Математика. 10-11 класс.

Вариант-11

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}+4096}{64a^6}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 45°, и известно, что $\sin 22{,}5^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+25y+19z=-471, \\ y^2+23x+21z=-397, \\ z^2+21x+21y=-545. \end{cases}$$

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=13 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 10 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11], и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2-2k-15)x^2+(3k-7)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{6}-1$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+4096}{64a^6}$, если $\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}=5$.

Решение.

$$\frac{a^{12}+4096}{64a^6}=\frac{a^6}{64}+\frac{64}{a^6}=\frac{a^6}{64}-2+\frac{64}{a^6}+2=\left(\frac{a^3}{8}-\frac{8}{a^3}\right)^2+2=$$

$$=\left(\frac{a^3}{8}-3\cdot\frac{a}{2}+3\cdot\frac{2}{a}-\frac{8}{a^3}+3\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right)^2+2=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right)^2+2=\left(5^3+3\cdot 5\right)^2+2=19602.$$

Ответ. 19602.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен $45°$, и известно, что $\sin 22{,}5° = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Решение.

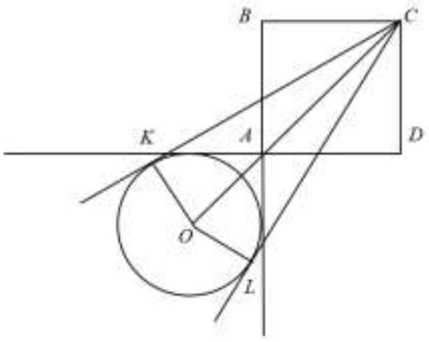


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины A точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата $ABCD$ $AC=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной R. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 22{,}5°}=\dfrac{2R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. В результате получаем уравнение $\dfrac{2R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=R\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, откуда

$$R=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Ответ. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+25y+19z=-471, \\ y^2+23x+21z=-397, \\ z^2+21x+21y=-545. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению два других и выделим полные квадраты по каждой переменной:

$$x^2+y^2+z^2+44x+46y+40z=-1413,$$

$$x^2+44x+y^2+46y+z^2+40z+1413=0,$$

$$x^2+44x+484+y^2+46y+529+z^2+40z+400=0,$$

$$(x+22)^2+(y+23)^2+(z+20)^2=0.$$

Следовательно, $x=-22$, $y=-23$, $z=-20$ единственное возможное решение. Проверим это подстановкой в уравнения системы:

$$\begin{cases} (-22)^2+25\cdot(-23)+19\cdot(-20)=484-575-380=-471, \\ (-23)^2+23\cdot(-22)+21\cdot(-20)=529-506-420=-397, \\ (-20)^2+21\cdot(-22)+21\cdot(-23)=400-462-483=-545. \end{cases}$$

Ответ. $(-22;-23;-20)$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=13 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 10 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

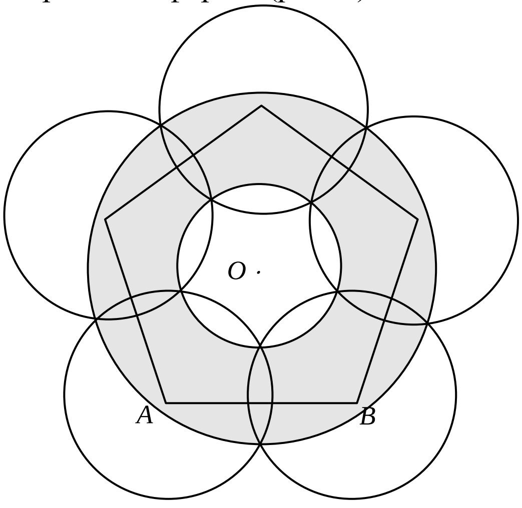


Рис. 2.

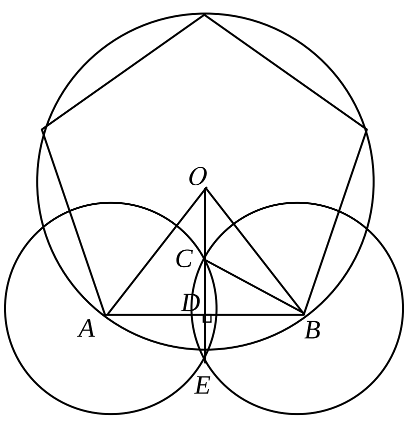


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радарами. Рассмотрим фрагмент рис.2 –ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\ BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Тогда $AB = 24$, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/5\right)} = \frac{24}{2\sin 36^\circ} = \frac{12}{\sin 36^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$OC = OD - 5 = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 5;$$

$$OE = OD + 5 = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 5;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 5\right)^2 - \left(\frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 5\right)^2\right) = \frac{240\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{\sin 36^\circ}; \dfrac{240\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2 - 2k - 15\right)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 - 2k - 15}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 15}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

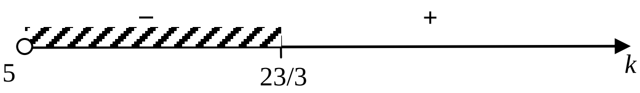
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 - 2k - 15}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 15}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{7 - 3k}{3\left(k^2 - 2k - 15\right)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 - 2k - 15}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(7 - 3k)^2}{9\left(k^2 - 2k - 15\right)^2} = \frac{1}{k^2 - 2k - 15};$$

Т.к. $k^2 - 2k - 15 > 0$ для $k \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(7 - 3k)^2}{9} = k^2 - 2k - 15,$$

$$9k^2 - 42k + 49 = 9k^2 - 18k - 135,\ 24k = 184,\ k = \frac{23}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{23}{3}$. Тогда, $P = \dfrac{\frac{23}{3} - 6}{11 - 6} = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{6} - 1$.

Решение.

При таком расположении десяти одинаковых шаров центры *A, B, C, D* четырех из них расположены в вершинах правильного тетраэдра, а точки касания расположены на ребрах этого тетраэдра. Следовательно, ребро тетраэдра равно четырем радиусам этих шаров, радиус внешней сферы больше радиуса шара, описанного около тетраэдра на четверть длины ребра тетраэдра, а радиус внутреннего шара меньше расстояния от центра тетраэдра до его грани на эту же величину. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью *ABM* (рис. 3).

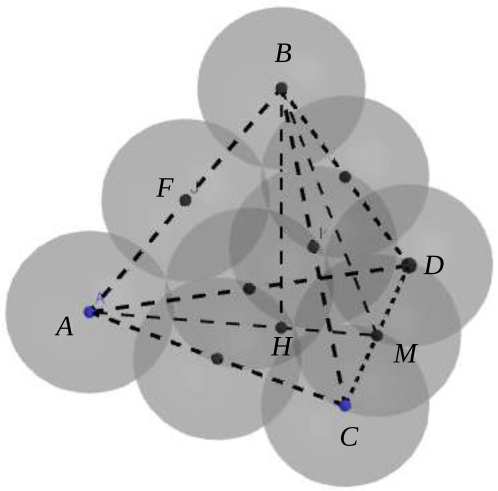


Рис. 2

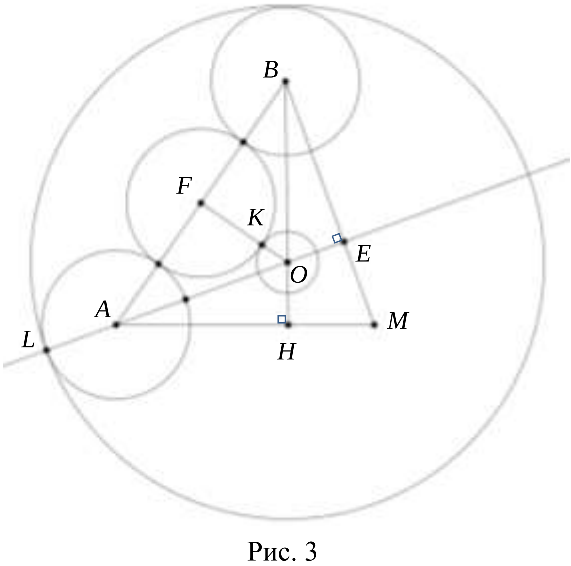


Рис. 3

Обозначим длину ребра тетраэдра – a, радиус сферы, описанной вокруг пирамиды из шаров – R, радиус шара, вписанного в центр пирамиды из шаров – r.

