	n	nQ
2	$0,8 \cdot Q$	$n + k$	$0,8 \cdot Q \cdot (n + k)$
3	$0,8^2 \cdot Q$	$n + 2k$	$0,8^2 \cdot Q \cdot (n + 2k)$
4	$0,8^3 \cdot Q$	$n + 3k$	$0,8^3 \cdot Q \cdot (n + 3k)$

Тогда условие задачи можно записать в виде математической модели:

$$nQ = 0,8^3 \cdot Q \cdot (n + 3k)$$

$$n \cdot (1 - 0,8^3) = 0,8^3 \cdot 3k$$

$$\frac{n}{3k} = \frac{0,8^3}{(1 - 0,8^3)} = \frac{0,512}{1 - 0,512} = \frac{0,512}{0,488} = 1,05$$

Ответ: 1,05.

Задача 4 (15 баллов).

В убывающей арифметической прогрессии сумма первых десяти членов равна сумме первых трех членов геометрической прогрессии. Первые члены заданных прогрессий равны. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если модуль частного первого члена и разности арифметической прогрессии равен 5.

Решение:

Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$$

Сумма первых трех членов геометрической прогрессии:

$$S_3 = \frac{b_1(1 - q^3)}{1 - q} = b_1(1 + q + q^2) = a_1(1 + q + q^2),$$

тогда

$$10a_1 + 45d = a_1(1 + q + q^2) \Rightarrow 10\frac{a_1}{d} + 45 = \frac{a_1}{d}(1 + q + q^2)$$



$$10 \frac{a_1}{d} + 45 = \frac{a_1}{d} (1 + q + q^2) \Rightarrow \frac{a_1}{d} (q + q^2) - 9 \frac{a_1}{d} - 45 = 0$$

Если $\frac{a_1}{d} = -5$, то

$$\frac{a_1}{d} (q + q^2) + 45 - 45 = 0 \Rightarrow q + q^2 = 0 \Rightarrow q(1 + q) = 0 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ или } q_2 = -1.$$

Если $\frac{a_1}{d} = 5$, то

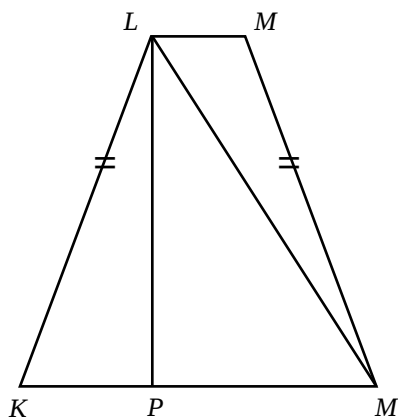
$$\frac{a_1}{d} (q + q^2) - 45 - 45 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{d} (q + q^2) - 90 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 1 + 72 = 73 \Rightarrow$$

$$q_3 = \frac{-1 + \sqrt{73}}{2} \text{ или } q_4 = \frac{-1 - \sqrt{73}}{2}$$

Ответ: $-1, \frac{-1 + \sqrt{73}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{73}}{2}$

Задача 5 (15 баллов).

В равнобедренной трапеции $KLMN$ меньшее основание $LM = 2$, большее – $KN = 10$. Высота трапеции равна 12. Найти радиус окружности, описанной вокруг трапеции.



Решение:

- 1) Окружность можно описать только около равнобедренной трапеции, т.е. $KL = MN$.
- 2) Для равнобедренной трапеции $KP = \frac{KN - LM}{2} = \frac{10 - 2}{2} = 4$, $PN = 10 - 4 = 6$.
- 3) По теореме Пифагора $KL = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$, $NL = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$.
- 4) Радиус окружности, описанной около трапеции $KLMN$ равен радиусу окружности, описанной около $\triangle LMN$.
- 5) $\sin(\angle LMN) = \sin(\angle LKN) = \frac{LP}{KL} = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$
- 6) По теореме синусов $2R = \frac{LN}{\sin(\angle LMN)} = \frac{6\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 10\sqrt{2} \Rightarrow$

$$R = 5\sqrt{2}$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Задача 6. Объём атомного ядра равен объёму цилиндра высотой 2,93 фм и диаметром основания 4 фм. Чему равно массовое число для данного атома химического элемента? Что это за элемент? Константа $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Ответ округлить до целых. (7 баллов)

Решение:



Радиус ядра атома можно оценить по следующей формуле:

$$R = r_0 A^{1/3}$$

В первом приближении ядро можно представить как шар. Тогда его объём равен:

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

Объём цилиндра равен:

$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$$

Приравняв объёмы, выразим массовое число:

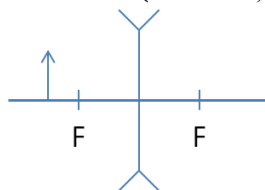
$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A = \pi r^2 h = V_{\text{ц}}$$
$$A = \frac{3r^2 h}{4r_0^3}$$

Подставим численные значения:

$$A = \frac{3 \cdot (4 \cdot 10^{-15})^2 \cdot 2,93 \cdot 10^{-15}}{4 \cdot (1,3 \cdot 10^{-15})^3} \approx 16$$

Ответ: массовое число равно 16; это атом кислорода.

Задача 7. Школьник при подготовке к опыту с линзой, оптическая сила которой равна 4 дптр, использовал формулу тонкой линзы в следующем виде: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Он выяснил, каким будет расстояние от линзы до изображения при расстоянии от предмета до линзы 40 см. Затем он собрал установку на оптической скамье, чтобы проверить выкладки. Какое изображение и на каком расстоянии от линзы он получит, если схема собранной им оптической системы представлена ниже? Ответ укажите в см и округлите до целых. (7 баллов)



Решение:

Формула тонкой линзы в общем виде выглядит следующим образом:

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F}$$

Здесь +d – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает расходящийся пучок лучей; -d – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает сходящийся пучок лучей; +f – расстояние от действительного изображения до линзы; -f – расстояние от мнимого изображения до линзы; +F – фокусное расстояние собирающей линзы; -F – фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Формуле, которую использовал школьник, относится к собирающей линзе, которая даёт действительное изображение, а схема собрана для рассеивающей линзы, изображение которой всегда мнимое прямое уменьшенное. Таким образом, формула должна быть записана иначе:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

Связь между оптической силой линзы и фокусным расстоянием:

$$D = \frac{1}{F}$$



Тогда расстояние между линзой и изображением:

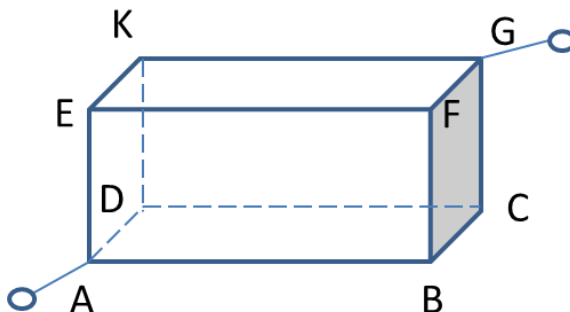
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + D = \frac{1 + dD}{d}$$
$$f = \frac{d}{1 + dD}$$

Подставим численные значения:

$$f = \frac{0,4}{1 + 0,4 \cdot 4} \approx 0,15 \text{ м} = 15 \text{ см}$$

Ответ: это будет мнимое прямое уменьшенное изображение на расстоянии от линзы примерно 15 см.

