Математика. 9 класс.

Вариант-11

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8+256}{16a^4}$, если $\frac{a}{2}+\frac{2}{a}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD,* и точками касания отсекает от вершины *A* отрезки длиной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 60°.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Сереже привезли на исследование объект объемом около 200 монолитов (контейнер, рассчитанный на 200 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{1}{9}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{11}{18}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Женя арендовал самокат. Саша и Женя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Владимир Сергеевич. Автомобили встретились через 3 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя встретились на расстоянии 1 км от первого корпуса. Найти скорости автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 30 км на 1,25 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 4 раза меньше скорости автомобиля Владимира Сергеевича. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Задание 5. (20 баллов)

Найти x_0-y_0, если x_0 и y_0 решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3-2023x=y^3-2023y+2020, \\ x^2+xy+y^2=2022. \end{cases}$$

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=13 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 10 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Математика. 9 класс

Вариант-11. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^8+256}{16a^4}$, если $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}=5$.

Решение.

$$\frac{a^8+256}{16a^4}=\frac{a^4}{16}+\frac{16}{a^4}=\frac{a^4}{16}+2+\frac{16}{a^4}-2=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}\right)^2-2=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}+2+\frac{4}{a^2}-2\right)^2-2=\left(\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2-2\right)^2-2=\left(5^2-2\right)^2-2=527.$$

Ответ. 527.

Задание 2. (10 баллов) **Задание 2.** (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*, и точками касания отсекает от вершины *A* отрезки длиной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти сторону квадрата, если угол между касательными равен 60°.

Решение.

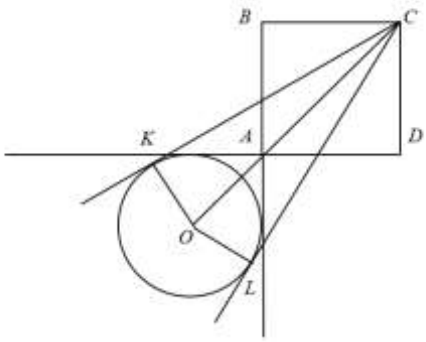

Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной 4 см. Тогда $OA=4\sqrt{2}$, $OC=\dfrac{OK}{\sin 30^\circ}=8$, тогда диагональ квадрата *ABCD* $AC=8-4\sqrt{2}$, а сторона квадрата $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=4(\sqrt{2}-1)$.

Ответ. $4(\sqrt{2}-1)$.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Сереже привезли на исследование объект объемом около 200 монолитов (контейнер, рассчитанный на 200 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\dfrac{1}{9}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{11}{18}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Решение.

Определим точное число монолитов. Известно, что вероятность того, что монолит окажется супесью, равна $\frac{1}{9}$, ближайшее к 200 число, которое делится на 9 – 198. Значит всего монолитов 198. Монолиты озерно-ледникового генезиса составляют все супеси (198:9=22) и часть суглинков. Найдем, сколько монолитов озерно-ледникового генезиса среди суглинков: Всего суглинков 198:9·8=176. Среди них морские составляют $\frac{11}{18}$ от общего числа, то есть 121. Значит суглинков озерно-ледникового генезиса 55. Тогда общее число монолитов озерно-ледникового генезиса: 22+55=77.

Ответ. 77.

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Женя арендовал самокат. Саша и Женя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Владимир Сергеевич. Автомобили встретились через 3 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя встретились на расстоянии 1 км от первого корпуса. Найти скорости автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 30 км на 1,25 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 4 раза меньше скорости автомобиля Владимира Сергеевича. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Решение.

Так как скорости самоката и автомобиля преподавателя отличаются в 4 раза, то за то же время, автомобиль преподавателя пройдет в 4 раза больше. Тогда расстояние между корпусами 1+4=5 км.

Обозначим за x - скорость самоката, за t - время, которое тратит каршеринг на путь в 30 км, s - путь, который прошел автомобиль-каршеринг до встречи с автомобиле преподавателя, v - скорость каршеринга.

Решая систему:

$$\begin{cases} \frac{30}{x} = t + 1{,}25, \\ \frac{5-s}{4x} = \frac{s}{v} = 0{,}05, \\ tv = 30, \end{cases} \text{ получим } \begin{cases} x = 15, \\ t = 0{,}6, \\ s = 2, \\ v = 40. \end{cases}.$$

Ответ. 15, 40, 60.

Задание 5. (20 баллов)

Найти $x_0 - y_0$, если x_0 и y_0 решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 2023x = y^3 - 2023y + 2020, \\ x^2 + xy + y^2 = 2022. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 2023y - 2023x = 2020, \\ x^2 + xy + y^2 = 2022. \end{cases}$$

Пусть x_0 и y_0 решение системы уравнений. Тогда

$$\begin{cases} {x_0}^3 - {y_0}^3 + 2023y_0 - 2023x_0 = 2020, \\ {x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\begin{cases} (x_0 - y_0)\left({x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2\right) - 2023(x_0 - y_0) = 2020, \\ {x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2022(x_0 - y_0) - 2023(x_0 - y_0) = 2020, \\ {x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

Тогда $x_0 - y_0 = -2020$.

Ответ. -2020.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=13 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 10 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

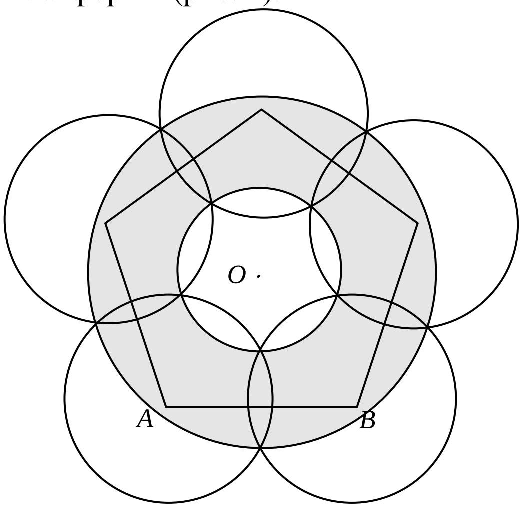

Рис. 2.

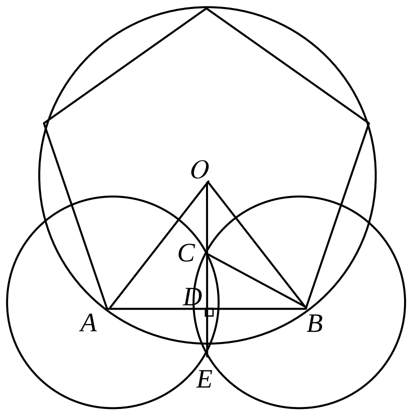

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Тогда AB = 24, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/5\right)} = \frac{24}{2\sin 36°} = \frac{12}{\sin 36°}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$OC = OD - 5 = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 5;$$

$$OE = OD + 5 = \frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 5;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 5\right)^2 - \left(\frac{12}{\operatorname{tg} 36^\circ} - 5\right)^2\right) = \frac{240\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Ответ. $\frac{12}{\sin 36^\circ}; \frac{240\pi}{\operatorname{tg} 36^\circ}$.

Математика. 9 класс.

Вариант-12

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 60°.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Даше привезли на исследование объект объемом около 100 монолитов (контейнер, рассчитанный на 100 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Валя арендовал самокат. Саша и Валя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Сергей Владимирович. Автомобили поравнялись через 4 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя поравнялись на расстоянии 1 км от главного корпуса. Найти скорость автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 18 км на 1,4 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 6 раза меньше скорости автомобиля Сергей Владимирович. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Задание 5. (20 баллов)

Найти x_0+y_0, если x_0 и y_0 решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3-2023x=2023y-y^3-2020, \\ x^2-xy+y^2=2022. \end{cases}$$

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Математика. 9 класс.