В треугольнике $\Delta\, ABM$: $AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $ME = MH = \frac{1}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$AH = BE = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AE = BH = \sqrt{AM^2 - ME^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Из подобия треугольников $\Delta\, AEM$ и $\Delta\, AHO$ имеем $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2} AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

В треугольнике $\Delta\, ABO$: $S_{ABO} = \frac{AH \cdot BO}{2} = \frac{AB \cdot FO}{2} \;\Rightarrow FO = \frac{AH \cdot BO}{AB} = \frac{a^2\sqrt{18}}{12a} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $R = AO + AL = \frac{a\sqrt{6}}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{4}$; а $r = FO - FK = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$.

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(\sqrt{6}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right);\; R = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)r = 5\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Ответ: $5\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-12

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{a}=4$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $6+2\sqrt{5}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-23y-25z=-681, \\ y^2-21x-21z=-419, \\ z^2-19x-21y=-313. \end{cases}$$

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2-2k-24\right)x^2+\left(3k-8\right)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{2}-1$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{a}=4$.

Решение.

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}=\frac{a^6}{729}+\frac{729}{a^6}=\frac{a^6}{729}-2+\frac{729}{a^6}+2=\left(\frac{a^3}{27}-\frac{27}{a^3}\right)^2+2=$$

$$=\left(\frac{a^3}{27}-3\cdot\frac{a}{3}+3\cdot\frac{3}{a}-\frac{27}{a^3}+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=\left(4^3+3\cdot4\right)^2+2=5778.$$

Ответ. 5778.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $6+2\sqrt{5}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение.

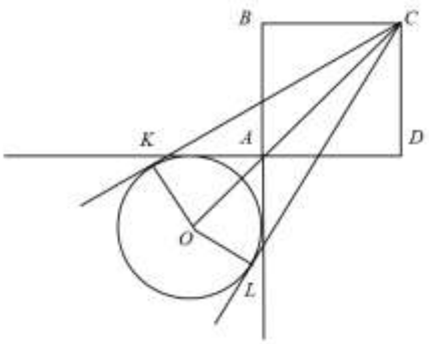


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины A точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата $ABCD$ $AC=\sqrt{2}\left(6+2\sqrt{5}\right)$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной R. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 18°}=\dfrac{4R}{\sqrt{5}-1}$. В результате получаем уравнение $\dfrac{4R}{\sqrt{5}-1}=R\sqrt{2}+8$,

откуда $R=\dfrac{\sqrt{2}\left(6+2\sqrt{5}\right)}{\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)$.

Ответ. $2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 23y - 25z = -681, \\ y^2 - 21x - 21z = -419, \\ z^2 - 19x - 21y = -313. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению два других и выделим полные квадраты по каждой переменной:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x - 44y - 46z = -1413,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x - 44y - 46z + 1413 = 0,$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 - 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0,$$

$$(x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 = 0.$$

Следовательно, $x = 20$, $y = 22$, $z = 23$ единственное возможное решение. Проверим это подстановкой в уравнения системы:

$$\begin{cases} 20^2 - 23\cdot 22 - 25\cdot 23 = 400 - 506 - 575 = -681, \\ 22^2 - 21\cdot 20 - 21\cdot 23 = 484 - 420 - 483 = -419, \\ 23^2 - 19\cdot 20 - 21\cdot 22 = 529 - 380 - 462 = -313. \end{cases}$$

Ответ. $(20;22;23)$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

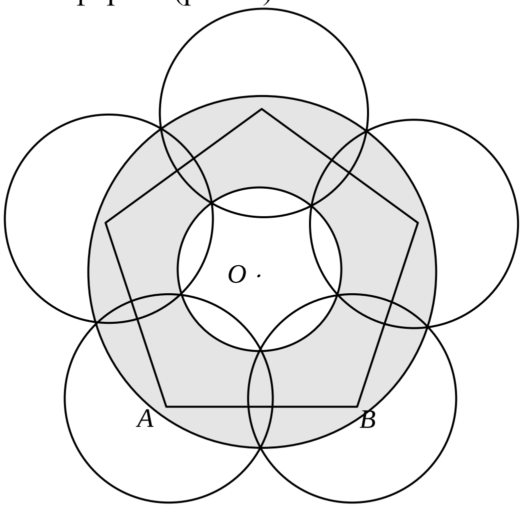


Рис. 2.

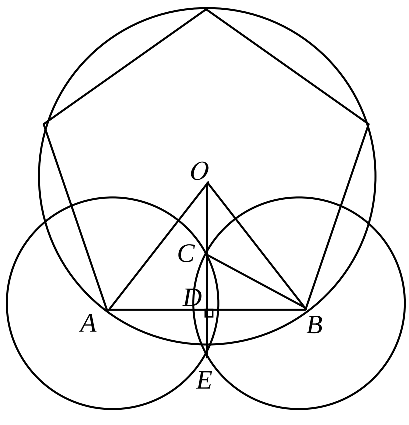


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 – ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{25^2-7^2}=24.$$

Тогда AB = 48, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/5\right)}=\frac{48}{2\sin 36^\circ}=\frac{24}{\sin 36^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца}=\pi(OE^2-OC^2).$$

$$OD=\frac{DB}{\operatorname{tg} 36^\circ}=\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$OC=OD-7=\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ}-7;$$

$$OE=OD+7=\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ}+7;$$

$$S_{кольца}=\pi\left(\left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ}+7\right)^2-\left(\frac{24}{\operatorname{tg} 36^\circ}-7\right)^2\right)=\frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Ответ. $\frac{24}{\sin 36^\circ};\frac{672\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 11] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2-2k-24\right)x^2+\left(3k-8\right)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8-3k}{k^2-2k-24}; \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2k-24}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1=2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

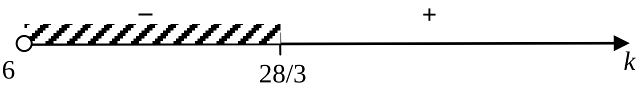
$$\begin{cases} 3x_2=\dfrac{8-3k}{k^2-2k-24}; \\ 2x_2^2=\dfrac{2}{k^2-2k-24}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{8-3k}{3\left(k^2-2k-24\right)}; \\ x_2^2=\dfrac{1}{k^2-2k-24}. \end{cases}\Rightarrow\frac{\left(8-3k\right)^2}{9\left(k^2-2k-24\right)^2}=\frac{1}{k^2-2k-24};$$

Т.к. $k^2-2k-24>0$ для $k\in\left(-\infty;-4\right)\cup\left(6;+\infty\right)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{\left(8-3k\right)^2}{9}=k^2-2k-24,$$

$$9k^2-48k+64=9k^2-18k-216,\ 30k=280,\ k=\frac{28}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1-2x_2\le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \dfrac{28}{3}$. Тогда $P = \dfrac{\dfrac{28}{3} - 6}{11 - 6} = \dfrac{1}{3}$

Ответ. $\dfrac{2}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров, если радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров равен $\sqrt{2} - 1$.

Решение.

При таком расположении десяти одинаковых шаров центры *A, B, C, D* четырех из них расположены в вершинах правильного тетраэдра, а точки касания расположены на ребрах этого тетраэдра. Следовательно, ребро тетраэдра равно четырем радиусам этих шаров, радиус внешней сферы больше радиуса шара, описанного около тетраэдра на четверть длины ребра тетраэдра, а радиус внутреннего шара меньше расстояния от центра тетраэдра до его грани на эту же величину. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью *ABM* (рис. 3).

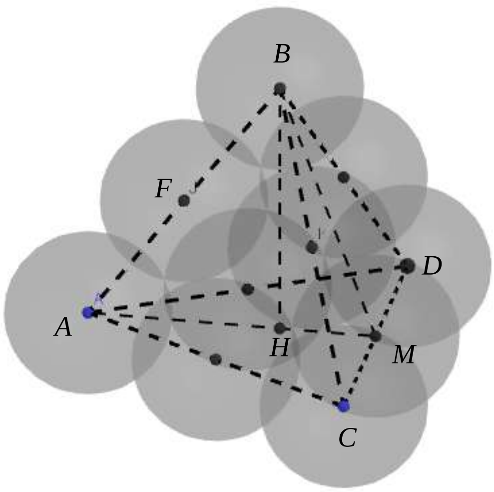


Рис. 2

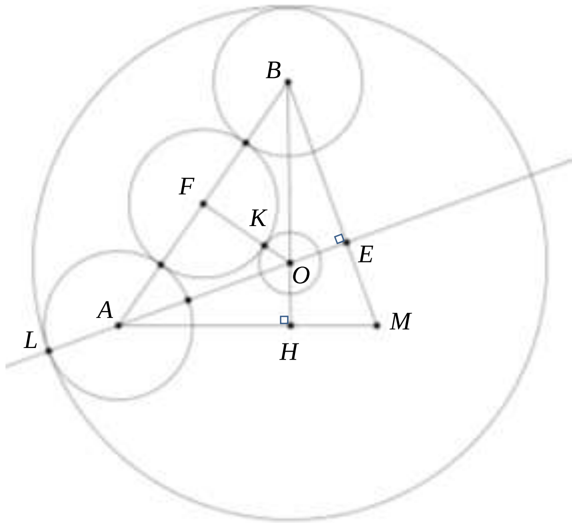


Рис. 3

Обозначим длину ребра тетраэдра – *a*, радиус сферы, описанной вокруг пирамиды из шаров – *R*, радиус шара, вписанного в центр пирамиды из шаров – *r*.