Задача 8. Из нейзильберовой проволоки диаметром 2,5 мм сделан параллелограмм со сторонами 4 см и 8 см. Чему равно его эквивалентное сопротивление? Удельное сопротивление нейзильбера $2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м, плотность нейзильбера 8100 кг/м^3 . Ответ дайте с точностью до сотых долей мОм. (10 баллов)



Решение:

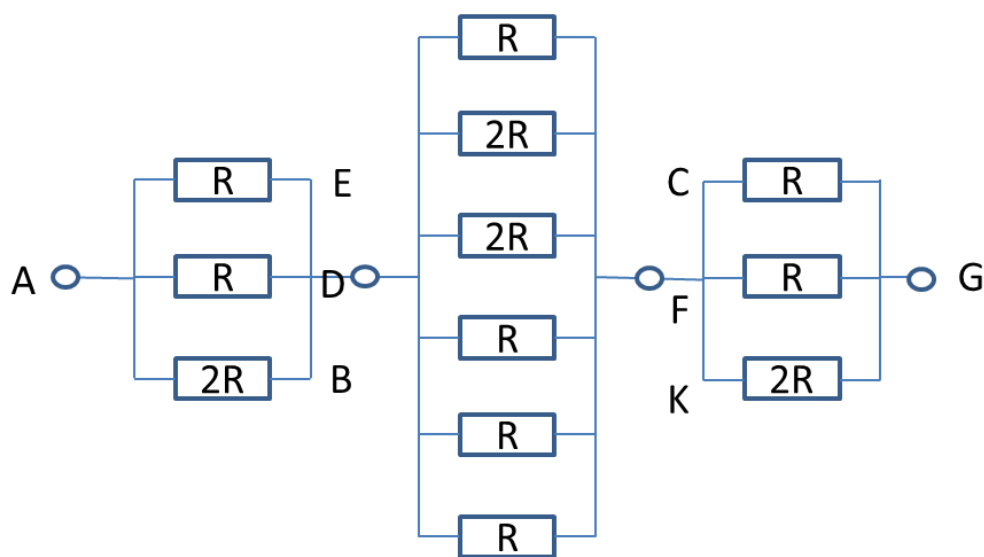
Сначала определим сопротивление рёбер параллелограмма. Для коротких рёбер оно составит:

$$R_K = \rho \frac{l}{S} = R$$

Для длинных рёбер оно составит:

$$R_D = \rho \frac{2l}{S} = 2R$$

Ток, дойдя до точки А, распределяется между тремя рёбрами параллелограмма. Так как сопротивление ребра АВ в два раза больше, чем сопротивления рёбер AD и AE, то сила тока, текущего по нему, в два раза меньше, чем сила тока, текущего по рёбрам AD и AE. Учтём, что напряжение на концах участка цепи без ЭДС равно произведению силы тока, текущего по участку, на его сопротивление. Тогда очевидно, что напряжения на рёбрах АВ, AD и AE одинаковы, значит потенциалы точек В, D и Е равны. Из соображений симметрии то же самое можно сказать про потенциалы точек С, F и К. В результате получим, что рёбра АВ, AD и AE «соединяются» в одной точке, а рёбра CG, FG и KG «соединяются» в другой точке. Между этими двумя точками находятся остальные шесть рёбер. Тогда эквивалентная схема будет выглядеть следующим образом:



Вспомнив, чему равно сопротивление последовательно и параллельно соединённых резисторов, запишем эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_{\Sigma} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1}$$
$$R_{\Sigma} = \left(\frac{5}{2R} \right)^{-1} + \left(\frac{10}{2R} \right)^{-1} + \left(\frac{5}{2R} \right)^{-1} = \frac{2R}{5} + \frac{2R}{10} + \frac{2R}{5} = \frac{5R}{5} = R$$
$$R_{\Sigma} = R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Подставим численные значения:

$$R_{\Sigma} = R = \rho \frac{4l}{\pi d^2} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-3})^2} = 1,63 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = 1,63 \text{ мОм}$$

Ответ: эквивалентное сопротивление составляет 1,63 мОм.

Задача 9. По серебряному проводу диаметром 0,5 мм и длиной 1,5 м течёт ток 7 А. Провод находится при комнатной температуре. Чему равен коэффициент теплоотдачи через час, если известно, что в окружающую среду провод отдаёт 5 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током? Удельное сопротивление серебра $1,5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, плотность серебра 10500 кг/м^3 , удельная теплоёмкость серебра $235,4 \text{ Дж/(кг·К)}$. (13 баллов)

Решение:

Мощность тепловых потерь определяется по формуле:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}},$$

где α – искомый коэффициент теплоотдачи, T – температура, до которой нагрелся провод, $T_{\text{окр}}$ – температура окружающей среды, $S_{\text{пов}}$ – площадь поверхности провода.

Теплота, выделяемая в проводнике с током, определяется по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t,$$

где I – сила тока, протекающего по проводу, R – сопротивление провода, t – время, в течение которого шёл ток.

Сопротивление задаётся через параметры самого провода:



$$R = \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}},$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина провода, $S_{\text{сеч}}$ – площадь поперечного сечения провода. Известно, что при прохождении электрического тока по проводу происходит превращение электрической энергии в тепловую. При этом по закону сохранения энергии количество теплоты, выделяемое в проводнике с током, будет равно работе электрического тока. Тогда можно записать выражение для мощности электрического тока:

$$N = I^2 R$$

Теперь учтём, что в окружающую среду провод отдаёт 10 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током, и запишем соответствующее равенство:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}} = kI^2 R = kI^2 \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}} = kN$$

Заменим площадь поперечного сечения провода и площадь поверхности провода соответствующими формулами:

$$\alpha(T - T_{\text{окр}})\pi dl = kI^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Отсюда выразим искомый коэффициент теплоотдачи α :

$$\alpha = \frac{4kI^2 \rho}{\pi^2 d^3 (T - T_{\text{окр}})}$$

Теперь найдём температуру, до которой нагрелся провод. Для этого определим, как сильно нагреется провод при протекании электрического тока (часть этой теплоты впоследствии выделится через поверхность провода в окружающую среду):

$$Q = I^2 R t = cm(T - T_{\text{окр}})$$

$$T = \frac{I^2 R t}{cm} + T_{\text{окр}} = \frac{I^2 \rho l t}{cm S_{\text{сеч}}} + T_{\text{окр}} = \frac{4I^2 \rho l t}{cm \pi d^2} + T_{\text{окр}}$$

Подставим температуру в выражение для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{4kI^2 \rho}{\pi^2 d^3 \frac{4I^2 \rho l t}{cm \pi d^2}} = \frac{cmk}{\pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} l S_{\text{сеч}} k}{\pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} l \pi d^2 k}{4 \pi d l t} = \frac{c \rho_{\text{пл}} d k}{4 t}$$

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

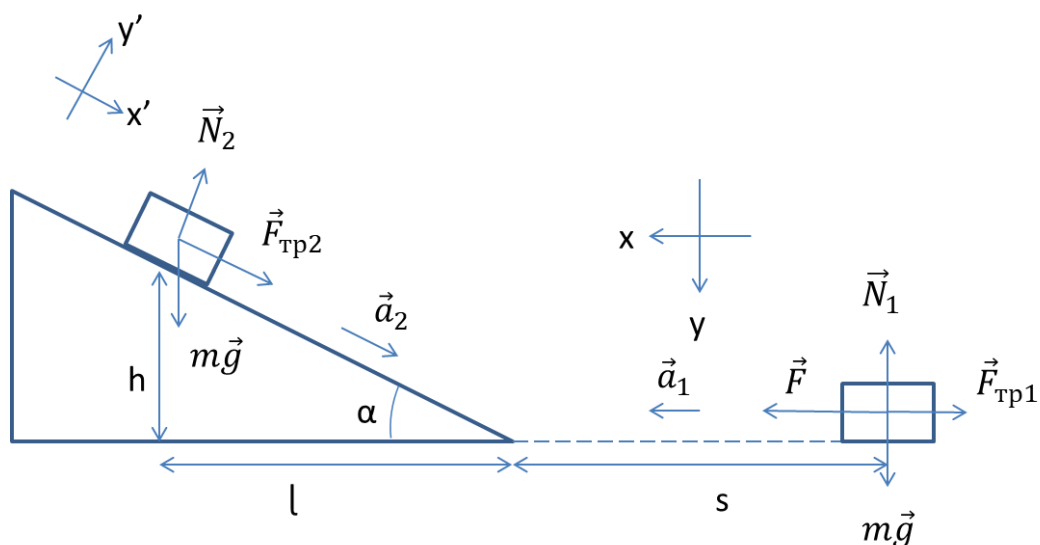
$$\alpha = \frac{235,4 \cdot 10500 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05}{4 \cdot 1 \cdot 60 \cdot 60} \approx 4,29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = 4,29 \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$$

Ответ: коэффициент теплоотдачи равен $4,29 \text{ мВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Задача 10. Лыжник разогнался перед склоном на горизонтальной заснеженной поверхности, коэффициент трения которой равен 0,3. После въезда на склон он прекратил разгон и двигался по инерции до полной остановки. С какой силой лыжник приводил себя в движение? Масса лыжника 70 кг, коэффициент трения склона равен 0,2, высота подъёма над горизонтом h в равна расстоянию l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию, ускорение свободного падения $9,8 \text{ кг/с}^2$. Ответ округлить до десятых. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисуем схематичный рисунок к условию задачи:



Для начала запишем второй закон Ньютона в векторном виде для горизонтального участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1$$

Теперь проецируем это уравнение на оси $0x$ и $0y$:

$$\begin{cases} 0x: F - F_{\text{тр}1} = ma_1 \\ 0y: mg - N_1 = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на горизонтальном участке пути:

$$N_1 = mg$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$$

Далее запишем второй закон Ньютона в векторном виде для наклонного участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2$$

Теперь проецируем это уравнение на оси $0x'$ и $0y'$:

$$\begin{cases} 0x': F_{\text{тр}2} - mg \sin \alpha = ma_2 \\ 0y': N_2 - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на наклонном участке пути:

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha$$

Далее найдём работу против силы трения на наклонном участке пути, учтём, что пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию:

$$A = F_{\text{тр}2} s = \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s$$

Работа равнодействующей силы на горизонтальном участке пути преобразуется в кинетическую энергию, которая частично расходуется на работу против силы трения на наклонном участке пути, а частично превращается в потенциальную энергию:

$$A = F_{\Sigma} s = (F - F_{\text{тр}1}) s = (F - \mu_1 mg) s$$

$$A = (F - \mu_1 mg) s = mgh + \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s$$

$$F = \frac{mgh + \mu_2 mg \cos \alpha \cdot s + \mu_1 mg \cdot s}{s} = mg \frac{h}{s} + \mu_2 mg \cos \alpha + \mu_1 mg$$
$$F = mg(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha + \mu_1)$$

Так как по условию высота подъёма над горизонтом h равна расстоянию l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, то угол наклонной плоскости α равен 45° . Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

$$F = 70 \cdot 9,8 \cdot (\sin 45 + 0,2 \cdot \cos 45 + 0,3) \approx 787,9 \text{ Н}$$

Ответ: лыжник приводил себя в движение с силой 787,9 Н



ВАРИАНТ 3

Задача 1 (6 баллов).

Найти произведение остатков от деления чисел 2025^{2024} и 2024^{2025} на 7.

Решение:

Возведение числа в степень можно заменить на возведение его остатка от деления в степень:
 $2025 = 7 \cdot 289 + 2$, следовательно, 2025^{2024} имеет такой же остаток от деления на 7, как и 2^{2024} :

$$2^1:7 = 0 \text{ ост } 2; 2^2:7 = 0 \text{ ост } 4; 2^3:7 = 1 \text{ ост } 1;$$

$$2^4:7 = 2 \text{ ост } 2; 2^5:7 = 4 \text{ ост } 4; 2^6:7 = 9 \text{ ост } 1$$

Так как остаток от деления 2^{2024} на 3 равен остатку от деления 2 и 5 на 3, то остаток от деления 2^{2024} на 7 равен 4.

Так как $2024 = 7 \cdot 289 + 1$, то второе слагаемое имеет такой же остаток от деления на 7, как и 1^{2025} , то есть 1. В итоге произведение остатков от деления данных чисел на 7 равно 4.

Ответ: 4.

Задача 2 (6 баллов).

Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана формулой: $x_{n-1} = f(x_n)$, где $f(x) = \frac{12-x}{1-x}$.

Известно, что $x_{24} = 12$. Найти частное $\frac{x_{2025}}{x_{2024}}$.

Решение:

Составим и решим уравнение: $12 = \frac{12-x_{25}}{1-x_{25}}$, откуда $x_{25} = 0$. Тогда $0 = \frac{12-x_{26}}{1-x_{26}}$, откуда $x_{26} = 12$.

Можно заметить закономерность, что каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный – 12. Следовательно, заданное отношение будет равно 0.

Ответ: 0.

Задача 3 (8 баллов).

На нефтеперерабатывающем заводе проводится серия технологических операций над образцом нефти. После каждой операции масса образца уменьшается на 30% и еще 1 килограмм. Всего объема нефти хватило на 4 операции. Сколько килограммов нефти было в образце первоначально?



Определите с точностью до целого.

Решение:

Пусть начальная масса нефти x килограмм, тогда составим таблицу:

Номер операции	Начальная масса, кг	Стало, кг
1	x	$0,7x - 1$
2	$0,7x - 1$	$0,7(0,7x - 1) - 1$
3	$0,7(0,7x - 1) - 1$	$0,7(0,7(0,7x - 1) - 1) - 1$
4	$0,7(0,7(0,7x - 1) - 1) - 1$	$0,7(0,7(0,7(0,7x - 1) - 1) - 1) - 1$

Следовательно, математическая модель будет выглядеть так:

$$0,7^4 \cdot x - (1 + 0,7 + \dots + 0,7^3) = 0$$

Тогда

$$x = \frac{(1 + 0,7 + \dots + 0,7^3)}{0,7^4} = \frac{(0,7^4 - 1)}{0,7^4 \cdot (0,7 - 1)} = 11 \text{ кг}$$

Ответ: 11 кг.

Задача 4 (15 баллов).

Известно, что некоторые три числа a_1, a_2, a_3 образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а $a_1 + 12, a_2 + 1, a_3 - 2$ - геометрическую. При этом $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.
Найти a_1 .

Решение:

Воспользуемся формулами для арифметических и геометрических прогрессий:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Rightarrow d = 4 - a_1$$

Так как по условию разность арифметической прогрессии больше нуля, то первый член прогрессии должен быть меньше 4.

Для геометрической прогрессии справедливо:

$$\frac{a_2 + 1}{a_1 + 12} = \frac{a_3 - 2}{a_2 + 1} \Rightarrow (a_2 + 1)^2 = (a_1 + 12)(a_3 - 2)$$



Так как $a_2 = d + 1$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_1 = 4 - d$, то

$$(a_1 + d + 1)^2 = (a_1 + 12)(a_1 + 2d - 2) \Rightarrow 5^2 = (a_1 + 12)(6 - a_1)$$

$$25 = 6a_1 - a_1^2 + 72 - 12a_1 \Rightarrow a_1^2 + 6a_1 - 47 = 0$$

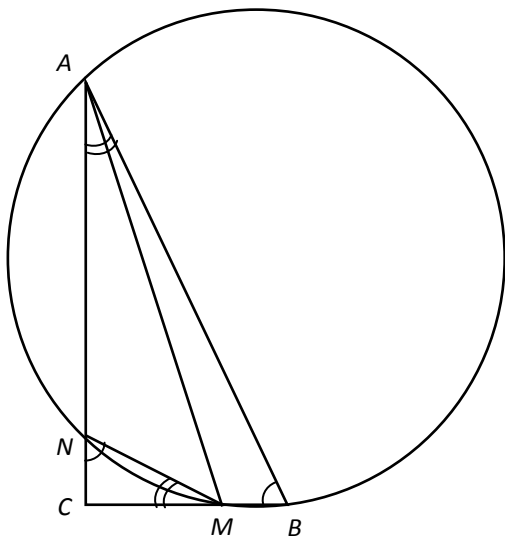
$$D = 6^2 + 4 \cdot 1 \cdot 47 = 224 \Rightarrow \sqrt{D} = 4\sqrt{14} \Rightarrow a_1 = \frac{-6+4\sqrt{14}}{2} = -3 + 2\sqrt{14} \text{ или } a_1 = \frac{-6-4\sqrt{14}}{2} = -3 - 2\sqrt{14}$$

Так как арифметическая прогрессия возрастает, то $a_1 = -3 + 2\sqrt{14}$.

Ответ: $-3 + 2\sqrt{14}$.

Задача 5 (15 баллов).

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катете AC отмечена точка N , которая делит его в отношении 5:1, считая от точки A , а на катете CB — точка M , которая делит его в отношении 2:1, считая от точки C . При этом, $CN = BM = 1$. Доказать, что вокруг четырехугольника $ANMB$ можно описать окружность и найти её радиус.



Решение:

1) $CN = \frac{1}{6}AC = 1 \Rightarrow AC = 6$; $BM = \frac{1}{3}CB = 1 \Rightarrow CM = 2$; $CB = 3$.

2) В $\triangle ABC$ и $\triangle MNC$ отношение сторон $\frac{AC}{CM} = \frac{CB}{CN} = 3$, $\angle C$ — общий. Следовательно, треугольники $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

3) $\angle CNM = \angle ABC \Rightarrow \angle ANM + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle CMN = \angle CAB \Rightarrow \angle NMB + \angle CBA = 180^\circ$. Следовательно, вокруг четырехугольника $ANMB$ можно описать окружность.