Вариант-12. Решение

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$.

Решение.

$$\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^4}{16}-\frac{16}{a^4}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^2+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)=\left(3^2+2\right)\cdot 3=33.$$

Ответ. 33.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается продолжений двух сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* со стороной 4 см. Из точки *C* к этой окружности проведены две касательные. Найти радиус окружности, если угол между касательными равен 60°.

Решение.

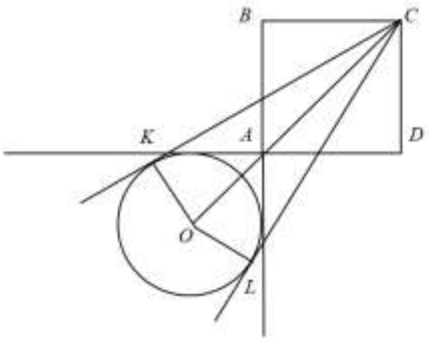

Рис. 1

Отрезок, который отсекается от вершины *A* точкой касания окружности, равен радиусу этой окружности. Диагональ квадрата *ABCD* $AC=4\sqrt{2}$. Если провести радиусы окружности в точки касания, то получится квадрат, со стороной *R*. Тогда $OA=R\sqrt{2}$, $OC=\frac{OK}{\sin 30°}=2R$. В результате получаем уравнение $2R=R\sqrt{2}+4\sqrt{2}$, откуда $R=4(\sqrt{2}+1)$.

Ответ. $4(\sqrt{2}+1)$.

Задание 3. (15 баллов) Инженеру-лаборанту Даше привезли на исследование объект объемом около 100 монолитов (контейнер, рассчитанный на 100 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Решение.

Определим точное число монолитов. Известно, что вероятность того, что монолит окажется супесью, равна $\frac{1}{7}$, ближайшее к 100 число, которое делится на 7 – 98. Значит всего монолитов 98. Монолиты озерно-ледникового генезиса составляют все супеси (98:7=14) и часть суглинков. Найдем, сколько монолитов озерно-ледникового генезиса среди суглинков: Всего суглинков 98:7·6=84. Среди них морские составляют $\frac{9}{14}$ от общего числа, то есть 63. Значит суглинков озерно-ледникового генезиса 21. Тогда общее число монолитов озерно-ледникового генезиса: 14+21=35.

Ответ. 35.

Задание 4. (20 баллов) Чтобы добраться от первого до второго корпуса университета, Саша взял автомобиль-каршеринг, а Валя арендовал самокат. Саша и Валя выехали одновременно из первого корпуса во второй, и в это же время из второго корпуса в первый на автомобиле выехал преподаватель Сергей Владимирович. Автомобили поравнялись через 4 минуты, а самокат и автомобиль преподавателя поравнялись на расстоянии 1 км от главного корпуса. Найти скорость автомобилей и самоката, если самокат преодолевает путь в 18 км на 1,4 часа дольше, чем автомобиль-каршеринг, и его скорость в 6 раза меньше скорости автомобиля Сергей Владимирович. В ответе указать скорости в $\frac{км}{ч}$ в порядке возрастания.

Решение.

Так как скорости самоката и автомобиля преподавателя отличаются в 6 раз, то за то же время, автомобиль преподавателя пройдет в 6 раз больше. Тогда расстояние между корпусами 1+6=7 км.

Обозначим за x - скорость самоката, за t - время, которое тратит каршеринг на путь в 20 км, s - путь, который прошел автомобиль-каршеринг до встречи с автомобилем преподавателя, v - скорость каршеринга.

Решая систему:

$$\begin{cases} \frac{18}{x} = t + 1{,}4, \\ \frac{7-s}{6x} = \frac{s}{v} = \frac{1}{15}, \\ tv = 18, \end{cases} \text{ получим } \begin{cases} x = 10, \\ t = 0{,}4, \\ s = 3, \\ v = 45. \end{cases}.$$

Ответ. 10, 45, 60.

Задание 5. (20 баллов)

Найти $x_0 + y_0$, если x_0 и y_0 решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2023x = 2023y - y^3 - 2020, \\ x^2 - xy + y^2 = 2022. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2023x - 2023y = -2020, \\ x^2 - xy + y^2 = 2022; \end{cases}$$

Пусть x_0 и y_0 решение системы уравнений. Тогда

$$\begin{cases} {x_0}^3 + {y_0}^3 - 2023y_0 - 2023x_0 = -2020, \\ {x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\begin{cases} (x_0 + y_0)\left({x_0}^2 - x_0 y_0 + {y_0}^2\right) - 2023(x_0 + y_0) = -2020, \\ {x_0}^2 - x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2022(x_0 + y_0) - 2023(x_0 + y_0) = -2020, \\ {x_0}^2 - x_0 y_0 + {y_0}^2 = 2022; \end{cases}$$

Тогда $x_0 + y_0 = 2020$.

Ответ. 2020.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 5 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=25 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 14 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

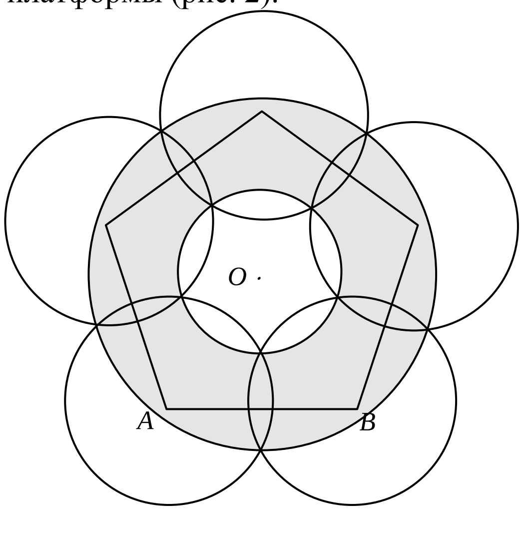

Рис. 2.

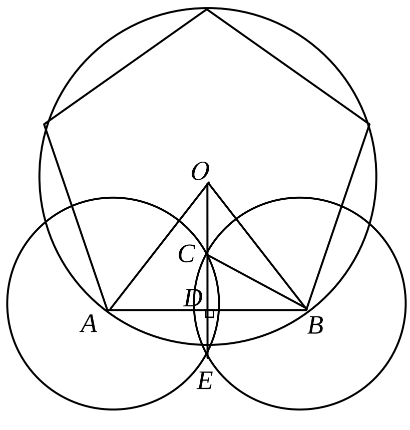

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда $AB = 48$, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180\!\!\diagup\!\!5\right)} = \frac{48}{2\sin 36°} = \frac{24}{\sin 36°}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\text{tg}\, 36°} = \frac{24}{\text{tg}\, 36°};$$

$$OC = OD - 7 = \frac{24}{\text{tg}\, 36°} - 7;$$

$$OE = OD + 7 = \frac{24}{\text{tg}\, 36°} + 7;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{24}{\text{tg}\, 36°} + 7\right)^2 - \left(\frac{24}{\text{tg}\, 36°} - 7\right)^2\right) = \frac{672\pi}{\text{tg}\, 36°}.$$

Ответ. $\frac{24}{\sin 36°}; \frac{672\pi}{\text{tg}\, 36°}.$

Математика. 9 класс.

Вариант-21

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}.$$

Задание 2. (10 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 8$, $AC = 4$, $BC = 6$ проведена биссектриса AK, а на стороне AC отмечена точка M так, что $AM:CM = 3:1$. Точка N – точка пересечения AK и BM. Найти AN.