В треугольнике $\Delta\, ABM$: $AM = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $ME = MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$AH = BE = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AE = BH = \sqrt{AM^2 - ME^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Из подобия треугольников $\Delta\, AEM$ и $\Delta\, AHO$ имеем $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2} AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

В треугольнике ΔABO: $S_{ABO} = \frac{AH \cdot BO}{2} = \frac{AB \cdot FO}{2} \Rightarrow FO = \frac{AH \cdot BO}{AB} = \frac{a^2\sqrt{18}}{12a} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $R = AO + AL = \frac{a\sqrt{6}}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{4}$; а $r = FO - FK = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$.

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(\sqrt{6}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right);\ R = \left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)r = \left(\sqrt{6}+1\right)$$

Ответ. $\left(\sqrt{6}+1\right)$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-21

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\frac{a}{3}-\frac{3}{a}=2$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $2\sqrt{3}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 30°, и известно, что $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-22y-69z+703=0, \\ y^2+23x+23z-1473=0, \\ z^2-63x+66y+2183=0. \end{cases}$$

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [8; 13] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2-2k-35)x^2+(3k-9)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров, если радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров равен $\sqrt{6}+1$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}$, если $\frac{a}{3}-\frac{3}{a}=2$.

Решение.

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}=\frac{a^6}{729}+\frac{729}{a^6}=\frac{a^6}{729}-2+\frac{729}{a^6}+2=\left(\frac{a^3}{27}-\frac{27}{a^3}\right)^2+2=$$

$$=\left(\frac{a^3}{27}-3\cdot\frac{a}{3}+3\cdot\frac{3}{a}-\frac{27}{a^3}+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\right)^2+2=\left(2^3+3\cdot 2\right)^2+2=14^2+2=198.$$

Ответ. 198.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $2\sqrt{3}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 30°, и известно, что $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Решение.

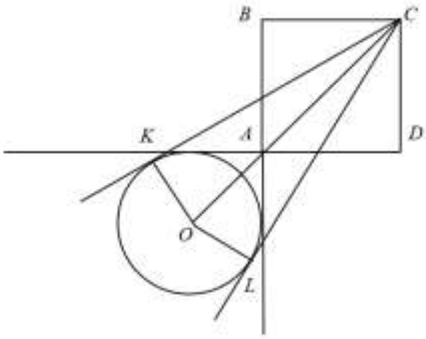


Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины A точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата $ABCD$ $AC=2\sqrt{6}$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной R. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\frac{OK}{\sin 15°}=\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}-1}$. В результате получаем уравнение $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}-1}=R\sqrt{2}+2\sqrt{6}$, откуда $R=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{2}}=2$.

Ответ: 2.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0, \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0, \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению два других и выделим полные квадраты по каждой переменной:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0,$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0,$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0.$$

Следовательно, $x = 20$, $y = -22$, $z = 23$ единственное возможное решение. Проверим это подстановкой в уравнения системы:

$$\begin{cases} 20^2 - 22\cdot(-22) - 69\cdot 23 + 703 = 400 + 484 - 1587 + 703 = 0, \\ (-22)^2 + 23\cdot 20 + 23\cdot 23 - 1473 = 484 + 460 + 529 - 1473 = 0, \\ 23^2 - 63\cdot 20 + 66\cdot(-22) + 2183 = 529 - 1260 - 1452 + 2183 = 0. \end{cases}$$

Ответ. $(20;-22;23)$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

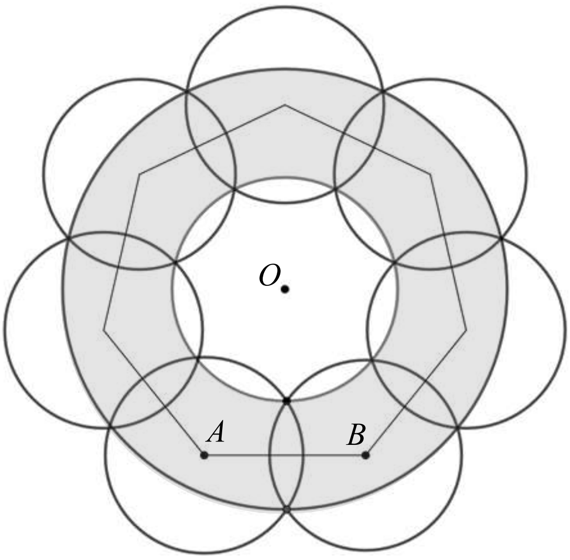


Рис. 2.

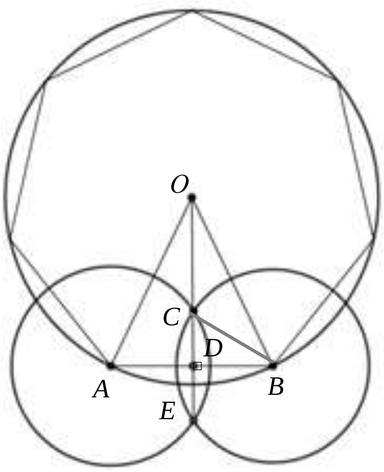


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радарами. Рассмотрим фрагмент рис. 2 – ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{41^2-9^2}=40.$$

Тогда AB = 80, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного семиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{80}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{40}{\sin\left(180/7\right)}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца}=\pi(OE^2-OC^2).$$

$$OD=\frac{BD}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}=\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)};$$

$$OC=OD-9=\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}-9;$$

$$OE=OD+9=\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}+9;$$

$$S_{кольца}=\pi\left(\left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}+9\right)^2-\left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}-9\right)^2\right)=\frac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$$

Ответ. $\dfrac{40}{\sin\left(180/7\right)};\ \dfrac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [8; 13] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2-2k-35)x^2+(3k-9)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{9-3k}{k^2-2k-35};\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2k-35}.\end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1=2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

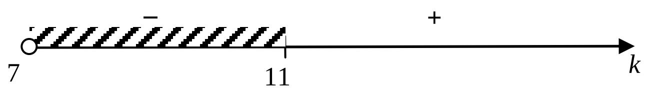
$$\begin{cases} 3x_2=\dfrac{9-3k}{k^2-2k-35};\\ 2x_2^2=\dfrac{2}{k^2-2k-35}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{9-3k}{3(k^2-2k-35)};\\ x_2^2=\dfrac{1}{k^2-2k-35}.\end{cases}\Rightarrow\frac{(9-3k)^2}{9(k^2-2k-35)^2}=\frac{1}{k^2-2k-35};$$

Т.к. $k^2-2k-35>0$ для $k\in(-\infty;-5)\cup(7;+\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(9-3k)^2}{9}=k^2-2k-35,$$

$$9k^2-54k+81=9k^2-18k-315,\ 30k=396,\ k=11.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1-2x_2\le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le 11$. Тогда $P = \dfrac{11-8}{13-8} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ. $0{,}6$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров, если радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров равен $\sqrt{6}+1$.

Решение.

При таком расположении десяти одинаковых шаров центры *A, B, C, D* четырех из них расположены в вершинах правильного тетраэдра, а точки касания расположены на ребрах этого тетраэдра. Следовательно, ребро тетраэдра равно четырем радиусам этих шаров, радиус внешней сферы больше радиуса шара, описанного около тетраэдра на четверть длины ребра тетраэдра, а радиус внутреннего шара меньше расстояния от центра тетраэдра до его грани на эту же величину. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью *ABM* (рис. 3).