4) Радиус окружности, описанной около

четырехугольника $ANMB$ равен радиусу окружности, описанной около $\triangle AMN$.

5) По теореме Пифагора $AM = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, $NM = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

6) $\sin(\angle ANM) = \sin(\angle CNM) = \frac{CM}{NM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

7) По теореме синусов $2R = \frac{AM}{\sin(\angle ANM)} = \frac{2\sqrt{10}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = 2,5\sqrt{2}$

Ответ: $2,5\sqrt{2}$



Задача 6. Сколько ядер атома азота может вместить в себя объём, равный объёму куба со стороной 0,0505 пм. Константа $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Ответ округлить до десятых. (7 баллов)

ПЕРИОДЫ	Г Р У П П Ы Э Л Е М Е Н Т О В																VIII	B
	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	A	VII	B	A	VII	B	A	VII		
1	(H)																	
2	Li Литий		Be Бериллий		B Бор		C Углерод		N Азот		O Кислород		F Фтор		Ne Неон			
3	Na Натрий		Mg Магний		Al Алюминий		Si Кремний		P Фосфор		S Сера		Cl Хлор		Ar Аргон			

Решение:

Радиус ядра атома можно оценить по следующей формуле:

$$R = r_0 A^{1/3}$$

В первом приближении ядро можно представить как шар. Тогда его объём равен:

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

Объём куба равен:

$$V_{\text{к}} = a^3$$

Искомое число атомов будет равно отношению объёмов куба и шара:

$$N = \frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{я}}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{a^3}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3a^3}{4\pi r_0^3 A}$$

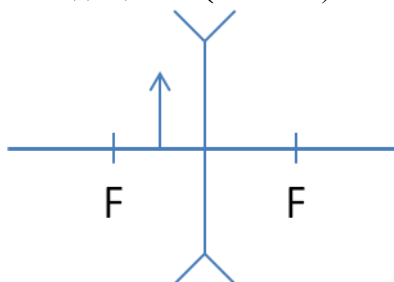
$$N = \frac{3a^3}{4\pi r_0^3 A}$$

Подставим численные значения:

$$N = \frac{3 \cdot (5,05 \cdot 10^{-14})^3}{4 \cdot \pi \cdot (1,3 \cdot 10^{-15})^3 \cdot 14} \approx 999,6$$

Ответ: такой объём может вместить 999,6 атомов азота.

Задача 7. Школьник при подготовке к опыту с линзой, оптическая сила которой равна 3 дптр, использовал формулу тонкой линзы в следующем виде: $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Он выяснил, каким будет расстояние от линзы до изображения при расстоянии от предмета до линзы 25 см. Затем он собрал установку на оптической скамье, чтобы проверить выкладки. Какое изображение и на каком расстоянии от линзы он получит, если схема собранной им оптической системы представлена ниже? Ответ укажите в см и округлите до целых. (7 баллов)



Решение:

Формула тонкой линзы в общем виде выглядит следующим образом:



$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F}$$

Здесь $+d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает расходящийся пучок лучей; $-d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает сходящийся пучок лучей; $+f$ – расстояние от действительного изображения до линзы; $-f$ – расстояние от мнимого изображения до линзы; $+F$ – фокусное расстояние собирающей линзы; $-F$ – фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Формуле, которую использовал школьник, относится к собирающей линзе, которая даёт мнимое прямое увеличенное изображение, а схема собрана для рассеивающей линзы, изображение которой всегда мнимое прямое уменьшенное. Таким образом, формула должна быть записана иначе:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

Связь между оптической силой линзы и фокусным расстоянием:

$$D = \frac{1}{F}$$

Тогда расстояние между линзой и изображением:

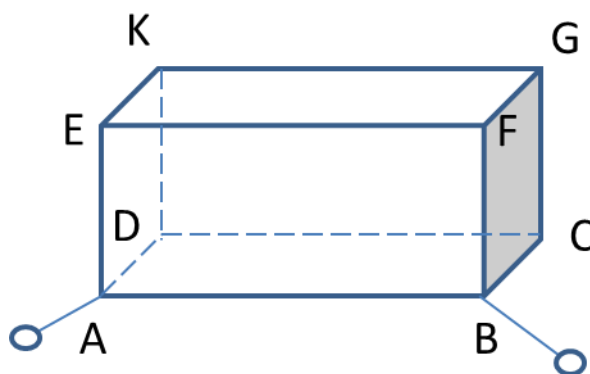
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + D = \frac{1 + dD}{d}$$
$$f = \frac{d}{1 + dD}$$

Подставим численные значения:

$$f = \frac{0,25}{1 + 0,25 \cdot 3} \approx 0,14 \text{ м} = 14 \text{ см}$$

Ответ: это будет мнимое прямое уменьшенное изображение на расстоянии от линзы примерно 14 см.

Задача 8. Из фехральной проволоки диаметром 0,5 мм сделан параллелограмм со сторонами 6 см и 12 см. Чему равно его эквивалентное сопротивление? Удельное сопротивление фехраля $1,2 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, плотность фехраля 7150 кг/м^3 . Ответ дайте с точностью до сотых долей Ом. (10 баллов)



Решение:

Сначала определим сопротивление рёбер параллелограмма. Для коротких рёбер оно составит:

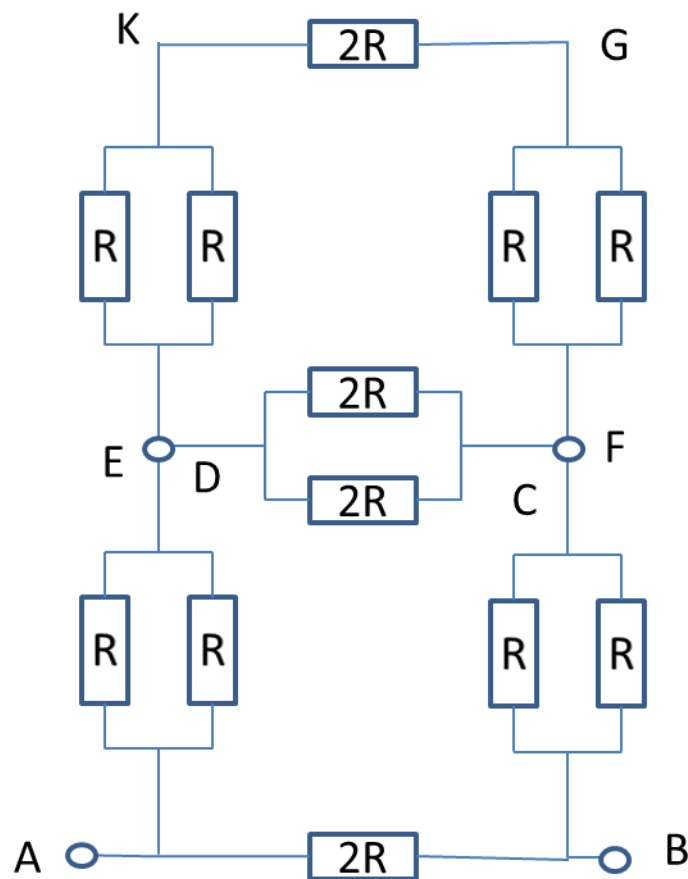
$$R_K = \rho \frac{l}{S} = R$$

Для длинных рёбер оно составит:

$$R_D = \rho \frac{2l}{S} = 2R$$



Ток, дойдя до точки А, распределяется между тремя рёбрами параллелограмма. Так как сопротивление ребра АВ в два раза больше, чем сопротивления рёбер AD и AE, то сила тока, текущего по нему, в два раза меньше, чем сила тока, текущего по рёбрам AD и AE. Учтём, что напряжение на концах участка цепи без ЭДС равно произведению силы тока, текущего по участку, на его сопротивление. Так как ток течёт от точки А до точки В, то в эквивалентной схеме сопротивление ребра АВ будет соединено параллельно с сопротивлением остального параллелограмма. При этом очевидно, что напряжения на рёбрах AD и AE одинаковы, значит потенциалы точек D и E равны. Из соображений симметрии то же самое можно сказать про потенциалы точек С и F. В результате получим, что рёбра AD и AE «соединяются» в одной точке, а рёбра СВ и FB «соединяются» в другой точке. С одной стороны эти точки «соединяются» через два длинных ребра CD и EF, с другой стороны – через короткие рёбра EK и DK, длинное ребро KG и короткие рёбра GC и GF. Тогда эквивалентная схема будет выглядеть следующим образом:



