Математика. Вариант-11
10 - 11 класс

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\sqrt{2023}\left(\sqrt[6]{2027\sqrt{2024}+6073}+\sqrt{\sqrt{2024}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2024}-1}.$$

Решение. Выделим куб суммы в подкоренном выражении первого слагаемого скобки:

$$2027\sqrt{2024}+6073=2024\sqrt{2024}+3\sqrt{2024}+6072+1=\left(\sqrt{2024}\right)^3+3\sqrt{2024}\cdot1^2+3\cdot\left(\sqrt{2024}\right)^2\cdot1+$$
$$+1^3=\left(\sqrt{2024}+1\right)^3.$$

Тогда $\sqrt{2023}\left(\sqrt[6]{\left(\sqrt{2024}+1\right)^3}+\sqrt{\sqrt{2024}+1}\right)\sqrt{\sqrt{2024}-1}=\sqrt{2023}\left(2\cdot\sqrt{\sqrt{2024}+1}\right)\sqrt{\sqrt{2024}-1}=$

$$=2\sqrt{2023}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2024}+1\right)\left(\sqrt{2024}-1\right)}=2\sqrt{2023}\sqrt{2024-1}=4046.$$

Ответ: 4046.

Задание 2. (10 баллов) На предприятии изготавливают инструмент для шахт, который в зависимости от качества делится на три сорта. При проверке качества в отделе технического контроля (ОТК) вероятности неверной сортировки продукции составляют:

– для инструмента первого сорта вероятность попасть во второй сорт составляет 0,015, в третий сорт – 0,01;

– для инструмента второго сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,015, в третий сорт – 0,01;

– для инструмента третьего сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,005, во второй сорт – 0,05;

Какая доля инструмента первого сорта была изготовлена, если после контроля ОТК 93,5% инструмента были признаны первосортным, а 3 % инструмента – третьесортным?

Решение. Введем обозначения: x – доля изготовленного инструмента первого сорта, y – второго сорта, z – третьего сорта.

Для инструмента первого сорта получим уравнение:

$0{,}975x+0{,}015y+0{,}005z=0{,}935$.

Для инструмента третьего сорта получим уравнение:

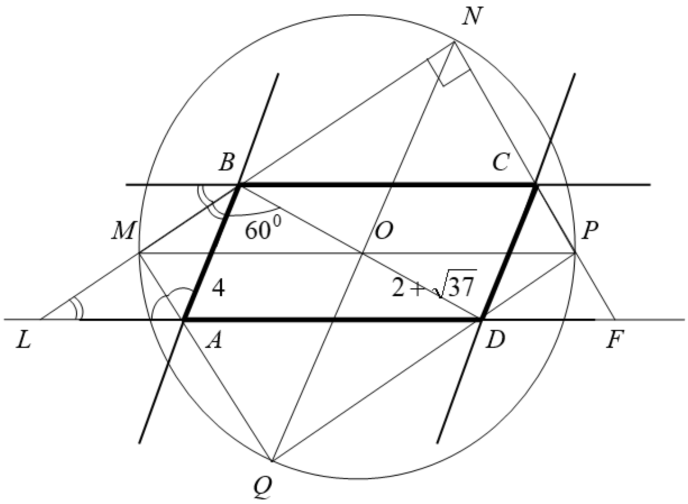
$0{,}01x+0{,}01y+0{,}945z=0{,}03$.

Воспользуемся условием, что $x+y+z=1$, и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}0{,}975x+0{,}015y+0{,}005z=0{,}935;\\0{,}01x+0{,}01y+0{,}945z=0{,}03;\\x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}195x+3y+z=187;\\2x+2y+189z=6;\\x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}192x-2z=184;\\187z=4;\\x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{4}{187};\\x=\dfrac{717}{748};\\y=\dfrac{15}{748}.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{717}{748}$.

Задание 3. (15 баллов) Меньшая сторона параллелограмма и меньшая его диагональ, соответственно равные 4 и $2+\sqrt{37}$, образуют угол в 60^0. Найдите радиус описанной окружности около четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис внешних углов заданного параллелограмма.



Решение. Пусть $ABCD$ – заданный параллелограмм. Тогда $AB=4$, $BD=2+\sqrt{37}$, $\angle ABD=60^\circ$.

По теореме косинусов в ΔABD:

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$,

$AD^2=4^2+\left(2+\sqrt{37}\right)^2-2\cdot4\cdot\left(2+\sqrt{37}\right)\cdot\cos60^\circ$,

$AD^2=16+4+4\sqrt{37}+37-2\cdot4\cdot\left(2+\sqrt{37}\right)\cdot\frac{1}{2}$,

$AD^2=57+4\sqrt{37}-8-4\sqrt{37}$, $AD^2=49$,

$AD=7$.

Пусть биссектрисы внешних углов при вершинах *A* и *B* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *M*, биссектрисы внешних углов при вершинах *B* и *C* – в точке *N*, углов при вершинах *C* и *D* – в точке *P*, а углов при вершинах *D* и *A* – в точке *Q*. Четырехугольник, образованный биссектрисами внешних углов параллелограмма, есть *MNPQ*.

Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых и секущей пересекаются под прямым углом, а значит, *MNPQ* – прямоугольник ($\angle M=\angle N=\angle P=\angle Q=90^\circ$).

Пусть биссектриса внешнего угла *B* пересекает продолжение стороны *AD* в точке *L*.

Рассмотрим ΔLBA – равнобедренный (так как *BM* – биссектриса и накрест лежащие углы при параллельных прямых *AD* и *BC* и секущей *BL* равны), то $LA=AB=4$ и биссектриса *AM* является и медианой, то есть *M* – середина *BL*.

Аналогично, в равнобедренном ΔCDF: $CD=DF=4$ и *P* – середина *CF*.

Рассмотрим трапецию *LBCF* (*AD* ‖ *BC*), в которой *MP* является средней линией, а значит, она параллельна основаниям и равна:

$$MP=\frac{1}{2}\left(LF+BC\right)=\frac{1}{2}\left(LA+AD+DF+BC\right)=\frac{1}{2}\left(2AB+2BC\right)=AB+BC.$$

По заданным числовым значениям задачи получаем: $MP=AB+BC=4+7=11$.

Итак, *MNPQ* – прямоугольник, где диагонали $MP=QN=11$ и радиус описанной около прямоугольника окружности равен $R=OM=\frac{11}{2}=5,5$.

Ответ: 5,5.

Задание 4. (20 баллов). ООО «СварМонтаж» занимается строительством линейной части магистральных газопроводов. В составе организации работают три бригады сварщиков, причем некоторые из сварщиков имеют удостоверение НАКС («Национальное Агентство Контроля сварки»). Среди сотрудников трех бригад, доли сотрудников, имеющих удостоверение НАКС, образуют геометрическую прогрессию.

Если бы количество сварщиков при неизменном проценте обладателей удостоверений НАКС в бригадах соотносилось бы как 2:3:1, то процент сварщиков, имеющих удостоверение НАКС, был бы равен 48, а если бы соотношение было бы 1:2:1, то процент сварщиков, имеющих удостоверение НАКС, составил бы 54.

Сколько процентов сотрудников в каждой бригаде имеют удостоверение НАКС?

Решение. Пусть доли сотрудников, имеющих удостоверение НАКС в каждой бригаде, составляют $\frac{p}{100}$, $\frac{q}{100}$, $\frac{r}{100}$, соответственно. Указанные доли составляют геометрическую прогрессию, следовательно, по признаку геометрической прогрессии $q^2 = p \cdot r$.

Пусть количество сотрудников (сварщиков) в каждой бригаде составляют x, y, z, соответственно.

Также по условию при соотношении сотрудников бригад 2:3:1 процент имеющих удостоверение НАКС равен 48. Это означает, что: $x : y : z = 2 : 3 : 1$, следовательно, $x = 2k$, $y = 3k$, $z = k$;

$\frac{48}{100} \cdot (x + y + z) = \frac{p}{100} \cdot x + \frac{q}{100} \cdot y + \frac{r}{100} \cdot z$; $48 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$48 \cdot (2k + 3k + k) = p \cdot 2k + q \cdot 3k + r \cdot k$; $48 \cdot (2 + 3 + 1) = p \cdot 2 + q \cdot 3 + r \cdot 1$.

А значит, $2p + 3q + r = 288$.

По условию при соотношении сотрудников бригад 1:2:1 процент имеющих удостоверение НАКС равен 54. Это означает, что $x : y : z = 1 : 2 : 1$, следовательно, $x = k$, $y = 2k$, $z = k$;

$\frac{54}{100} \cdot (x + y + z) = \frac{p}{100} \cdot x + \frac{q}{100} \cdot y + \frac{r}{100} \cdot z$; $54 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$54 \cdot (k + 2k + k) = p \cdot k + q \cdot 2k + r \cdot k$; $54 \cdot (1 + 2 + 1) = p \cdot 1 + q \cdot 2 + r \cdot 1$.

А значит, $p + 2q + r = 216$.

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p + 2q + r = 216, \\ 2p + 3q + r = 288. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p = 72 - q, \\ r = 144 - q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 48, \\ p = 24, \\ r = 96. \end{cases}$$

Ответ: 24 %, 48 %, 96 %.

Задание 5. (20 баллов). Решите неравенство: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+9} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+7} + \frac{4}{\sqrt{3}-2} < 0$.

Решение.