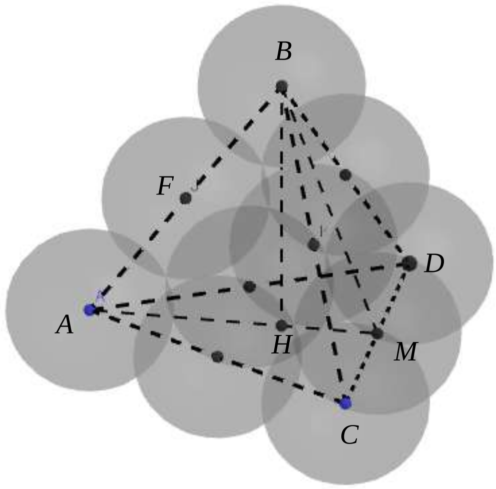


Рис. 2

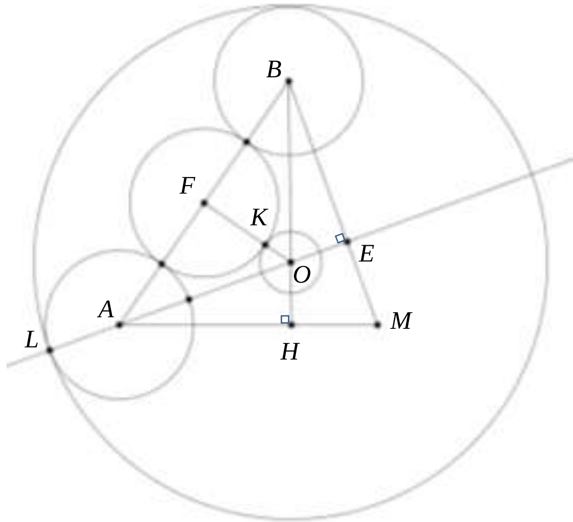


Рис. 3

Обозначим длину ребра тетраэдра – *a*, радиус сферы, описанной вокруг пирамиды из шаров – *R*, радиус шара, вписанного в центр пирамиды из шаров – *r*.

В треугольнике $\Delta\, ABM$: $AM = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $ME = MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$AH = BE = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AE = BH = \sqrt{AM^2 - ME^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Из подобия треугольников $\Delta\, AEM$ и $\Delta\, AHO$ имеем $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

В треугольнике $\Delta\, ABO$: $S_{ABO}=\dfrac{AH\cdot BO}{2}=\dfrac{AB\cdot FO}{2}\ \Rightarrow FO=\dfrac{AH\cdot BO}{AB}=\dfrac{a^2\sqrt{18}}{12a}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $R=AO+AL=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}+\dfrac{a}{4}=\dfrac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{4}$; а $r=FO-FK=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}-\dfrac{a}{4}=\dfrac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$.

$$\frac{r}{R}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{5};\ r=\frac{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{5}R=\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Ответ. $\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-22

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}+4096}{64a^{6}}$, если $\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной $2-\sqrt{5-\sqrt{5}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 72°, и известно, что $\sin 36^{\circ}=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{2}-23y+66z+612=0, \\ y^{2}+62x-20z+296=0, \\ z^{2}-22x+67y+505=0. \end{cases}$$

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=26 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 20 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [3; 8] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^{2}-2k-3\right)x^{2}+(3k-5)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_{1}\leq 2x_{2}$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров, если радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров равен $5\sqrt{2}+5$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}+4096}{64a^6}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$.

Решение.

$$\frac{a^{12}+4096}{64a^6}=\frac{a^6}{64}+\frac{64}{a^6}=\frac{a^6}{64}-2+\frac{64}{a^6}+2=\left(\frac{a^3}{8}-\frac{8}{a^3}\right)^2+2=$$

$$=\left(\frac{a^3}{8}-3\cdot\frac{a}{2}+3\cdot\frac{2}{a}-\frac{8}{a^3}+3\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right)^2+2=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right)^2+2=\left(3^3+3\cdot 3\right)^2+2=1298.$$

Ответ. 1298.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной $2-\sqrt{5-\sqrt{5}}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 72°, и известно, что $\sin 36°=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Решение.

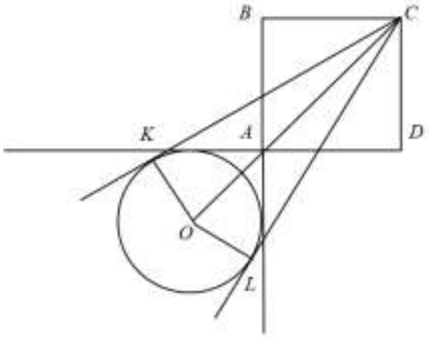


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины A точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата $ABCD$ $AC=\sqrt{2}\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$. Если проведем радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной R. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\frac{OK}{\sin 36°}=\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$. В результате получаем уравнение $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}=R\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$, откуда

$$R=\frac{2-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-1}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{2-\sqrt{5-\sqrt{5}}}=\sqrt{5-\sqrt{5}}\,.$$

Ответ. $\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-23y+66z+612=0, \\ y^2+62x-20z+296=0, \\ z^2-22x+67y+505=0. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению два других и выделим полные квадраты по каждой переменной:

$$x^2+y^2+z^2+40x+44y+46z+1413=0\,,$$

$$x^2+40x+400+y^2+44y+484+z^2+46z+529=0\,,$$

$$(x+20)^2+(y+22)^2+(z+23)^2=0\,.$$

Следовательно, $x=-20$, $y=-22$, $z=-23$ единственное возможное решение. Проверим это подстановкой в уравнения системы:

$$\begin{cases} (-20)^2-23\cdot(-22)+66\cdot(-23)+612=400+506-1518+612=0, \\ (-22)^2+62\cdot(-20)-20\cdot(-23)+296=484-1240+460+296=0, \\ (-23)^2-22\cdot(-20)+67\cdot(-22)+505=529+440-1474+505=0. \end{cases}$$

Ответ. $-(20;-22;-23)$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=26 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 20 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{26^2-10^2}=24\,.$$

Тогда AB = 48, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180\!\!\diagup_{7}\right)}=\frac{48}{2\sin\left(180\!\!\diagup_{7}\right)}=\frac{24}{\sin\left(180\!\!\diagup_{7}\right)}.$$

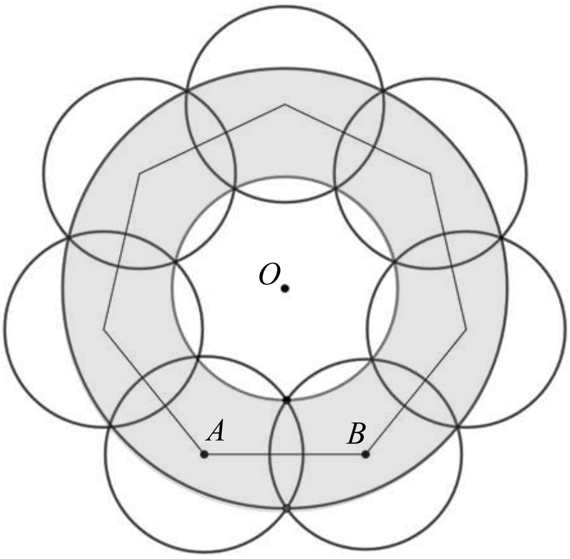


Рис. 2.

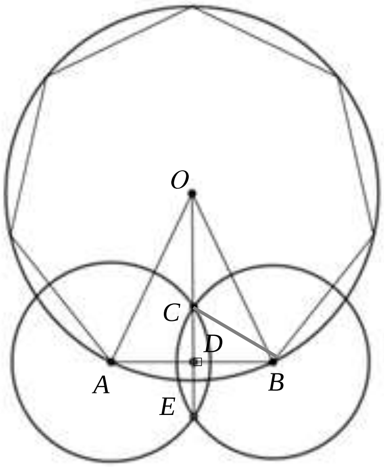


Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} = \frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)};$$

$$OC = OD - 10 = \frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 10;$$

$$OE = OD + 10 = \frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 10;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 10\right)^2 - \left(\frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 10\right)^2\right) = \frac{960\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$$

Ответ. $\dfrac{24}{\sin\left(180/7\right)}; \dfrac{960\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [3; 8] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2 - 2k - 3\right)x^2 + \left(3k - 5\right)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5-3k}{k^2 - 2k - 3}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 3}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

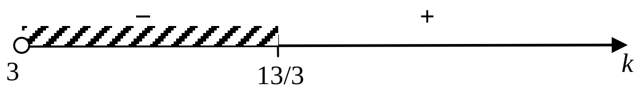
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{5-3k}{k^2 - 2k - 3}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 - 2k - 3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{5-3k}{3\left(k^2 - 2k - 3\right)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 - 2k - 3}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(5-3k)^2}{9\left(k^2 - 2k - 3\right)^2} = \frac{1}{k^2 - 2k - 3};$$

Т.к. $k^2 - 2k - 3 > 0$ для $k \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(5-3k)^2}{9} = k^2 - 2k - 3,$$

$$9k^2 - 30k + 25 = 9k^2 - 18k - 27, \; 12k = 52, \; k = \frac{13}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение *k*, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{13}{3}$. Тогда $P = \frac{\frac{13}{3} - 3}{7-3} = \frac{1}{3}$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) Десять шаров одинакового радиуса сложены в виде треугольной пирамиды так, что каждый шар касается как минимум трех других. Найти радиус шара вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося шести одинаковых шаров, если радиус сферы, в которую вписана пирамида из шаров равен $5\sqrt{2} + 5$.