Вспомнив, чему равно сопротивление последовательно и параллельно соединённых резисторов, будем постепенно упрощать схему:

$$\begin{aligned} R_{AED} = R_{EDK} = R_{GFC} = R_{CFB} &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2} \\ R_{EKG F} &= \frac{R}{2} + 2R + \frac{R}{2} = 3R \\ R_{EDCF} &= \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{2R} \right)^{-1} = R \\ R_{EKG FCD} &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} = \left(\frac{4}{3R} \right)^{-1} = \frac{3R}{4} \\ R_{AEKG FCD B} &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{7R}{4} \end{aligned}$$



$$R_{\Sigma} = \left(\frac{4}{7R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{8}{14R} + \frac{7}{14R} \right)^{-1} = \left(\frac{15}{14R} \right)^{-1} = \frac{14}{15} R$$
$$R_{\Sigma} = \frac{14}{15} R = \frac{14}{15} \rho \frac{l}{S} = \frac{14}{15} \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Подставим численные значения:

$$R_{\Sigma} = \frac{14}{15} R = \frac{14}{15} \rho \frac{4l}{\pi d^2} = \frac{14}{15} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,34 \text{ Ом}$$

Ответ: эквивалентное сопротивление составляет 0,34 Ом.

Задача 9. По медному проводу диаметром 1 мм и длиной 1,25 м течёт ток 4 А. Провод находится при комнатной температуре. Какой процент теплоты, выделяемой в проводе при протекании электрического тока, отдаёт провод в окружающую среду через треть часа, если известно, что коэффициент теплоотдачи составляет 40 Вт/(м²·К)? Удельное сопротивление меди 1,75·10⁻⁸ Ом·м, плотность меди 8900 кг/м³, удельная теплоёмкость меди 385 Дж/(кг·К). (13 баллов)

Решение:

Мощность тепловых потерь определяется по формуле:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}},$$

где α – коэффициент теплоотдачи, T – температура, до которой нагрелся провод, $T_{\text{окр}}$ – температура окружающей среды, $S_{\text{пов}}$ – площадь поверхности провода.

Теплота, выделяемая в проводнике с током, определяется по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t,$$

где I – сила тока, протекающего по проводу, R – сопротивление провода, t – время, в течение которого шёл ток.

Сопротивление задаётся через параметры самого провода:

$$R = \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}},$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина провода, $S_{\text{сеч}}$ – площадь поперечного сечения провода.

Известно, что при прохождении электрического тока по проводу происходит превращение электрической энергии в тепловую. При этом по закону сохранения энергии количество теплоты, выделяемое в проводнике с током, будет равно работе электрического тока. Тогда можно записать выражение для мощности электрического тока:

$$N = I^2 R$$

Теперь учтём, что в окружающую среду провод отдаёт 10 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током, и запишем соответствующее равенство:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}} = kI^2 R = kI^2 \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}} = kN$$

Заменим площадь поперечного сечения провода и площадь поверхности провода соответствующими формулами:

$$\alpha(T - T_{\text{окр}})\pi dl = kI^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Отсюда получим искомый процент отдаваемой в окружающую среду теплоты k :

$$k = \frac{\alpha \pi^2 d^3 (T - T_{\text{окр}})}{4I^2 \rho}$$



Теперь найдём температуру, до которой нагрелся провод. Для этого определим, как сильно нагреется провод при протекании электрического тока (часть этой теплоты впоследствии выделится через поверхность провода в окружающую среду):

$$Q = I^2 R t = c m (T - T_{\text{окр}})$$
$$T = \frac{I^2 R t}{c m} + T_{\text{окр}} = \frac{I^2 \rho l t}{c m S_{\text{сеч}}} + T_{\text{окр}} = \frac{4 I^2 \rho l t}{c m \pi d^2} + T_{\text{окр}}$$

Подставим температуру в выражение для процента отдаваемой в окружающую среду теплоты:

$$k = \frac{\alpha \pi^2 d^3 \frac{4 I^2 \rho l t}{c m \pi d^2}}{4 I^2 \rho} = \frac{4 I^2 \rho l t \alpha \pi^2 d^3}{4 I^2 \rho c m \pi d^2} = \frac{l t \alpha \pi d}{c \rho_{\text{пл}} l S_{\text{сеч}}} = \frac{4 t \alpha \pi d}{c \rho_{\text{пл}} \pi d^2} = \frac{4 t \alpha}{c \rho_{\text{пл}} d}$$

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

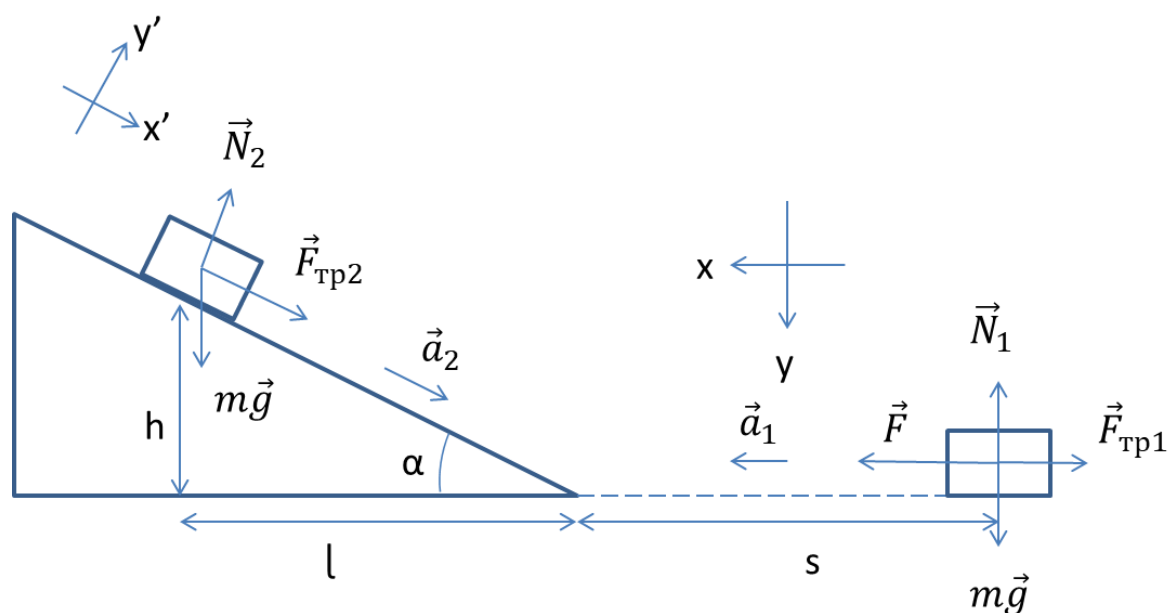
$$k = \frac{4 \cdot \frac{1}{3} 60 \cdot 60 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{385 \cdot 8900 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \approx 0,056 = 5,6\%$$

Ответ: в окружающую среду отдаётся 5,6 % теплоты.

Задача 10. Снегоход разогнался перед склоном на горизонтальной заснеженной поверхности и за 0,65 с набрал скорость 14,4 км/ч. После въезда на склон он прекратил разгон и двигался по инерции до полной остановки в течение 0,6 с. Во сколько раз коэффициент трения горизонтальной заснеженной поверхности больше, чем коэффициент трения склона? Масса лыжника 80 кг, высота подъёма над горизонтом h в два раза меньше расстояния l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию, ускорение свободного падения $9,8 \text{ кг/с}^2$. Снегоход приводит себя в движение силой 750 Н. Ответ округлить до сотых. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисует схематичный рисунок к условию задачи:



Для начала запишем второй закон Ньютона в векторном виде для горизонтального участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр1}} + \vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1$$

Теперь проецируем это уравнение на оси Ox и Oy :



$$\begin{cases} 0x: F - F_{\text{тр}1} = ma_1 \\ 0y: mg - N_1 = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на горизонтальном участке пути:

$$N_1 = mg$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$$

Далее запишем второй закон Ньютона в векторном виде для наклонного участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2$$

Теперь проецируем это уравнение на оси $0x'$ и $0y'$:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}2} - mg \sin \alpha = ma_2 \\ N_2 - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на наклонном участке пути:

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha$$

Выразим коэффициенты силы трения из соответствующих выражений:

$$\mu_1 = \frac{F - ma_1}{mg}$$

$$\mu_2 = \frac{a_2 - g \sin \alpha}{g \cos \alpha}$$

Далее найдём ускорения снегохода на обоих участках пути:

$$a_1 = \frac{v_{1к} - v_{1н}}{t_1} = \frac{v - 0}{t_1} = \frac{v}{t_1}$$

$$a_2 = \frac{v_{2к} - v_{2н}}{t_2} = \frac{0 - (-v)}{t_2} = \frac{v}{t_2}$$

Тогда:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{(F - ma_1)g \cos \alpha}{mg(a_2 - g \sin \alpha)} = \frac{F - m \frac{v}{t_1}}{\frac{v}{t_2} - g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m} = \frac{t_2}{t_1} \frac{Ft_1 - mv}{v - t_2 g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{t_2}{t_1} \frac{Ft_1 - mv}{v - t_2 g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m}$$

Так как по условию высота подъёма над горизонтом h в два раза меньше расстояния l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, то угол наклонной плоскости α равен 30° .