Задание 3. (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Ивану Ивановичу привезли на исследование объект объемом около 300 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 300 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Задание 4. (20 баллов) Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}>\left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}.$$

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^{3}-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_{3}}+3}\le 0$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}.$$

Решение.

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{4088484}}=$$

$$=\left(\frac{10001}{2023\cdot 10001}-\frac{10001}{2022\cdot 10001}\right)\cdot 2023+\frac{1}{\sqrt{2022^2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2022}\right)\cdot 2023+\frac{1}{2022}=\frac{2022-2023}{2022\cdot 2023}\cdot 2023+\frac{1}{2022}=-\frac{1}{2022}+\frac{1}{2022}=0$$

Ответ. 0.

Задание 2. (10 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 8$, $AC = 4$, $BC = 6$ проведена биссектриса AK, а на стороне AC отмечена точка M так, что $AM{:}CM = 3{:}1$. Точка N – точка пересечения AK и BM. Найти AN.

Решение.

Проведем через точку A прямую, параллельную прямой BC и пересекающую прямую BM в точке L (рис. 1).

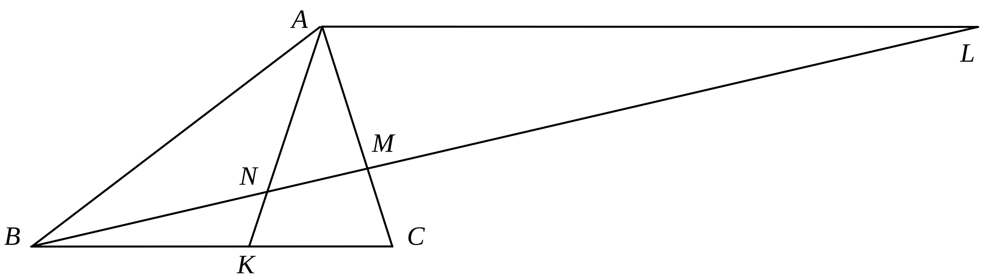

Рис. 1.

По свойству биссектрисы $\frac{BK}{CK}=\frac{AB}{AC}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}\ \Rightarrow \frac{BK}{6-BK}=\frac{2}{1}\Rightarrow BK=4$

Рассмотрим подобные треугольники AML и CMB: $\frac{AL}{BC}=\frac{AM}{MC}$.

Следовательно, $\frac{AL}{BC}=3$, $AL=3BC=18$.

Рассмотрим подобные треугольники LAN и BKN: $\frac{AN}{NK}=\frac{AL}{BK}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$.

Длина биссектрисы составляет

$$AK=\sqrt{AB\cdot AC-BK\cdot CK}=\sqrt{8\cdot 4-4\cdot 2}=2\sqrt{6}.$$

$$AN=\frac{9}{11}AK=\frac{18\sqrt{6}}{11}$$

Ответ. $\frac{18\sqrt{6}}{11}$.

Задание 3. (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Ивану Ивановичу привезли на исследование объект объемом около 300 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 300 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Решение.

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{8}$, ближайшее к 300 число, которое делится на 8 – 296. Значит всего проб в контейнере 296. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (296:8=37) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 296:8·7=259. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{22}{37}$ от общего числа, то есть 176. Значит проб легкой высокосернистой нефти 83. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 37+83=120.

Ответ. 120.

Задание 4. (20 баллов) Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}.$$

Решение.

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}$$

Перейдем к равносильному неравенству

$$27+18+12+8+\ldots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n > 72,$$

$$27\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 72,$$

$$\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > \frac{8}{3}$$

Левая часть неравенства представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} > \frac{8}{3},\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > \frac{8}{9},\ \frac{1}{9} > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\ \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{6}.$$

Найдем наименьшее значение n, для которого выполняется это неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = \frac{32}{162} = \frac{1}{6}\cdot\frac{32}{27} > \frac{1}{6},\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = \frac{64}{486} = \frac{1}{6}\cdot\frac{64}{81} < \frac{1}{6}.$$

Таким образом, наименьшее натуральное значение $n = 5$.

Ответ. 5.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3} \le 0$.

Решение.

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3} \le 0$ имеет решение только если $x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^3 - 4t + 3 = 0$, $t^3 - t - 3t + 3 = 0$, $(t-1)(t^2 + t - 3) = 0$, $t = 1$ или $t = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Уравнения $x + \frac{1}{x} = 1$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ не имеют корней.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} x + 1 = 0,$$

$$D = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{2\sqrt{13} - 2}{4} = \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{2}\right)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{13} \pm \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}.$$

Ответ. $\frac{-1 - \sqrt{13} \pm \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=41 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40.$$

Тогда AB = 80, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного семиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/7\right)} = \frac{80}{2\sin\left(180/7\right)} = \frac{40}{\sin\left(180/7\right)}.$$

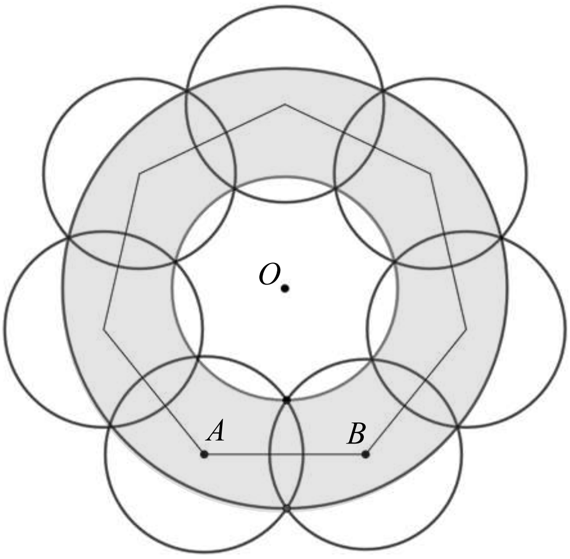

Рис. 2.

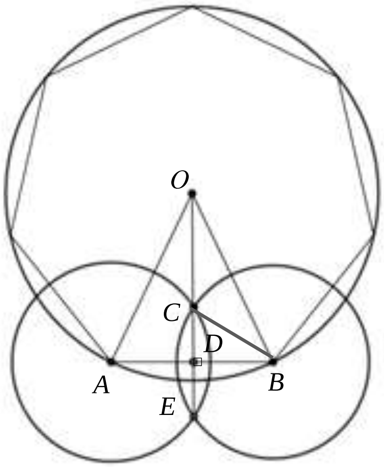

Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2)$.

$OD = \dfrac{BD}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} = \dfrac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}$;

$OC = OD - 9 = \dfrac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 9$;

$OE = OD + 9 = \dfrac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 9$;

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 9\right)^2 - \left(\frac{40}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 9\right)^2\right) = \frac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$$

Ответ. $\dfrac{40}{\sin\left(180/7\right)}; \dfrac{1440\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}$.

Математика. 9 класс.

Вариант-22

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 4090506+\sqrt{4092529}\,.$$

Задание 2. (10 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 9$, $AC = 3$, $BC = 8$ проведена биссектриса AK, а на стороне AC отмечена точка M так, что $AM:CM = 3:1$. Точка N – точка пересечения AK и BM. Найти KN.

Задание 3. (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Татьяне Васильевне привезли на исследование объект объемом около 150 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 150 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{2}{11}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{7}{13}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Задание 4. (20 баллов) Найти наименьшее натуральное решение неравенства $\left(\frac{2023}{2022}\right)^{36+24+16+\ldots+36\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}>\left(\frac{2023}{2022}\right)^{96}$.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^{3}-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^{3}}+4}\leq 0$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=26 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 20 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Математика. 9 класс.