Решение.

При таком расположении десяти одинаковых шаров центры *A, B, C, D* четырех из них расположены в вершинах правильного тетраэдра, а точки касания расположены на ребрах этого тетраэдра. Следовательно, ребро тетраэдра равно четырем радиусам этих шаров, радиус внешней сферы больше радиуса шара, описанного около тетраэдра на четверть длины ребра тетраэдра, а радиус внутреннего шара меньше расстояния от центра тетраэдра до его грани на эту же величину. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью *ABM* (рис. 3).

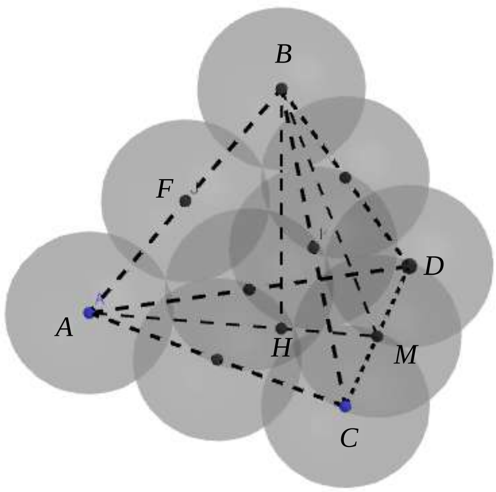


Рис. 2

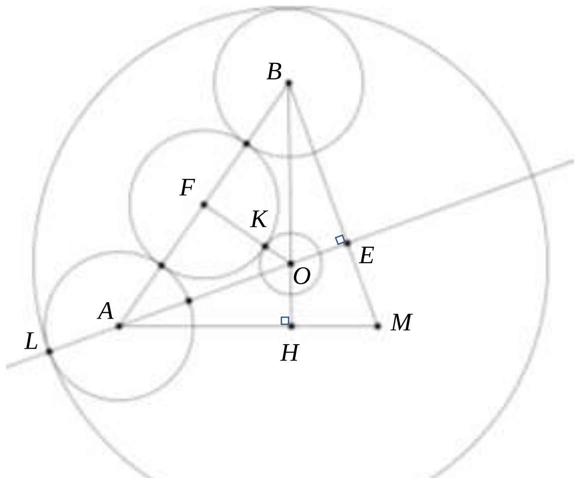


Рис. 3

Обозначим длину ребра тетраэдра – a, радиус сферы, описанной вокруг пирамиды из шаров – R, радиус шара, вписанного в центр пирамиды из шаров – r.

В треугольнике $\Delta\, ABM$: $AM = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $ME = MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$AH = BE = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AE = BH = \sqrt{AM^2 - ME^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Из подобия треугольников $\Delta\, AEM$ и $\Delta\, AHO$ имеем $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

В треугольнике $\Delta\, ABO$: $S_{ABO} = \dfrac{AH \cdot BO}{2} = \dfrac{AB \cdot FO}{2} \Rightarrow FO = \dfrac{AH \cdot BO}{AB} = \dfrac{a^2\sqrt{18}}{12a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $R = AO + AL = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} + \dfrac{a}{4} = \dfrac{a\left(\sqrt{6}+1\right)}{4}$; а $r = FO - FK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} - \dfrac{a}{4} = \dfrac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$.

$$\frac{r}{R} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{5};\; r = \frac{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{5}R = \left(\sqrt{6}-1\right)$$

Ответ. $\left(\sqrt{6}-1\right)$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-31

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}=4$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $6-2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $4x-x^2+\sqrt{(9-x^2)(-7+8x-x^2)}=7$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 10] и пусть *k* – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2-3k-10)x^2+(3k-8)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ xy+yz+xz=-22. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-31. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{3}{a^2}=4$.

Решение.

$$\frac{a^{12}-729}{27a^6}=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}+1+\frac{9}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}-2+\frac{9}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)^2+3\right)=4\cdot\left(4^2+3\right)=76$$

Ответ. 76.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $6-2\sqrt{5}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 36°, и известно, что $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение.

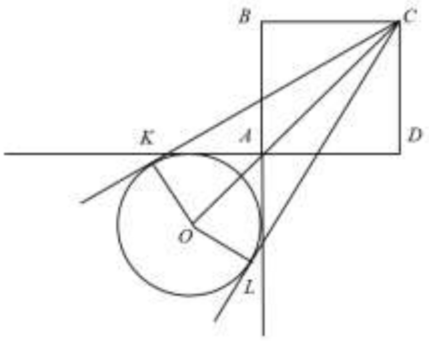


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной $6-2\sqrt{5}$ см. Тогда $OA=\sqrt{2}\left(6-2\sqrt{5}\right)$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 18°}=\dfrac{4\left(6-2\sqrt{5}\right)}{(\sqrt{5}-1)}$, диагональ квадрата *ABCD* $AC=\dfrac{4\left(6-2\sqrt{5}\right)}{(\sqrt{5}-1)}-\sqrt{2}\left(6-2\sqrt{5}\right)$, а сторона квадрата $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}-\left(6-2\sqrt{5}\right)=(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)$.

Ответ. $(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $4x-x^2+\sqrt{\left(9-x^2\right)\left(-7+8x-x^2\right)}=7$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\left(9-x^2\right)\left(-7+8x-x^2\right)}=x^2-4x+7$.

$$\sqrt{(x-3)(x+3)(x-1)(x-7)} = x^2-4x+7,$$

Перегруппируем множители $(x-3)(x-1)$ и $(x+3)(x-7)$, получим

$$\sqrt{(x^2-4x+3)(x^2-4x-21)} = x^2-4x+7.$$

Пусть $x^2-4x+3=t$, тогда $x^2-4x-21=t-24$, $x^2-4x+7=t+4$, получим

$$\sqrt{t(t-24)} = t+4,$$

$$\begin{cases} t+4 \ge 0, \\ t(t-24) = (t+4)^2; \end{cases}$$

$$t = -\frac{1}{2},$$

$$x^2-4x+3 = -\frac{1}{2}.$$

$$2x^2-8x+7=0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

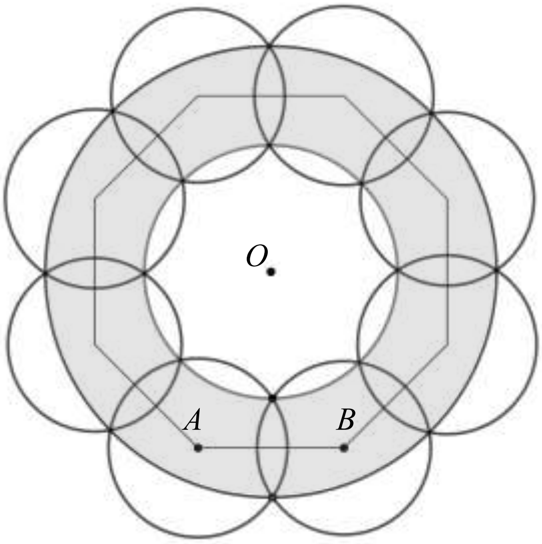


Рис. 2.