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{0,6}{0,65} \cdot \frac{750 \cdot 0,65 - 80 \cdot 4}{4 - 0,6 \cdot 9,8 \cdot \sin 30} \cdot \frac{\cos 30}{80} \approx 1,77$$

Ответ: коэффициент трения горизонтальной заснеженной поверхности больше, чем коэффициент трения склона в 1,77 раза.



ВАРИАНТ 4

Задача 1 (6 баллов).

Числа 5^{2025} и 2^{2025} записаны в десятичном виде друг за другом. Каким может быть получившееся количество цифр?

Решение:

Пусть k – количество цифр в числе 2^{2025} , l – количество цифр в числе 5^{2025} . для любого положительного числа x верно: $10^{a-1} < x < 10^a$ (например, $10^3 < 5678 < 10^4$). Следовательно:

$$10^{k-1} < 2^{2025} < 10^k; \quad 10^{l-1} < 5^{2025} < 10^l \Rightarrow \\ 10^{k-1} \cdot 10^{l-1} < 2^{2025} \cdot 5^{2025} < 10^k \cdot 10^l \Rightarrow 10^{k+l-2} < 10^{2025} < 10^{k+l}$$

Тогда:

$$\begin{cases} k+l > 2025 \\ k+l-2 < 2025 \end{cases} \Rightarrow k+l = 2026$$

Ответ: 2026.

Задача 2 (6 баллов).

Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана формулой: $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f(x) = \frac{8-x}{x+1}$. Известно, что $x_{17} = 8$. Найти произведение $x_{2024} \cdot x_{2025}$.

Решение:

Составим и решим уравнение: $8 = \frac{8-x_{16}}{x_{16}+1}$, откуда $x_{16} = 0$. Тогда $0 = \frac{8-x_{15}}{x_{15}+1}$, откуда $x_{14} = 8$. Можно заметить закономерность, что каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный – 8. Следовательно, заданное произведение будет равно 0.

Ответ: 0.

Задача 3 (8 баллов).

На нефтяном промысле находятся кустовые площадки, на которых располагаются скважины. Количество нефти, получаемое с каждой скважины в единицу времени (дебит) в процессе разработки месторождения, снижается. В начале дебит каждой скважины был постоянным, но каждый год он



снижается на 10 %. Чтобы поддерживать уровень добычи на одном и том же уровне, компания планирует бурить ежегодно новые скважины. Определите отношение числа скважин, которые были первоначально пробурены, к суммарному числу скважин, которое компания пробурит в течение 5 лет, чтобы общий уровень добычи не менялся? Необходимо учесть, что каждый год бурится одинаковое количество новых скважин. Ответ округлить до десятых.

Решение:

Пусть Q – дебит одной скважины, т/сут, n – число скважин, которые были пробурены первоначально, ед., k – число скважин, которые бурятся ежегодно, ед. Составим таблицу:

Год	Дебит, т/сут	Количество скважин, ед.	Общий уровень добычи, т/сут
1	Q	n	nQ
2	$0,9 \cdot Q$	$n + k$	$0,9 \cdot Q \cdot (n + k)$
3	$0,9^2 \cdot Q$	$n + 2k$	$0,9^2 \cdot Q \cdot (n + 2k)$
4	$0,9^3 \cdot Q$	$n + 3k$	$0,9^3 \cdot Q \cdot (n + 3k)$
5	$0,9^4 \cdot Q$	$n + 4k$	$0,9^4 \cdot Q \cdot (n + 4k)$

Тогда условие задачи можно записать в виде математической модели:

$$nQ = 0,9^4 \cdot Q \cdot (n + 4k)$$

$$n \cdot (1 - 0,9^4) = 0,9^4 \cdot 4k$$

$$\frac{n}{4k} = \frac{0,9^4}{(1 - 0,9^4)} = \frac{0,6561}{1 - 0,6561} = \frac{0,6561}{0,3439} = 1,9$$

Ответ: 1,9.

Задача 4 (15 баллов).

В убывающей арифметической прогрессии сумма первых пяти членов равна сумме первых трех членов геометрической прогрессии. Первые члены заданных прогрессий равны. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если частное первого члена и разности арифметической прогрессии равно -2,5.

Решение:

Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии:



$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$$

Сумма первых трех членов геометрической прогрессии:

$$S_3 = \frac{b_1(1 - q^3)}{1 - q} = b_1(1 + q + q^2) = a_1(1 + q + q^2)$$

Тогда:

$$5a_1 + 10d = a_1(1 + q + q^2) \Rightarrow 5\frac{a_1}{d} + 10 = \frac{a_1}{d}(1 + q + q^2),$$

$$5\frac{a_1}{d} + 10 = \frac{a_1}{d}(1 + q + q^2) \Rightarrow \frac{a_1}{d}(q + q^2) - 4\frac{a_1}{d} - 10 = 0.$$

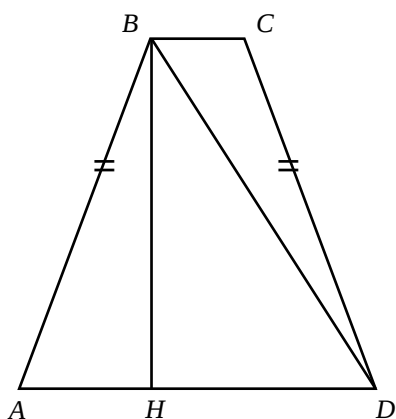
Так как $\frac{a_1}{d} = -2,5$, то

$$\frac{a_1}{d}(q + q^2) - 4\frac{a_1}{d} - 10 = -2,5(q + q^2) + 10 - 10 = 0 \Rightarrow q + q^2 = 0 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ или } q_2 = -1.$$

Ответ: -1.

Задача 5 (15 баллов).

В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC = 4$, При этом большее основание AD относится к меньшему, как 5:1. Высота трапеции равна 24. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найти радиус этой окружности.



Решение:

1) Окружность можно описать только около равнобедренной трапеции, т.е. $AB = CD$.

2) $AD = 5BC \Rightarrow AD = 20$.

3) Для равнобедренной трапеции $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{20 - 4}{2} = 8$, $HD = 20 - 8 = 12$.

4) По теореме Пифагора $AB = \sqrt{24^2 + 8^2} = 8\sqrt{10}$, $BD = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$.

5) Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$ равен радиусу окружности, описанной около $\triangle BCD$

6) $\sin(\angle BCD) = \sin(\angle BAD) = \frac{BH}{AB} = \frac{24}{8\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

7) По теореме синусов $2R = \frac{BD}{\sin(\angle BCD)} = \frac{12\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 20\sqrt{2} \Rightarrow R = 10\sqrt{2}$

Ответ: $10\sqrt{2}$.