Вариант-22. решение

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 4090506+\sqrt{4092529}\,.$$

Решение.

$$\left(\frac{10001}{20232023}-\frac{10001}{20222022}\right)\cdot 4090506+\sqrt{4092529}$$

$$=\left(\frac{10001}{2023\cdot 10001}-\frac{10001}{2022\cdot 10001}\right)\cdot 4090506+\sqrt{2023^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2022}\right)\cdot 2022\cdot 2023+2023=\frac{2022-2023}{2022\cdot 2023}\cdot 2022\cdot 2023+2023=-1+2023=2022$$

Ответ. 2022.

Задание 2. (10 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 9$, $AC = 3$, $BC = 8$ проведена биссектриса AK, а на стороне AC отмечена точка M так, что $AM{:}CM = 3{:}1$. Точка N – точка пересечения AK и BM. Найти KN.

Решение.

Проведем через точку A прямую, параллельную прямой BC и пересекающую прямую BM в точке L (рис. 1).

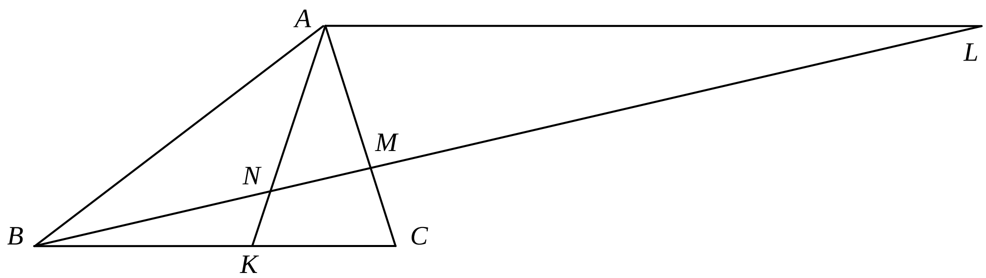

Рис. 1.

По свойству биссектрисы $\frac{BK}{CK}=\frac{AB}{AC}=\frac{9}{3}=\frac{3}{1}\ \Rightarrow \frac{BK}{8-BK}=\frac{3}{1}\Rightarrow BK=6$

Рассмотрим подобные треугольники AML и CMB: $\frac{AL}{BC}=\frac{AM}{MC}$.

Следовательно, $\frac{AL}{BC}=3$, $AL=3BC=24$.

Рассмотрим подобные треугольники LAN и BKN: $\frac{AN}{NK}=\frac{AL}{BK}=\frac{24}{6}=\frac{4}{1}$.

Длина биссектрисы составляет

$$AK=\sqrt{AB\cdot AC-BK\cdot CK}=\sqrt{9\cdot 3-6\cdot 2}=\sqrt{15}\,.$$

$$KN=\frac{1}{5}AK=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задание 3. (15 баллов) В лабораторию НИИ научному сотруднику Татьяне Васильевне привезли на исследование объект объемом около 150 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 150 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{2}{11}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{7}{13}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Решение.

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{2}{11}$, ближайшее к 150 число, которое делится на 11 – 143. Значит всего проб в контейнере 143. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (143:11·2=26) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 143:11·9=117. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{7}{13}$ от общего числа, то есть 77. Значит проб легкой высокосернистой нефти 40. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 26+40=66.

Ответ. 66.

Задание 4. (20 баллов) Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{36+24+16+...+36\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{96}.$$

Решение.

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{36+24+16+...+36\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{96}.$$

$$36+24+16+..+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n > 96,$$

$$36\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 96,$$

$$\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > \frac{8}{3}$$

Левая часть неравенства представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} > \frac{8}{3},\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > \frac{8}{9},\ \frac{1}{9} > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\ \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{6}.$$

Найдем наименьшее значение n, для которого выполняется это неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = \frac{32}{162} = \frac{1}{6}\cdot\frac{32}{27} > \frac{1}{6},\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = \frac{64}{486} = \frac{1}{6}\cdot\frac{64}{81} < \frac{1}{6}.$$

Таким образом, наименьшее натуральное значение $n=5$.

Ответ. 5.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+4}\le 0$.

Решение.

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+4}\le 0$ имеет решение только если $x^3-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+4=0$.

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $t^3-5t+4=0$, $t^3-t-4t+4=0$, $(t-1)(t^2+t-4)=0$, $t=1$ или $t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Уравнения $x+\frac{1}{x}=1$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ не имеют корней.

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2+\frac{1+\sqrt{17}}{2}x+1=0,$$

$$D=\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2-4=\frac{2\sqrt{17}+2}{4}=\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{17}+2}}{2}\right)^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{2\sqrt{17}+2}}{4}.$$

Ответ. $\frac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{2\sqrt{17}+2}}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 7 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=26 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 20 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{26^2-10^2}=24.$$

Тогда AB = 48, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного семиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{48}{2\sin\left(180/7\right)}=\frac{24}{\sin\left(180/7\right)}.$$

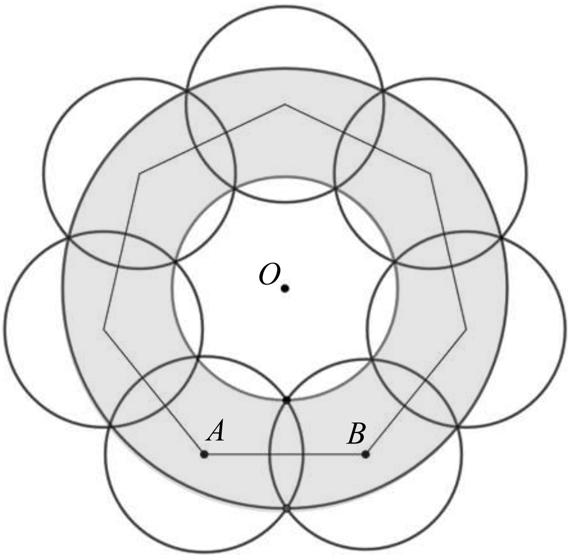

Рис. 2.

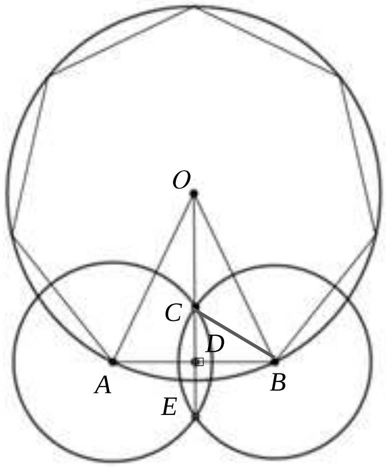

Рис. 3.

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2)$.

$OD = \dfrac{BD}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} = \dfrac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}$;

$OC = OD - 10 = \dfrac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 10$;

$OE = OD + 10 = \dfrac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 10$;

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} + 10\right)^2 - \left(\frac{24}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)} - 10\right)^2\right) = \frac{960\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}.$$

Ответ. $\dfrac{24}{\sin\left(180/7\right)}; \dfrac{960\pi}{\operatorname{tg}\left(180/7\right)}$.

Математика. 9 класс

Вариант-31

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8+1296}{36a^4}$, если $\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{a}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 15 касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 6 и 3 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины *B* точкой касания.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Павлу Павловичу привезли на исследование объект объемом около 100 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 100 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n=\frac{x_{n-1}+298x_n+x_{n+1}}{300}$. Найти

$$\sqrt{\frac{x_{2023}-x_2}{2021}\cdot\frac{2022}{x_{2023}-x_1}-2023}.$$

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-3x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}+5}\leq 0$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^8+1296}{36a^4}$, если $\dfrac{a}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{a}=5$.