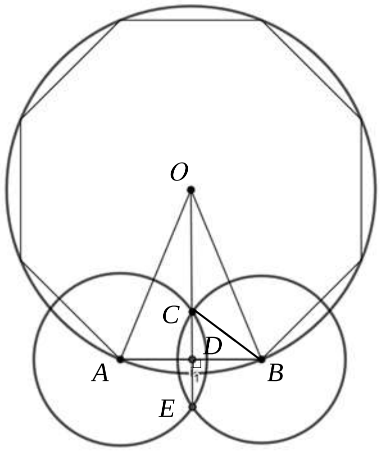


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 –ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$BD=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

Тогда *AB* = 30, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)}=\frac{30}{2\sin 22{,}5^\circ}=\frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$$S_{кольца}=\pi(OE^2-OC^2).$$

$$OD=\frac{DB}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}=\frac{15}{\text{tg}\,22{,}5^\circ};$$

$$OC=OD-8=\frac{15}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}-8;$$

$$OE=OD+8=\frac{15}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}+8;$$

$$S_{кольца}=\pi\left(\left(\frac{15}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}+8\right)^2-\left(\frac{15}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}-8\right)^2\right)=\frac{480\pi}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\frac{15}{\sin 22{,}5^\circ};\frac{480\pi}{\text{tg}\,22{,}5^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [6; 10] и пусть *k* – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2-3k-10\right)x^2+\left(3k-8\right)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8-3k}{k^2-3k-10}; \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-3k-10}. \end{cases}$$

Найдем значение *k* при условии, что $x_1=2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

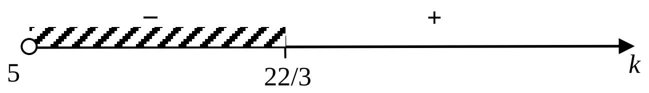
$$\begin{cases} 3x_2=\dfrac{8-3k}{k^2-3k-10}; \\ 2x_2^2=\dfrac{2}{k^2-3k-10}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{8-3k}{3\left(k^2-3k-10\right)}; \\ x_2^2=\dfrac{1}{k^2-3k-10}. \end{cases}\Rightarrow\frac{(8-3k)^2}{9\left(k^2-3k-10\right)^2}=\frac{1}{k^2-3k-10};$$

Т.к. $k^2-3k-10>0$ для $k\in(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(8-3k)^2}{9}=k^2-3k-10,$$

$$9k^2-48k+64=9k^2-27k-90,\ 21k=\frac{22}{3},\ k=\frac{22}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение *k*, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1-2x_2\le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{22}{3}$. Тогда $P = \frac{\frac{22}{3} - 6}{10 - 6} = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ xy + yz + xz = -22. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 10^2 - 2 \cdot (-22). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 144. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $R = 12$ и плоскости $x + y + z = 10$, проходящей на расстоянии $d = \frac{10}{\sqrt{3}}$, что меньше 12, от центра сферы (рис. 4).

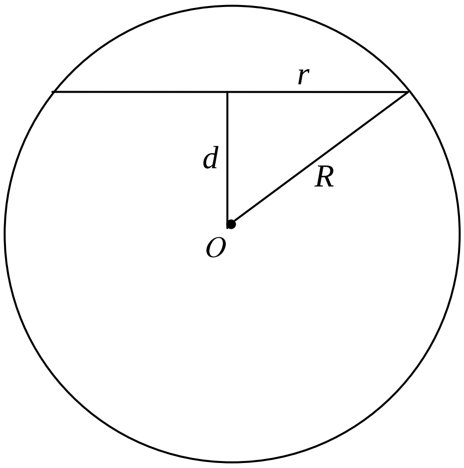


Рис.4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{144 - \frac{100}{3}} = 2\sqrt{\frac{83}{3}},$$

длина которой равна $l = 2\pi r = 4\pi\sqrt{\frac{83}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

Ответ. $4\pi\sqrt{\frac{83}{3}}$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-32

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-4096}{64a^{6}}$, если $\dfrac{a^{2}}{4}-\dfrac{4}{a^{2}}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 45°, и известно, что $\sin 22{,}5^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $5x-x^{2}+\sqrt{(16-x^{2})(-9+10x-x^{2})}=9$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [5; 7] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^{2}-3k-4)x^{2}+(3k-7)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+yz+xz=14. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-32. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}-4096}{64a^6}$, если $\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}=3$.

Решение.

$$\frac{a^{12}-4096}{64a^6}=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}+1+\frac{16}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}-2+\frac{16}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{16}-\frac{16}{a^2}\right)^2+3\right)=3\cdot\left(3^2+3\right)=36$$

Ответ. 36.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$, и точкой касания отсекает от вершины A отрезок длиной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 45°, и известно, что $\sin 22{,}5°=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Решение.

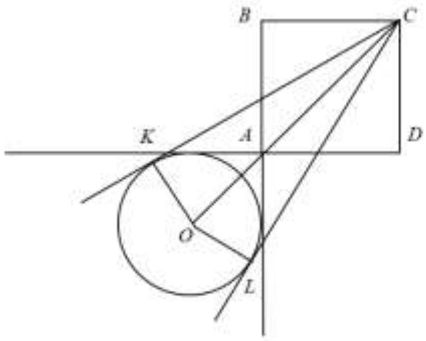


Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины A точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Тогда $OA=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$,

$OC=\frac{OK}{\sin 22{,}5°}=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, тогда диагональ квадрата $ABCD$

$$AC=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

а сторона квадрата $AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

Ответ. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $5x-x^2+\sqrt{\left(16-x^2\right)\left(-9+10x-x^2\right)}=9$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\left(16-x^2\right)\left(-9+10x-x^2\right)}=x^2-5x+9$.

$$\sqrt{(x-4)(x+4)(x-1)(x-9)}=x^2-5x+9,$$

Перегруппируем множители $(x-4)(x-1)$ и $(x+4)(x-9)$, получим

$$\sqrt{\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-4x-36\right)}=x^2-5x+9\,.$$

Пусть $x^2-5x+4=t$, тогда $x^2-4x-36=t-40$, $x^2-5x+9=t+5$, получим

$$\sqrt{t(t-40)}=t+5,$$

$$\begin{cases} t+5\ge 0, \\ t(t-40)=(t+5)^2; \end{cases}$$

$$t=-\frac{1}{2},$$

$$x^2-5x+4=-\frac{1}{2}.$$

$$2x^2-10x+9=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{15^2-9^2}=12\,.$$

Тогда AB = 24, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180\big/8\right)}=\frac{24}{2\sin 22{,}5^\circ}=\frac{12}{\sin 22{,}5^\circ}\,.$$

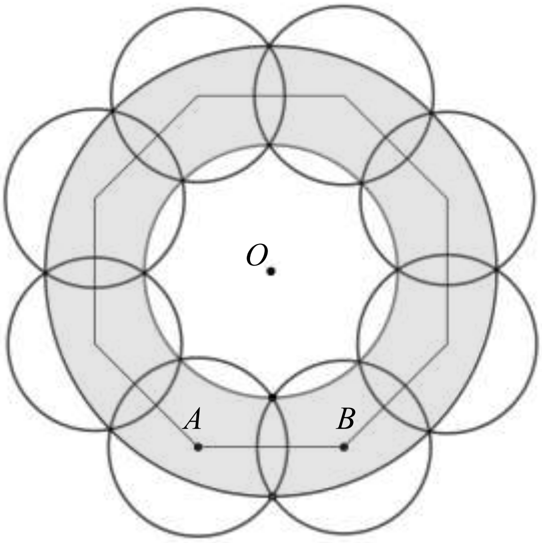


Рис. 2.

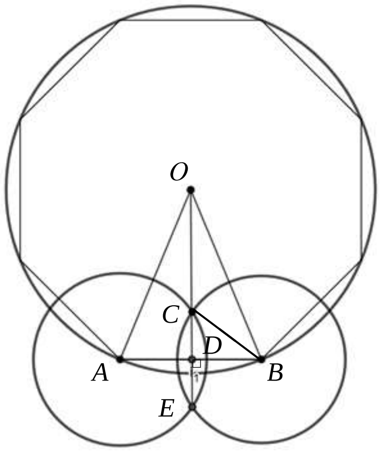


Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2)$.

$OD = \dfrac{BD}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} = \dfrac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}$;

$OC = OD - 9 = \dfrac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 9$;

$OE = OD + 9 = \dfrac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 9$;

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} + 9\right)^2 - \left(\frac{12}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ} - 9\right)^2\right) = \frac{432\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{\sin 22{,}5^\circ}$; $\dfrac{432\pi}{\operatorname{tg} 22{,}5^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [5; 7] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{7-3k}{k^2-3k-4}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2-3k-4}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

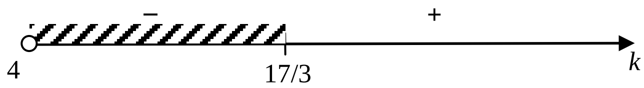
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{7-3k}{k^2-3k-4}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2-3k-4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{7-3k}{3(k^2-3k-4)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2-3k-4}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(7-3k)^2}{9(k^2-3k-4)^2} = \frac{1}{k^2-3k-4};$$

Т.к. $k^2 - 3k - 10 > 0$ для $k \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(7-3k)^2}{9}=k^2-3k-4,$$

$$9k^2-42k+49=9k^2-27k-36,\ 15k=85,\ k=\frac{17}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1-2x_2\le 0$.



Значит, условие $x_1\le 2x_2$ выполняется для $k\le\frac{17}{3}$. Тогда $P=\frac{17/3-5}{7-5}=\frac{1}{3}$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+yz+xz=14. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=8^2-2\cdot 14. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ x^2+y^2+z^2=36. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $R=6$ и плоскости $x+y+z=8$, проходящей на расстоянии $d=\frac{8}{\sqrt{3}}$, что меньше 6, от центра сферы (рис. 4).