Задача 6. Сколько ядер атома кислорода может вместить в себя объём, равный объёму цилиндра высотой 0,0293 пм и диаметром основания 0,04 пм. Константа $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Ответ округлить до десятых. (7 баллов)

ПЕРИОДЫ	Г Р У П П Ы Э Л Е М Е Н Т О В																VIII	B
	A I	B A II	B A III	B A IV	B A V	B A VI	B A VII	B A										
1	(H)								H	1.00794	Hydrogenium	Водород	He	4.002602	Helium	Гелий		
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne										
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar										

Решение:

Радиус ядра атома можно оценить по следующей формуле:

$$R = r_0 A^{1/3}$$

В первом приближении ядро можно представить как шар. Тогда его объём равен:

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

Объём цилиндра равен:

$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$$

Приравняв объёмы, выразим массовое число:

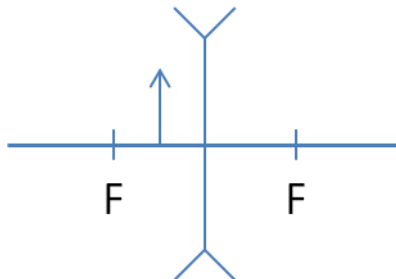
$$N = \frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{я}}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3r^2 h}{4r_0^3 A}$$
$$N = \frac{3r^2 h}{4r_0^3 A}$$

Подставим численные значения:

$$N = \frac{3 \cdot (4 \cdot 10^{-14})^2 \cdot 2,93 \cdot 10^{-14}}{4 \cdot (1,3 \cdot 10^{-15})^3 \cdot 16} \approx 1000,2$$

Ответ: такой объём может вместить 1000,2 атомов кислорода.

Задача 7. Школьник при подготовке к опыту с линзой, оптическая сила которой равна 2 дптр, использовал формулу тонкой линзы в следующем виде: $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Он выяснил, каким будет расстояние от линзы до изображения при расстоянии от предмета до линзы 40 см. Затем он собрал установку на оптической скамье, чтобы проверить выкладки. Какое изображение и на каком расстоянии от линзы он получит, если схема собранной им оптической системы представлена ниже? Ответ укажите в см и округлите до целых. (7 баллов)



**Решение:**

Формула тонкой линзы в общем виде выглядит следующим образом:

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F}$$

Здесь $+d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает расходящийся пучок лучей; $-d$ – расстояние от предмета до линзы, если на линзу падает сходящийся пучок лучей; $+f$ – расстояние от действительного изображения до линзы; $-f$ – расстояние от мнимого изображения до линзы; $+F$ – фокусное расстояние собирающей линзы; $-F$ – фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Формуле, которую использовал школьник, относится к собирающей линзе, которая даёт действительное изображение, а схема собрана для рассеивающей линзы, изображение которой всегда мнимое прямое уменьшенное. Таким образом, формула должна быть записана иначе:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

Связь между оптической силой линзы и фокусным расстоянием:

$$D = \frac{1}{F}$$

Тогда расстояние между линзой и изображением:

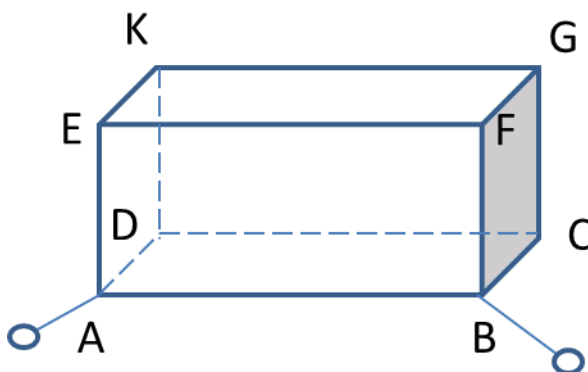
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + D = \frac{1 + dD}{d}$$
$$f = \frac{d}{1 + dD}$$

Подставим численные значения:

$$f = \frac{0,4}{1 + 0,4 \cdot 2} \approx 0,22 \text{ м} = 22 \text{ см}$$

Ответ: это будет мнимое прямое уменьшенное изображение на расстоянии от линзы примерно 22 см.

Задача 8. Из хромалевой проволоки диаметром 0,7 мм сделан параллелограмм со сторонами 5 см и 10 см. Чему равно его эквивалентное сопротивление? Удельное сопротивление хромаля $1,4 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, плотность хромаля 7220 кг/м^3 . Ответ дайте с точностью до сотых долей Ом. (10 баллов)

**Решение:**

Сначала определим сопротивление рёбер параллелограмма. Для коротких рёбер оно составит:

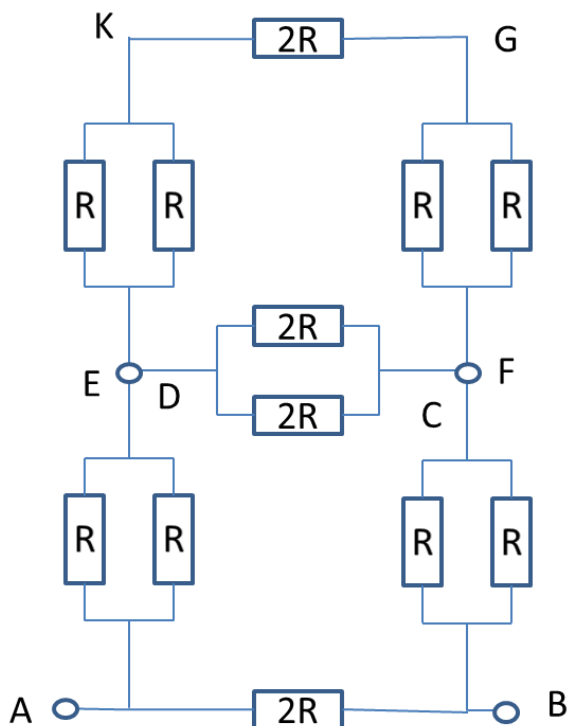
$$R_K = \rho \frac{l}{S} = R$$



Для длинных рёбер оно составит:

$$R_d = \rho \frac{2l}{S} = 2R$$

Ток, дойдя до точки А, распределяется между тремя рёбрами параллелограмма. Так как сопротивление ребра АВ в два раза больше, чем сопротивления рёбер AD и AE, то сила тока, текущего по нему, в два раза меньше, чем сила тока, текущего по рёбрам AD и AE. Учтём, что напряжение на концах участка цепи без ЭДС равно произведению силы тока, текущего по участку, на его сопротивление. Так как ток течёт от точки А до точки В, то в эквивалентной схеме сопротивление ребра АВ будет соединено параллельно с сопротивлением остального параллелограмма. При этом очевидно, что напряжения на рёбрах AD и AE одинаковы, значит потенциалы точек D и E равны. Из соображений симметрии то же самое можно сказать про потенциалы точек С и F. В результате получим, что рёбра AD и AE «соединяются» в одной точке, а рёбра СВ и FB «соединяются» в другой точке. С одной стороны эти точки «соединяются» через два длинных ребра CD и EF, с другой стороны – через короткие рёбра EK и DK, длинное ребро KG и короткие рёбра GC и GF. Тогда эквивалентная схема будет выглядеть следующим образом:



Вспомнив, чему равно сопротивление последовательно и параллельно соединённых резисторов, будем постепенно упрощать схему:

$$\begin{aligned} R_{AED} = R_{EDK} = R_{GFC} = R_{CFB} &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2} \\ R_{EKG F} &= \frac{R}{2} + 2R + \frac{R}{2} = 3R \\ R_{EDCF} &= \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{2R} \right)^{-1} = R \\ R_{EKG FCD} &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} = \left(\frac{4}{3R} \right)^{-1} = \frac{3R}{4} \\ R_{AEKG FCD B} &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{7R}{4} \\ R_{\Sigma} &= \left(\frac{4}{7R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{8}{14R} + \frac{7}{14R} \right)^{-1} = \left(\frac{15}{14R} \right)^{-1} = \frac{14}{15}R \end{aligned}$$



$$R_3 = \frac{14}{15}R = \frac{14}{15}\rho \frac{l}{S} = \frac{14}{15}\rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Подставим численные значения:

$$R_3 = \frac{14}{15}R = \frac{14}{15}\rho \frac{4l}{\pi d^2} = \frac{14}{15} \cdot 1,4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot (0,7 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,17 \text{ Ом}$$

Ответ: эквивалентное сопротивление составляет 0,17 Ом.

Задача 9. По алюминиевому проводу диаметром 2 мм и длиной 2,25 м течёт ток 8 А. Провод находится при комнатной температуре. Какой процент теплоты, выделяемой в проводе при протекании электрического тока, отдаёт провод в окружающую среду через три четверти часа, если известно, что коэффициент теплоотдачи составляет 90 мВт/(м²·К)? Удельное сопротивление алюминия $2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, плотность алюминия 2700 кг/м³, удельная теплоёмкость алюминия 904 Дж/(кг·К). (13 баллов)

Решение:

Мощность тепловых потерь определяется по формуле:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}},$$

где α – коэффициент теплоотдачи, T – температура, до которой нагрелся провод, $T_{\text{окр}}$ – температура окружающей среды, $S_{\text{пов}}$ – площадь поверхности провода.