Решение.

$$\frac{a^8+1296}{36a^4}=\frac{a^4}{36}+\frac{36}{a^4}=\frac{a^4}{36}+2+\frac{36}{a^4}-2=\left(\frac{a^2}{6}+\frac{6}{a^2}\right)^2-2=$$

$$=\left(\frac{a^2}{6}+2+\frac{6}{a^2}-2\right)^2-2=\left(\left(\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{a}\right)^2-2\right)^2-2=\left(5^2-2\right)^2-2=527.$$

Ответ. 527.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 15 касается двух смежных сторон AB и AD квадрата $ABCD$. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 6 и 3 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины B точкой касания.

Решение.

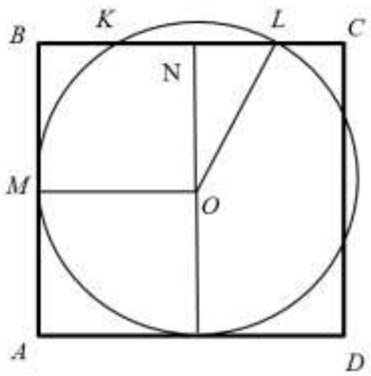

Рис. 1

Пусть $X-$искомый отрезок, тогда $X+15-$сторона квадрата. Отрезок $KL=15+X-6-3=X+6$. Рассмотрим ΔONL. По теореме Пифагора справедливо равенство:

$$15^2=X^2+\left(\frac{X+6}{2}\right)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно X, которое имеет только один положительный корень 12.

Ответ. 12.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Павлу Павловичу привезли на исследование объект объемом около 100 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 100 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{7}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{9}{14}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Решение.

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{7}$, ближайшее к 100 число, которое делится на 7 – 98. Значит всего проб в контейнере 98. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (98:7=14) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 98:7·6=84. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{9}{14}$ от общего числа, то есть 63. Значит проб легкой высокосернистой нефти 21. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 14+21=35.

Ответ. 35.

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1} + 298x_n + x_{n+1}}{300}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1} - 2023}$.

Решение.

Из данного в условии задачи соотношения легко выводится, что для всех $n \geq 2$ $x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$, из чего следует, что последовательность является арифметической прогрессией. Действительно,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 298x_n + x_{n+1}}{300},$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1},$$

$$x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n.$$

Обозначим разность этой прогрессии d, $d \neq 0$ (по условию).

Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1} - 2023} = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1 - d}{2021} \cdot \frac{2022}{x_1 + 2022d - x_1} - 2023} =$

$= \sqrt{\frac{2021d}{2021} \cdot \frac{2022}{2022d} - 2023} = 1 - 2023 = -2022$.

Ответ. -2022.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5} \leq 0$.

Решение.

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5} \leq 0$ имеет решение только если

$x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^3 - 6t + 5 = 0$, $t^3 - t - 5t + 5 = 0$, $(t-1)(t^2 + t - 5) = 0$, $t = 1$ или $t = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Уравнения $x + \frac{1}{x} = 1$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ не имеют корней.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$x^2 + \frac{1 + \sqrt{21}}{2} x + 1 = 0,$$

$$D = \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{2\sqrt{21} + 6}{4} = \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{21} + 6}}{2}\right)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{21} \pm \sqrt{2\sqrt{21} + 6}}{4}.$$

Ответ. $\frac{-1 - \sqrt{21} \pm \sqrt{2\sqrt{21} + 6}}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=17 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 16 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

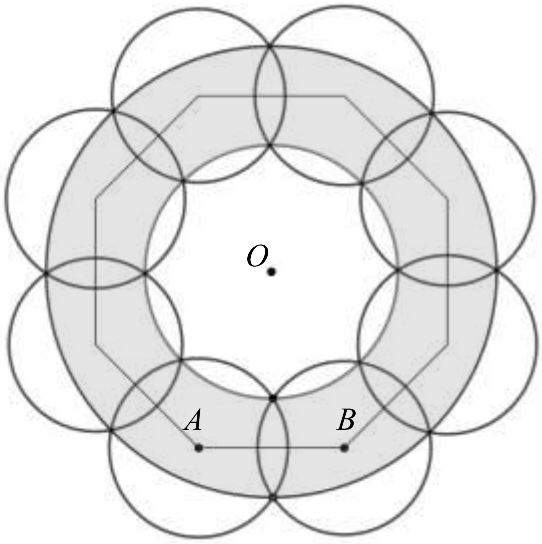

Рис. 2.

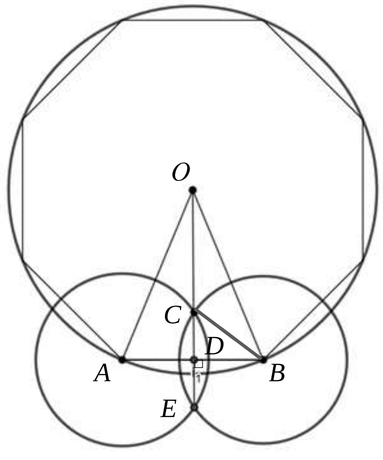

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

Тогда AB = 30, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)} = \frac{30}{2\sin 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{DB}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ} = \frac{15}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ};$$

$$OC = OD - 8 = \frac{15}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ} - 8;$$

$$OE = OD + 8 = \frac{15}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ} + 8;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{15}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ} + 8\right)^2 - \left(\frac{15}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ} - 8\right)^2\right) = \frac{480\pi}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\frac{15}{\sin 22{,}5^\circ}$; $\frac{480\pi}{\mathrm{tg}\, 22{,}5^\circ}$.

Математика. 9 класс

Вариант-32

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-6561}{81a^4}\cdot\frac{3a}{a^2+9}$, если $\frac{a}{3}-\frac{3}{a}=4$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 10 касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 4 и 2 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины *B* точкой касания.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Валентине Ивановне привезли на исследование объект объемом около 200 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 200 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{9}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{11}{18}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n\geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n=\frac{x_{n-1}+398x_n+x_{n+1}}{400}$. Найти

$$\sqrt{\frac{x_{2023}-x_2}{2021}\cdot\frac{2022}{x_{2023}-x_1}+2021}.$$

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3-4x-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}+6}\leq 0$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-6561}{81a^4}\cdot\frac{3a}{a^2+9}$, если $\frac{a}{3}-\frac{3}{a}=4$.

Решение.

$$\frac{a^8-6561}{81a^4}\cdot\frac{3a}{a^2+9}=\left(\frac{a^4}{81}-\frac{81}{a^4}\right)\cdot\frac{3a}{a^2+9}=\left(\frac{a^2}{9}+\frac{9}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{9}-\frac{9}{a^2}\right)\cdot\frac{3a}{a^2+9}=$$

$$=\left(\frac{a^2}{9}-2+\frac{9}{a^2}+2\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)\cdot\frac{3a}{a^2+9}=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)^2+2\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)=\left(4^2+2\right)\cdot 4=72\,.$$

Ответ. 72.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 10 касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD*. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 4 и 2 см соответственно. Найти длину отрезка, который окружность отсекает от вершины *B* точкой касания.

Решение.

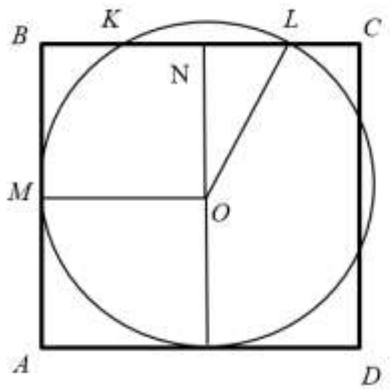

Рис.1

Пусть X – искомый отрезок, тогда $X+10$ – сторона квадрата. Отрезок $KL=10+X-4-2=X+4$. Рассмотрим ΔONL. По теореме Пифагора праведливо равенство:

$$10^2=X^2+\left(\frac{X+4}{2}\right)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно X, которое имеет только один положительный корень 8.