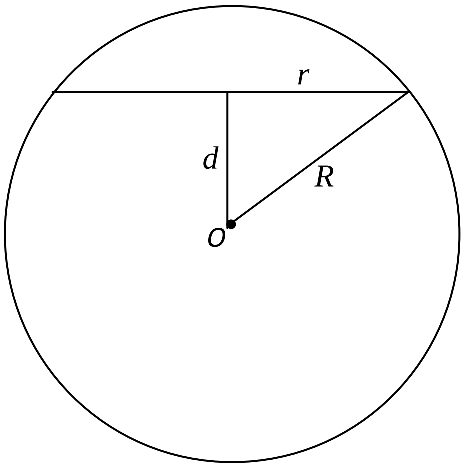


Рис. 4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - \frac{64}{3}} = 2\sqrt{\frac{11}{3}},$$

длина которой равна $l = 2\pi r = 4\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

Ответ. $4\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-41

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}=6$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон AB и AD квадрата $ABCD$, и точкой касания отсекает от вершины A отрезок длиной 2 см. Из точки C к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 30°, и известно, что $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $3x-x^2+\sqrt{(9-x^2)(6x-x^2)}=0$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=61 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 22 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [11; 18], и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2+2k-99)x^2+(3k-7)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ xy+yz+xz=18. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-41. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}-729}{27a^6}$, если $\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}=6$.

Решение.

$$\frac{a^{12}-729}{27a^6}=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}+1+\frac{9}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{9}-2+\frac{9}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)^2+3\right)=6\cdot\left(6^2+3\right)=234$$

Ответ. 234.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*, и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной 2 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 30°, и известно, что $\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Решение.

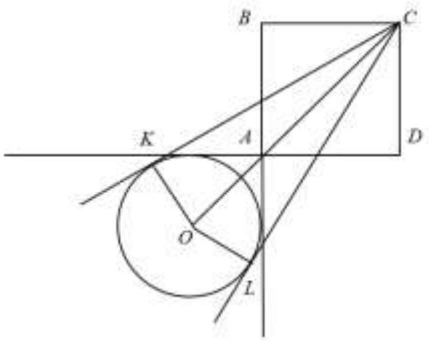


Рис.1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной 2 см. Тогда $OA=2\sqrt{2}$, $OC=\frac{OK}{\sin 15°}=\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)}$, тогда диагональ квадрата *ABCD* $AC=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}-2\sqrt{2}$, а сторона квадрата $AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}-2=2\sqrt{3}$.

Ответ. $2\sqrt{3}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $3x - x^2 + \sqrt{(9 - x^2)(6x - x^2)} = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{(9 - x^2)(6x - x^2)} = x^2 - 3x$,

$$\sqrt{(x-3)(x+3)x(x-6)} = x^2 - 3x,$$

Перегруппируем множители $x(x-3)$ и $(x+3)(x-6)$, получим

$$\sqrt{x(x-3)(x^2 - 3x - 18)} = x(x-3),$$

$$\begin{cases} x(x-3) \ge 0, \\ x(x-3)(x^2 - 3x - 18) = x^2(x-3)^2; \end{cases}$$

$$x(x-3)(x^2 - 3x - 18) - x^2(x-3)^2 = 0,$$

$$18x(x-3) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

Ответ. $\{0;3\}$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=61 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 22 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2)

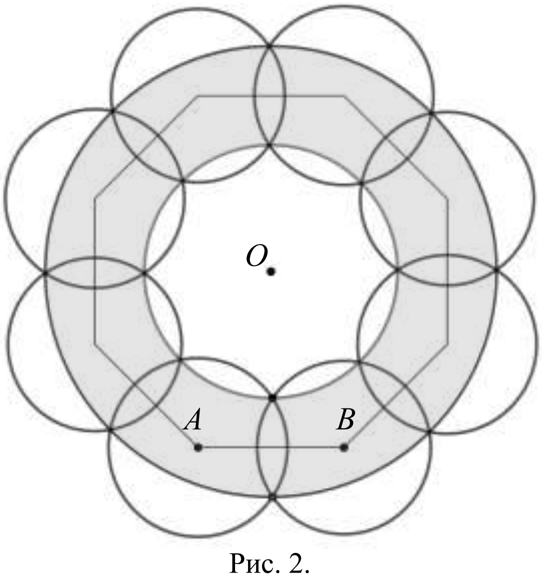


Рис. 2.

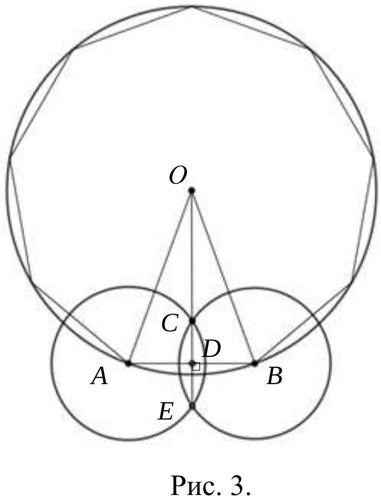


Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60.$$

Тогда AB = 120, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного девятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/9\right)} = \frac{120}{2\sin 20^\circ} = \frac{60}{\sin 20^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\text{tg } 20^\circ} = \frac{60}{\text{tg } 20^\circ};$$

$$OC = OD - 11 = \frac{60}{\text{tg } 20^\circ} - 11;$$

$$OE = OD + 11 = \frac{60}{\text{tg } 20^\circ} + 11;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{60}{\text{tg } 20^\circ} + 11\right)^2 - \left(\frac{60}{\text{tg } 20^\circ} - 11\right)^2\right) = \frac{2640\pi}{\text{tg } 20^\circ}.$$

Ответ. $\frac{60}{\sin 20^\circ}; \frac{2640\pi}{\text{tg } 20^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов Точку случайно бросают на отрезок [11; 18] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2 + 2k - 99)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 + 2k - 99}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 + 2k - 99}. \end{cases}$$

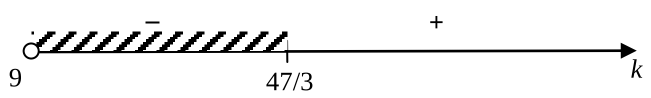
Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{7 - 3k}{k^2 + 2k - 99}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 + 2k - 99}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{7 - 3k}{3(k^2 + 2k - 99)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 + 2k - 99}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(7 - 3k)^2}{9(k^2 + 2k - 99)^2} = \frac{1}{k^2 + 2k - 99};$$

Т.к. $k^2 + 2k - 99 > 0$ для $k \in (-\infty; -11) \cup (9; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(7 - 3k)^2}{9} = k^2 + 2k - 99,\ 9k^2 - 42k + 49 = 9k^2 + 18k - 891,\ 60k = 940,\ k = \frac{47}{3}.$$

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1 - 2x_2 \le 0$.



Значит, условие $x_1 \le 2x_2$ выполняется для $k \le \frac{47}{3}$. Тогда $P \dfrac{\frac{47}{3} - 11}{18 - 11} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ xy+yz+xz=18. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=10^2-2\cdot 18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ x^2+y^2+z^2=64. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $R=8$ и плоскости $x+y+z=10$, проходящей на расстоянии $d=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$, что меньше 8, от центра сферы (рис. 4).

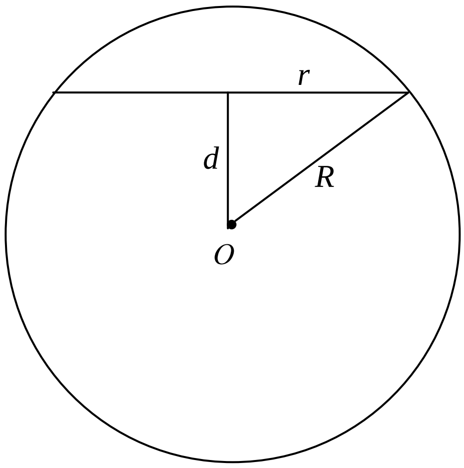


Рис. 4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{64-\frac{100}{3}}=2\sqrt{\frac{23}{3}},$$

длина которой равна $l=2\pi r=4\pi\sqrt{\dfrac{23}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

Ответ. $4\pi\sqrt{\dfrac{23}{3}}$.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-42. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^{12}-4096}{64a^6}$, если $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{4}{a^2}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $2+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 72°, и известно, что $\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $6x-x^2+\sqrt{\left(25-x^2\right)\left(-11+12x-x^2\right)}=11$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=37 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 24 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [12; 17], и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $\left(k^2+k-90\right)x^2+(3k-8)x+2=0$ удовлетворяют условию $x_1\le 2x_2$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases}x+y+z=8,\\ xy+yz+xz=-18.\end{cases}$$

Найти длину троса.