Теплота, выделяемая в проводнике с током, определяется по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t,$$

где I – сила тока, протекающего по проводу, R – сопротивление провода, t – время, в течение которого шёл ток.

Сопротивление задаётся через параметры самого провода:

$$R = \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}},$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина провода, $S_{\text{сеч}}$ – площадь поперечного сечения провода.

Известно, что при прохождении электрического тока по проводу происходит превращение электрической энергии в тепловую. При этом по закону сохранения энергии количество теплоты, выделяемое в проводнике с током, будет равно работе электрического тока. Тогда можно записать выражение для мощности электрического тока:

$$N = I^2 R$$

Теперь учтём, что в окружающую среду провод отдаёт 10 % теплоты, выделяющейся в проводнике с током, и запишем соответствующее равенство:

$$N_{\text{потерь}} = \alpha(T - T_{\text{окр}})S_{\text{пов}} = kI^2 R = kI^2 \rho \frac{l}{S_{\text{сеч}}} = kN$$

Заменим площадь поперечного сечения провода и площадь поверхности провода соответствующими формулами:

$$\alpha(T - T_{\text{окр}})\pi d l = kI^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2}$$

Отсюда получим искомый процент отдаваемой в окружающую среду теплоты k :

$$k = \frac{\alpha \pi^2 d^3 (T - T_{\text{окр}})}{4I^2 \rho}$$

Теперь найдём температуру, до которой нагрелся провод. Для этого определим, как сильно нагреется провод при протекании электрического тока (часть этой теплоты впоследствии выделится через поверхность провода в окружающую среду):



$$Q = I^2 R t = c m (T - T_{\text{окр}})$$

$$T = \frac{I^2 R t}{c m} + T_{\text{окр}} = \frac{I^2 \rho l t}{c m S_{\text{сеч}}} + T_{\text{окр}} = \frac{4 I^2 \rho l t}{c m \pi d^2} + T_{\text{окр}}$$

Подставим температуру в выражение для процента отдаваемой в окружающую среду теплоты:

$$k = \frac{\alpha \pi^2 d^3 \frac{4 I^2 \rho l t}{c m \pi d^2}}{4 I^2 \rho} = \frac{4 I^2 \rho l t \alpha \pi^2 d^3}{4 I^2 \rho c m \pi d^2} = \frac{l t \alpha \pi d}{c \rho_{\text{пл}} l S_{\text{сеч}}} = \frac{4 t \alpha \pi d}{c \rho_{\text{пл}} \pi d^2} = \frac{4 t \alpha}{c \rho_{\text{пл}} d}$$

Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

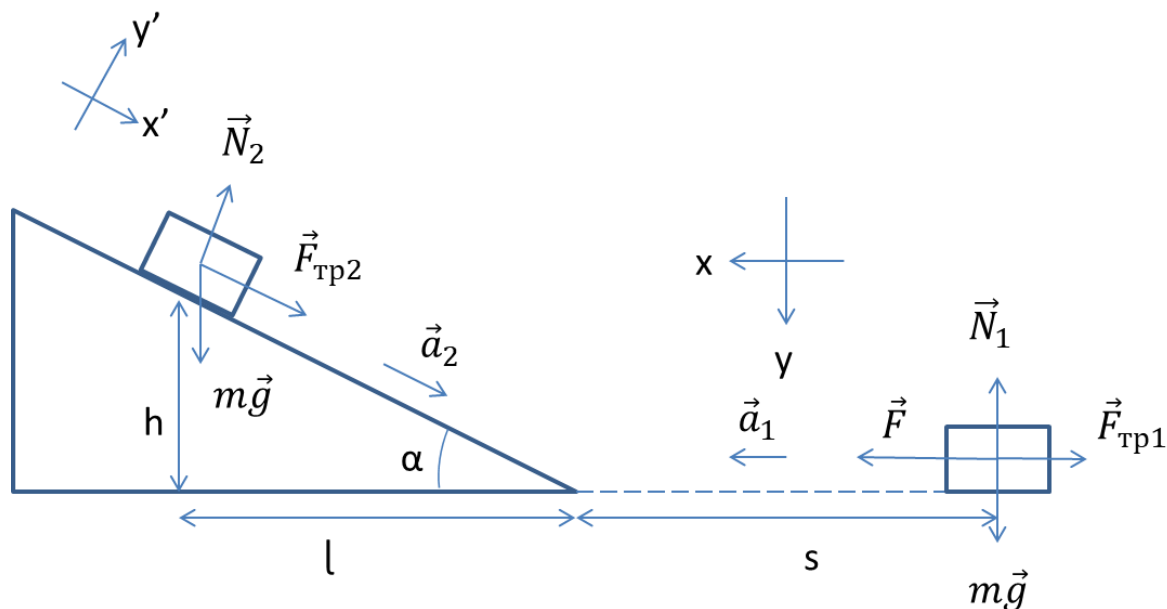
$$k = \frac{4 \cdot 0,75 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 90 \cdot 10^{-3}}{904 \cdot 2700 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,199 = 19,9\%$$

Ответ: в окружающую среду отдаётся 19,9 % теплоты.

Задача 10. Снегоход разогнался перед склоном на горизонтальной заснеженной поверхности и за 0,6 с набрал скорость 21,6 км/ч. После въезда на склон он прекратил разгон и двигался по инерции до полной остановки в течение 0,65 с. Во сколько раз коэффициент трения горизонтальной заснеженной поверхности больше, чем коэффициент трения склона? Масса лыжника 70 кг, высота подъёма над горизонтом h равна расстоянию l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, пройденное по склону расстояние равно пройденному по горизонтали расстоянию, ускорение свободного падения $9,8 \text{ кг/с}^2$. Снегоход приводит себя в движение силой 800 Н. Ответ округлить до сотых. (13 баллов)

Решение:

Для начала нарисует схематичный рисунок к условию задачи:



Для начала запишем второй закон Ньютона в векторном виде для горизонтального участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр1}} + \vec{N}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1$$

Теперь проецируем это уравнение на оси Ox и Oy :

$$\begin{cases} Ox: F - F_{\text{тр1}} = m a_1 \\ Oy: m g - N_1 = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на горизонтальном участке пути:



$$N_1 = mg$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$$

Далее запишем второй закон Ньютона в векторном виде для наклонного участка пути:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2$$

Теперь проецируем это уравнение на оси $0x'$ и $0y'$:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}2} - mg \sin \alpha = ma_2 \\ N_2 - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Найдём с помощью второго уравнения силу трения на наклонном участке пути:

$$N_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha$$

Выразим коэффициенты силы трения из соответствующих выражений:

$$\mu_1 = \frac{F - ma_1}{mg}$$

$$\mu_2 = \frac{a_2 - g \sin \alpha}{g \cos \alpha}$$

Далее найдём ускорения снегохода на обоих участках пути:

$$a_1 = \frac{v_{1\text{к}} - v_{1\text{н}}}{t_1} = \frac{v - 0}{t_1} = \frac{v}{t_1}$$

$$a_2 = \frac{v_{2\text{к}} - v_{2\text{н}}}{t_2} = \frac{0 - (-v)}{t_2} = \frac{v}{t_2}$$

Тогда:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{(F - ma_1)g \cos \alpha}{mg(a_2 - g \sin \alpha)} = \frac{F - m \frac{v}{t_1}}{\frac{v}{t_2} - g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m} = \frac{t_2}{t_1} \frac{Ft_1 - mv}{v - t_2 g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{t_2}{t_1} \frac{Ft_1 - mv}{v - t_2 g \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{m}$$

Так как по условию высота подъёма над горизонтом h равна расстоянию l по горизонтали от начала подъёма до точки остановки, то угол наклонной плоскости α равен 45° . Подставим численные значения в итоговую формулу и посчитаем:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{0,65}{0,6} \cdot \frac{800 \cdot 0,6 - 70 \cdot 6}{6 - 0,65 \cdot 9,8 \cdot \sin 45} \cdot \frac{\cos 45}{70} \approx 0,43$$

Ответ: коэффициент трения горизонтальной заснеженной поверхности больше, чем коэффициент трения склона в 0,43 раза.