Ответ. 8.

Задание 3. (15 баллов) В отдел контроля качества НПЗ инженеру Валентине Ивановне привезли на исследование объект объемом около 200 проб нефти (контейнер, рассчитанный на 200 проб, который был заполнен почти весь). Каждая проба имеет определенные характеристики по содержанию серы – малосернистые, либо высокосернистые, и плотности – легкие, либо тяжелые. Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранная проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{9}$. При этом относительная частота, что случайно выбранная проба окажется легкой малосернистой нефтью составляет $\frac{11}{18}$. Сколько всего проб высокосернистой нефти содержит объект, если среди проб тяжелой нефти не оказалось малосернистой?

Решение.

Определим точное число проб нефти. Известно, что относительная частота того, что проба окажется пробой тяжелой нефти, равна $\frac{1}{9}$, ближайшее к 200 число, которое делится на 9 – 198. Значит всего проб в контейнере 198. Пробы высокосернистой нефти составляют все пробы тяжелой нефти (198:9=22) и часть проб легкой. Найдем, сколько проб высокосернистой нефти среди проб легкой. Всего проб легкой нефти 198:9·8=176. Среди них пробы малосернистой составляют $\frac{11}{18}$ от общего числа, то есть 121. Значит проб легкой высокосернистой нефти 55. Тогда общее число проб высокосернистой нефти: 22+55=77.

Ответ. 77.

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}}{400}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} + 2021$.

Решение.

Из данного в условии задачи соотношения легко выводится, что для всех $n \geq 2$ $x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$, из чего следует, что последовательность является арифметической прогрессией. Действительно,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}}{400},$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1},$$

$$x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n.$$

Обозначим разность этой прогрессии d, $d \neq 0$ (по условию).

Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_2}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} + 2021 = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1 - d}{2021} \cdot \frac{2022}{x_1 + 2022d - x_1}} + 2021 =$

$= \sqrt{\frac{2021d}{2021} \cdot \frac{2022}{2022d}} + 2021 = 1 + 2021 = 2022.$

Ответ. 2022.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} \leq 0$.

Решение.

Неравенство $\sqrt[2022]{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} \le 0$ имеет решение только если

$x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^3 - 7t + 6 = 0$, $t^3 - t - 6t + 6 = 0$, $(t-1)(t^2 + t - 6) = 0$, $t = 1$, или $t = 2$, или $t = -3$.

Уравнение $x + \frac{1}{x} = 1$ не имеет корней.

$$x + \frac{1}{x} = 2,\ x^2 - 2x + 1 = 0,\ (x-1)^2 = 0,\ x = 1.$$

$$x + \frac{1}{x} = -3,\ x^2 + 3x + 1 = 0,\ D = \left(\sqrt{5}\right)^2,\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $\left\{1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$**.**

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 8 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=15 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 18 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

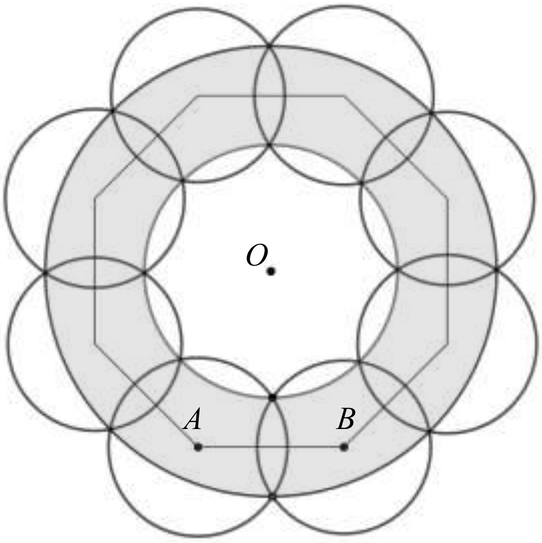

Рис. 2.

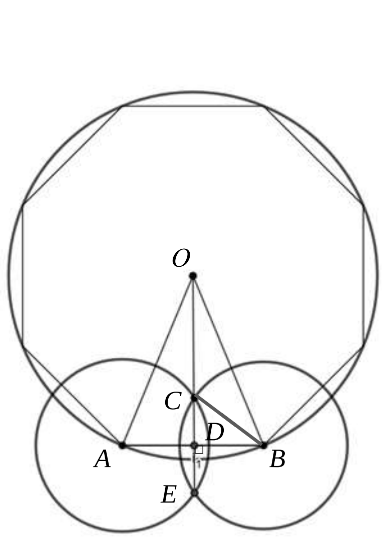

Рис. 3.

Точка *O* – центр нефтяной платформы, а точки *A* и *B* – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник ΔAOB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ΔBCD по теореме Пифагора найдем *BD*:

$$BD = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$

Тогда *AB* = 24, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного восьмиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/8\right)} = \frac{24}{2\sin 22{,}5^\circ} = \frac{12}{\sin 22{,}5^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом *OE* вычесть площадь круга с радиусом *OC*.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ} = \frac{12}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ};$$

$$OC = OD - 9 = \frac{12}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ} - 9;$$

$$OE = OD + 9 = \frac{12}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ} + 9;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{12}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ} + 9\right)^2 - \left(\frac{12}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ} - 9\right)^2\right) = \frac{432\pi}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ}.$$

Ответ. $\frac{12}{\sin 22{,}5^\circ}$; $\frac{432\pi}{\mathrm{tg}\ 22{,}5^\circ}$.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=5$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается двух смежных сторон *AB* и *AD* квадрата *ABCD* и отсекает от вершин *B* и *D* точкой касания отрезок длиной 4 см. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 2 и 1 см соответственно. Найти радиус окружности.

Задание 3. (15 баллов) В образовательный центр «Юный геолог» привезли объект объемом около 150 монолитов (контейнер, рассчитанный на 150 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{2}{11}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{7}{13}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n\geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n=\frac{x_{n-1}+98x_n+x_{n+1}}{100}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023}-x_1}{2022}\cdot\frac{2021}{x_{2023}-x_2}+2021}$.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $252\frac{7}{8}\left(x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)=2023$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=61 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 22 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}$, если $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=5$.

Решение.

$$\frac{a^8-256}{16a^4}\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^4}{16}-\frac{16}{a^4}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{16}{a^2}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}=$$

$$=\left(\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^2+2\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)=\left(5^2+2\right)\cdot 3=81.$$

Ответ. 81.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается двух смежных сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и отсекает от вершин B и D точкой касания отрезок длиной 4 см. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 2 и 1 см соответственно. Найти радиус окружности.

Решение.

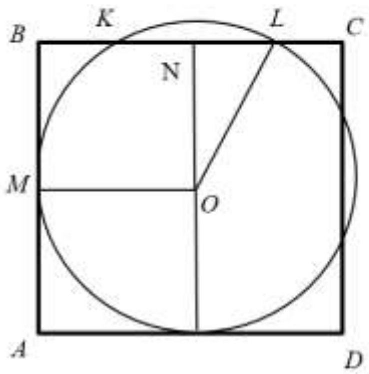

Рис. 1

Пусть $R-$радиус окружности, тогда $R+4-$сторона квадрата. Отрезок $KL=4+R-2-1=R+1$. Рассмотрим треугольник ONL. По теореме Пифагора справедливо равенство:

$$R^2=4^2+\left(\frac{1+R}{2}\right)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно R, которое имеет только один положительный корень 5.