Математика. 10-11 класс.

Вариант-42

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^{12}-4096}{64a^6}$, если $\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}=5$.

Решение.

$$\frac{a^{12}-4096}{64a^6}=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}+1+\frac{16}{a^4}\right)=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^4}{16}-2+\frac{16}{a^4}+3\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\left(\left(\frac{a^2}{16}-\frac{16}{a^2}\right)^2+3\right)=5\cdot\left(5^2+3\right)=140$$

Ответ. 140.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*, и точкой касания отсекает от вершины *A* отрезок длиной $2+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 72°, и известно, что $\sin 36°=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Решение.

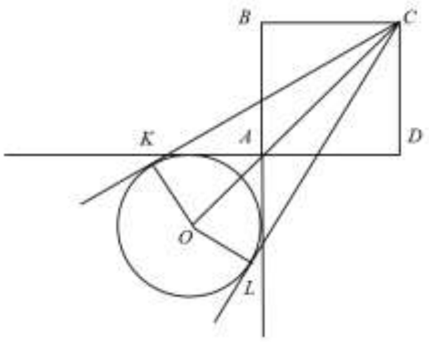


Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной $2+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ см.

Тогда $OA=\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$, $OC=\frac{OK}{\sin 36°}=\frac{2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}$, тогда диагональ квадрата *ABCD* $AC=\frac{2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}-\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$, а сторона квадрата

$$AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}-\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}=$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[4]{125}}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[4]{125}}{5}$.

Задание 3. (15 баллов) Решить уравнение $6x - x^2 + \sqrt{\left(25 - x^2\right)\left(-11 + 12x - x^2\right)} = 11$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\left(25 - x^2\right)\left(-11 + 12x - x^2\right)} = x^2 - 6x + 11$,

$$\sqrt{(x-5)(x+5)(x-1)(x-11)} = x^2 - 6x + 11.$$

Перегруппируем множители $(x-5)(x-1)$ и $(x+5)(x-11)$, получим

$$\sqrt{\left(x^2 - 6x + 5\right)\left(x^2 - 6x - 55\right)} = x^2 - 6x + 11.$$

Пусть $x^2 - 6x + 5 = t$, тогда $x^2 - 6x - 55 = t - 60$, $x^2 - 6x + 11 = t + 6$, получим

$$\sqrt{t(t-40)} = t + 5,$$

$$\begin{cases} t + 6 \ge 0, \\ t(t-60) = (t+6)^2; \end{cases}$$

$$t = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 - 6x + 5 = -\frac{1}{2}.$$

$$2x^2 - 12x + 11 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{14}}{2}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{6 \pm \sqrt{14}}{2}\right\}$.

Задание 4. (20 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=37 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 24 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35.$$

Тогда AB = 70, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного девятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/9\right)} = \frac{70}{2\sin 20^\circ} = \frac{35}{\sin 20^\circ}.$$

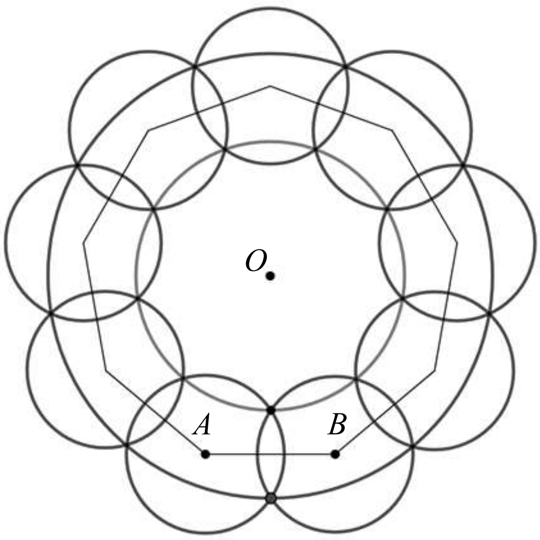


Рис. 2.

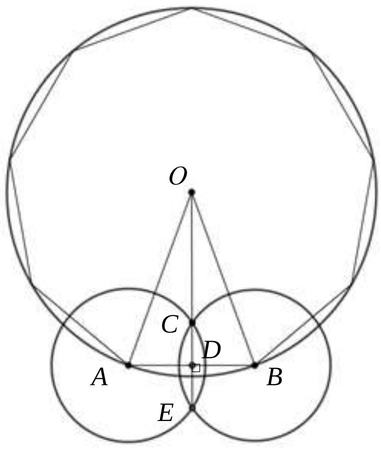


Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2)$.

$OD = \dfrac{BD}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \dfrac{35}{\operatorname{tg} 20^\circ}$;

$OC = OD - 12 = \dfrac{35}{\operatorname{tg} 20^\circ} - 12$;

$OE = OD + 12 = \dfrac{35}{\operatorname{tg} 20^\circ} + 12$;

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{35}{\operatorname{tg} 20^\circ} + 12\right)^2 - \left(\frac{35}{\operatorname{tg} 20^\circ} - 12\right)^2\right) = \frac{1680\pi}{\operatorname{tg} 20^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{35}{\sin 20^\circ}; \dfrac{1680\pi}{\operatorname{tg} 20^\circ}$.

Задание 5. (20 баллов) Точку случайно бросают на отрезок [12; 17] и пусть k – получившееся значение. Найти вероятность, что корни уравнения $(k^2 + k - 90)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \le 2x_2$.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 + k - 90}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 + k - 90}. \end{cases}$$

Найдем значение k при условии, что $x_1 = 2x_2$, а затем воспользуемся методом интервалов.

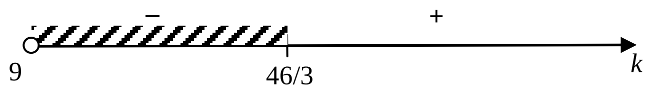
$$\begin{cases} 3x_2 = \dfrac{8 - 3k}{k^2 + k - 90}; \\ 2x_2^2 = \dfrac{2}{k^2 + k - 90}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{8 - 3k}{3(k^2 + k - 90)}; \\ x_2^2 = \dfrac{1}{k^2 + k - 90}. \end{cases} \Rightarrow \frac{(8 - 3k)^2}{9(k^2 + k - 90)^2} = \frac{1}{k^2 + k - 90};$$

Т.к. $k^2 + 2k - 99 > 0$ для $k \in (-\infty; -10) \cup (9; +\infty)$, умножив обе части равенства на квадрат этого выражения, получим

$$\frac{(8-3k)^2}{9}=k^2+k-90,$$

$9k^2-48k+64=9k^2+9k-810$, $57k=874$, $k=\frac{46}{3}$.

Изобразим на числовой оси полученное значение k, и проверим, какая часть оси удовлетворяет условию $x_1-2x_2\le 0$.



Значит, условие $x_1\le 2x_2$ выполняется для $k\le\frac{47}{3}$. Тогда $P=\frac{\frac{46}{3}-12}{17-12}=\frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задание 6. (30 баллов) При изготовлении стального троса, выяснилось, что трос имеет длину такую же, что и кривая, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+yz+xz=-18. \end{cases}$$

Найти длину троса.

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы: возведем первое уравнение в квадрат и дважды вычтем из него второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=8^2-2\cdot(-18). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ x^2+y^2+z^2=10. \end{cases}$$

Тогда, данная кривая есть пересечение сферы с центром в начале координат адиуса $R=10$ и плоскости $x+y+z=8$, проходящей на расстоянии $d=\frac{8}{\sqrt{3}}$, что меньше 10, от центра сферы (рис. 4).

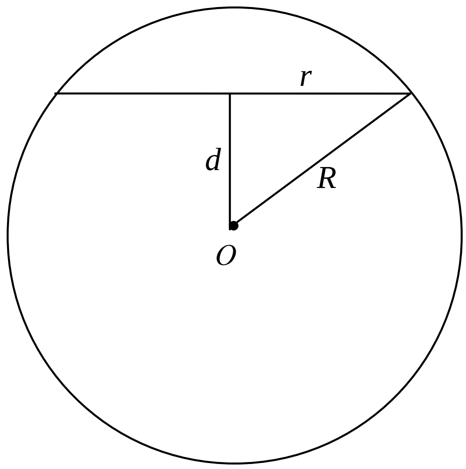


Рис. 4

Следовательно, искомая кривая есть окружность радиуса

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{100-\frac{64}{3}}=2\sqrt{\frac{59}{3}},$$

длина которой равна $l=2\pi r=4\pi\sqrt{\frac{59}{3}}$ и равна длине изготавливаемого троса.

Ответ. $4\pi\sqrt{\frac{59}{3}}$.