Ответ. 5.

Задание 3. (15 баллов) В образовательный центр «Юный геолог» привезли объект объемом около 150 монолитов (контейнер, рассчитанный на 150 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{2}{11}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{7}{13}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Решение.

Определим точное число монолитов. Известно, что относительная частота того, что монолит окажется супесью, равна $\frac{2}{11}$, ближайшее к 150 число, которое делится на 11 – 143. Значит всего монолита 143. Монолиты озерно-ледникового генезиса составляют все супеси (143:11·2=26) и часть суглинков. Найдем, сколько монолитов озерно-ледникового генезиса среди суглинков: Всего суглинков 143:11·9=117. Среди них морские составляют $\frac{7}{13}$ от общего числа, то есть 77. Значит суглинков озерно-ледникового генезиса 40. Тогда общее число монолитов озерно-ледникового генезиса: 26+40=66.

Ответ. 66.

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1} + 98x_n + x_{n+1}}{100}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_{2023} - x_2} + 2021}$.

Решение.

Из данного в условии задачи соотношения легко выводится, что для всех $n \geq 2$ $x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$, из чего следует, что последовательность является арифметической прогрессией. Действительно,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 98x_n + x_{n+1}}{100},$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1},$$

$$x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n.$$

Обозначим разность этой прогрессии d, $d \neq 0$ (по условию).

Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_{2023} - x_2} + 2021} = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_1 + 2022d - x_1 - d} + 2021} =$

$= \sqrt{\frac{2022d}{2022} \cdot \frac{2021}{2021d} + 2021} = 1 + 2021 = 2022$.

Ответ. 2022.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $252\frac{7}{8}\left(x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2}\right) = 2023$.

Решение.

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=2023:252\frac{7}{8}$$

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=8$$

$$x^2-\frac{2x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=8-\frac{2x^2}{x+1}$$

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=8-\frac{2x^2}{x+1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=8-2\cdot\frac{x^2}{x+1}$$

Введем замену $\frac{x^2}{x+1}=y$.

Получим уравнение $y^2=8-2y$, $y^2+2y-8=0$; $y=-4$ или $y=2$

1) если $y=-4$, то $\frac{x^2}{x+1}=-4$; $x^2+4x+4=0$; $x=-2$.

2) если $y=2$, то $\frac{x^2}{x+1}=2$; $x^2-2x-2=0$; $x=1-\sqrt{3}$ или $x=1+\sqrt{3}$.

Ответ. -2; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=61 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 22 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

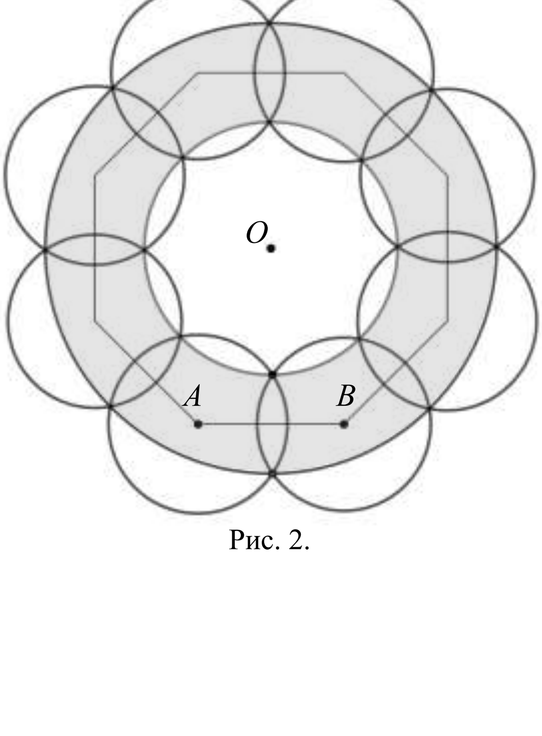

Рис. 2.

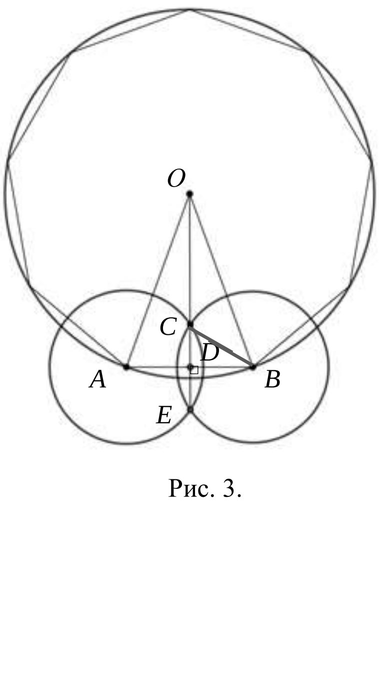

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{61^2-11^2}=60.$$

Тогда AB = 120, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного девятиугольника окружности:

$$OB=\frac{AB}{2\sin\left(180/9\right)}=\frac{120}{2\sin 20^\circ}=\frac{60}{\sin 20^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца}=\pi(OE^2-OC^2).$$

$$OD=\frac{BD}{\mathrm{tg}\,20^\circ}=\frac{60}{\mathrm{tg}\,20^\circ};$$

$$OC=OD-11=\frac{60}{\mathrm{tg}\,20^\circ}-11;$$

$$OE=OD+11=\frac{60}{\mathrm{tg}\,20^\circ}+11;$$

$$S_{кольца}=\pi\left(\left(\frac{60}{\mathrm{tg}\,20^\circ}+11\right)^2-\left(\frac{60}{\mathrm{tg}\,20^\circ}-11\right)^2\right)=\frac{2640\pi}{\mathrm{tg}\,20^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{60}{\sin 20^\circ};\dfrac{2640\pi}{\mathrm{tg}\,20^\circ}.$

Математика. 9 класс.

Вариант-42

Задание 1. (5 баллов) Найти $\frac{a^8+256}{16a^4}$, если $\frac{a}{2}+\frac{2}{a}=3$.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается двух смежных сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и отсекает от вершин B и D точкой касания отрезок длиной 8 см. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 4 и 2 см соответственно. Найти радиус окружности.

Задание 3. (15 баллов) В образовательный центр «Юный геолог» привезли на исследование объект объемом около 300 монолитов (контейнер, рассчитанный на 300 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\frac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1}+198x_n+x_{n+1}}{200}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023}-x_1}{2022}\cdot\frac{2021}{x_{2023}-x_2}+2022}$.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $674\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=2023$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса r=37 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 24 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Задание 1. (5 баллов) Найти $\dfrac{a^8+256}{16a^4}$, если $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}=3$.

Решение.

$$\frac{a^8+256}{16a^4}=\frac{a^4}{16}+\frac{16}{a^4}=\frac{a^4}{16}+2+\frac{16}{a^4}-2=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}\right)^2-2=$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}+2+\frac{4}{a^2}-2\right)^2-2=\left(\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2-2\right)^2-2=\left(3^2-2\right)^2-2=47.$$

Ответ. 47.

Задание 2. (10 баллов) Окружность касается двух смежных сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и отсекает от вершин B и D точкой касания отрезок длиной 8 см. На двух других сторонах окружность точками пересечения отсекает от вершин отрезки 4 и 2 см соответственно. Найти радиус окружности.

Решение.

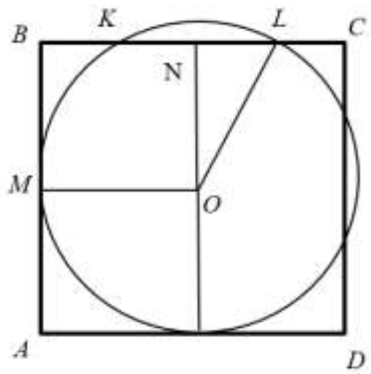

Рис.1

Пусть R – радиус окружности, тогда $R+8$ – сторона квадрата. Отрезок $KL=8+R-4-2=R+2$. Рассмотрим ΔONL. По теореме Пифагора справедливо равенство:

$$R^2=8^2+\left(\frac{2+R}{2}\right)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно R, которое имеет только один положительный корень 10.

Ответ. 10.

Задание 3. (15 баллов) В образовательный центр «Юный геолог» привезли на исследование объект объемом около 300 монолитов (контейнер, рассчитанный на 300 монолитов, который был заполнен почти весь). Каждый монолит имеет определенное наименование (супесь, либо суглинок) и генезис (морские, либо озерно-ледниковые отложения). Относительная частота (статистическая вероятность), что случайно выбранный монолит окажется супесью равна $\dfrac{1}{8}$. При этом относительная частота, что случайно выбранный монолит окажется морским суглинком составляет $\frac{22}{37}$. Сколько всего монолитов озерно-ледникового генезиса содержит объект, если среди супесей не оказалось морских?

Решение.

Определим точное число монолитов. Известно, что относительная частота того, что монолит окажется супесью, равна $\frac{1}{8}$, ближайшее к 300 число, которое делится на 8 – 296. Значит всего монолитов 296. Монолиты озерно-ледникового генезиса составляют все супеси (296:8=37) и часть суглинков. Найдем, сколько монолитов озерно-ледникового генезиса среди суглинков: Всего суглинков 296:8·7=259. Среди них морские составляют $\frac{22}{37}$ от общего числа, то есть 176. Значит суглинков озерно-ледникового генезиса 83. Тогда общее число монолитов озерно-ледникового генезиса: 37+83=120.

Ответ. 120.

Задание 4. (20 баллов) Для числовой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой, начиная с $n \geq 2$ различны, выполняется соотношение $x_n = \frac{x_{n-1} + 198x_n + x_{n+1}}{200}$. Найти $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_{2023} - x_2} + 2022}$.

Решение.

Из данного в условии задачи соотношения легко выводится, что для всех $n \geq 2$ $x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$, из чего следует, что последовательность является арифметической прогрессией. Действительно,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 198x_n + x_{n+1}}{200},$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1},$$

$$x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n .$$

Обозначим разность этой прогрессии d, $d \neq 0$ (по условию).

Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_{2023} - x_2} + 2022} = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1}{2022} \cdot \frac{2021}{x_1 + 2022d - x_1 - d} + 2022} =$

$= \sqrt{\frac{2022d}{2022} \cdot \frac{2021}{2021d} + 2022} = 1 + 2022 = 2023.$

Ответ. 2023.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $674\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{x^2}{(1-x)^2}\right) = 2023.$

Решение.

$$x^2 + \frac{x^2}{(1-x)^2} = 2023 : 674\frac{1}{3}$$

$$x^2 + \frac{x^2}{(1-x)^2} = 3$$

$$x^2 - \frac{2x^2}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} = 3 - \frac{2x^2}{1-x}$$

$$\left(x-\frac{x}{1-x}\right)^2=3-\frac{2x^2}{1-x}$$

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^2=3-2\cdot\frac{x^2}{1-x}$$

Введем замену $\frac{x^2}{1-x}=y$.

Получим уравнение $y^2=3-2y$.

$y^2+2y-3=0$; $y=-3$ или $y=1$

1) если $y=-3$, то $\frac{x^2}{1-x}=-3$; $x^2-3x+3=0$ - уравнение не имеет действительных корней.

2) если $y=1$, то $\frac{x^2}{1-x}=1$; $x^2+x-1=0$; $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Задание 6. (30 баллов) Для охраны нефтяной платформы, расположенной в море, необходимо распределить вокруг нее 9 радаров, покрытие каждого из которых составляет круг радиуса *r*=37 км. Определить, на каком максимальном расстоянии от центра платформы их нужно расположить, чтобы обеспечить вокруг платформы покрытие радарами кольца шириной 24 км. Вычислить площадь этого кольца покрытия.

Решение.

Чтобы обеспечить покрытие радарами кольца вокруг платформы необходимо расположить их в вершинах правильного многоугольника, центр которого совпадает с центром платформы (рис. 2).

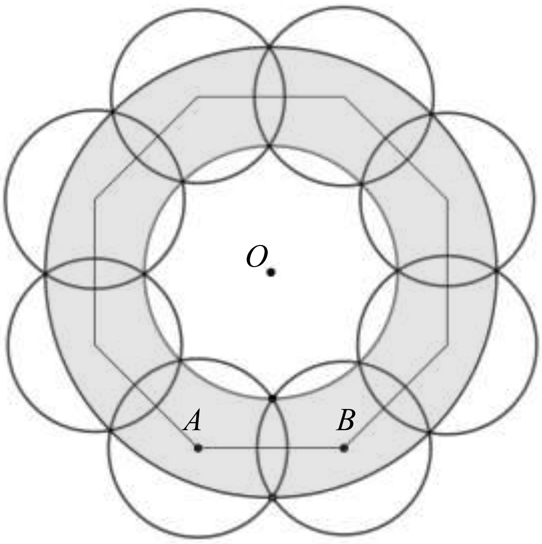

Рис. 2.

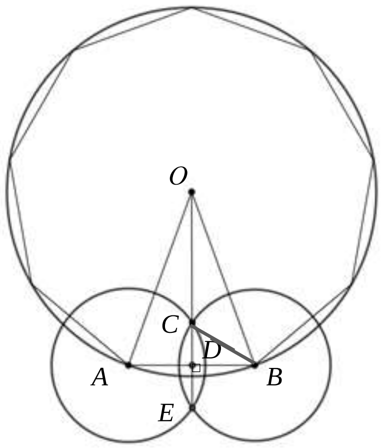

Рис. 3.

Точка O – центр нефтяной платформы, а точки A и B – точки расположения радаров. Круги – это покрытие радаров. Рассмотрим фрагмент рис. 2 - треугольник $\Delta\, AOB$ (рис. 3). В прямоугольном треугольнике $\Delta\, BCD$ по теореме Пифагора найдем BD:

$$BD=\sqrt{37^2-12^2}=35.$$

Тогда AB = 70, следовательно, расстояние от центра платформы до радаров равно радиусу описанной около правильного девятиугольника окружности:

$$OB = \frac{AB}{2\sin\left(180/9\right)} = \frac{70}{2\sin 20^\circ} = \frac{35}{\sin 20^\circ}.$$

Чтобы найти площадь кольца покрытия, нужно из площади круга с радиусом OE вычесть площадь круга с радиусом OC.

$$S_{кольца} = \pi(OE^2 - OC^2).$$

$$OD = \frac{BD}{\text{tg } 20^\circ} = \frac{35}{\text{tg } 20^\circ};$$

$$OC = OD - 12 = \frac{35}{\text{tg } 20^\circ} - 12;$$

$$OE = OD + 12 = \frac{35}{\text{tg } 20^\circ} + 12;$$

$$S_{кольца} = \pi\left(\left(\frac{35}{\text{tg } 20^\circ} + 12\right)^2 - \left(\frac{35}{\text{tg } 20^\circ} - 12\right)^2\right) = \frac{1680\pi}{\text{tg } 20^\circ}.$$

Ответ. $\frac{35}{\sin 20^\circ}; \frac{1680\pi}{\text{tg } 20^\circ}$.