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+9} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+7} < -\frac{4}{\sqrt{3}-2} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+9} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+7} < \frac{4}{2-\sqrt{3}}.$$

Домножив обе части на $2-\sqrt{3} > 0$, получим

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+9} + \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+7} < \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}},$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} < 4, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} < 4.$$

Заметим, что $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 1$, следовательно, $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$. Уравнение можно записать в виде:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} + \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{x^2-6x+8} < 4.$$

Сделаем замену переменной $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} = t$, $t > 0$, тогда неравенство примет вид

$$\begin{cases} t + \frac{1}{t} < 4, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 4t + 1 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t \in \left(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right), \\ t > 0; \end{cases} \quad t \in \left(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right).$$

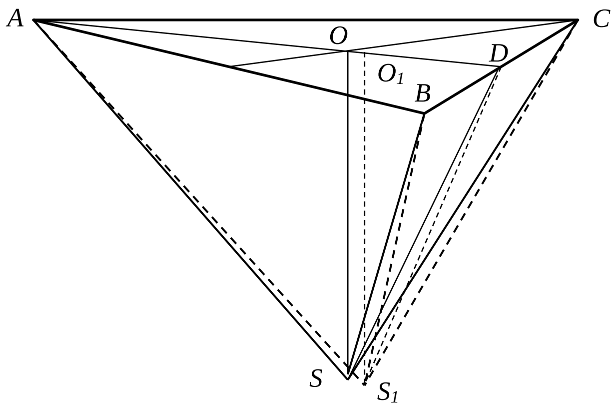
Сделаем обратную замену: $\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} > 2-\sqrt{3}, \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} < 2+\sqrt{3}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}, \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-6x+8} < 2+\sqrt{3}; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x+8 > -1, \\ x^2-6x+8 < 1; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x+9 > 0, \\ x^2-6x+7 < 0; \end{cases} \begin{cases} (x-3)^2 > 0, \\ x^2-6x+7 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne 3, \\ x \in \left(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right); \end{cases} \quad x \in \left(3-\sqrt{2};3\right) \cup \left(3;3+\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\left(3-\sqrt{2};3\right) \cup \left(3;3+\sqrt{2}\right)$.

Задание 6. (30 баллов) Для монтажа бурового оборудования в скважину используется подвес, состоящий из металлического каркаса в форме равностороннего треугольника и трех регулируемых по длине тросов протянутых через вершины треугольника и соединяющихся на крюке. Расстояние между тросами на каркасе составляет 2 м, а их первоначальная длина от каркаса до крюка – 3 м. При спуске оборудования оказалось, что крюк нужно сместить на $\frac{\sqrt{3}}{12}$ м вдоль медианы каркаса по направлению от вершины. На сколько метров нужно удлинить трос, проходящий через эту вершину?



Решение. Пирамида $SABC$ – правильная, тогда медиана $AD = AB \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, а апофема $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

Так как O – точка пересечения медиан ΔABC, то $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, а $DO = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

При увеличении длины троса SA проекция вершины пирамиды переместиться в точку O_1, так что $OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$, тогда $AO_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, а $DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Поскольку, при увеличении длины троса SA до SA_1 длина апофемы ΔS_1BC равна $S_1D = SD$, то $S_1O_1 = \sqrt{S_1D^2 - DO_1^{\,2}} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Следовательно, $S_1A = \sqrt{S_1O_1^{\,2} + AO_1^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{152}{16}} = \sqrt{9,5}$.

Тогда трос нужно удлинить на $\sqrt{9,5} - 3$.

Ответ: $\sqrt{9,5} - 3$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить

$$\sqrt{2024}\left(\sqrt[6]{2028\sqrt{2025}+6076}+\sqrt{\sqrt{2025}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2025}-1}.$$

Решение. Выделим куб суммы в подкоренном выражении первого слагаемого скобки:

$$2028\sqrt{2025}+6076=2025\sqrt{2025}+3\sqrt{2025}+6075+1=\left(\sqrt{2025}\right)^3+3\sqrt{2025}\cdot 1+$$

$$+3\cdot 2025\cdot 1+1^3=\left(\sqrt{2025}+1\right)^3.$$

Тогда $\sqrt{2024}\left(\sqrt{\sqrt{2025}+1}+\sqrt{\sqrt{2025}+1}\right)\sqrt{\sqrt{2025}-1}=\sqrt{2024}\cdot 2\sqrt{\sqrt{2025}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2025}-1}=$

$$=2\sqrt{2024}\sqrt{\left(\sqrt{2025}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2025}-1\right)}=2\sqrt{2024}\sqrt{2025-1}=4048.$$

Ответ: 4048.

Задание 2. (10 баллов) На предприятии изготавливают инструмент для шахт, который в зависимости от качества делится на три сорта. При проверке качества в отделе технического контроля (ОТК) вероятности неверной сортировки продукции составляют:

– для инструмента первого сорта вероятность попасть во второй сорт составляет 0,01, в третий сорт – 0,015;

– для инструмента второго сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,025, в третий сорт – 0,015;

– для инструмента третьего сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,005, во второй сорт – 0,02;

Какая доля инструмента первого сорта была изготовлена, если после контроля ОТК 95,5% инструмента были признаны первосортным, а 2,5 % инструмента – третьесортным?

Решение. Введем обозначения: x – доля изготовленного инструмента первого сорта, y – второго сорта, z – третьего сорта.

Для инструмента первого сорта получим уравнение:

$$0{,}975x+0{,}025y+0{,}005z=0{,}955.$$

Для инструмента третьего сорта получим уравнение:

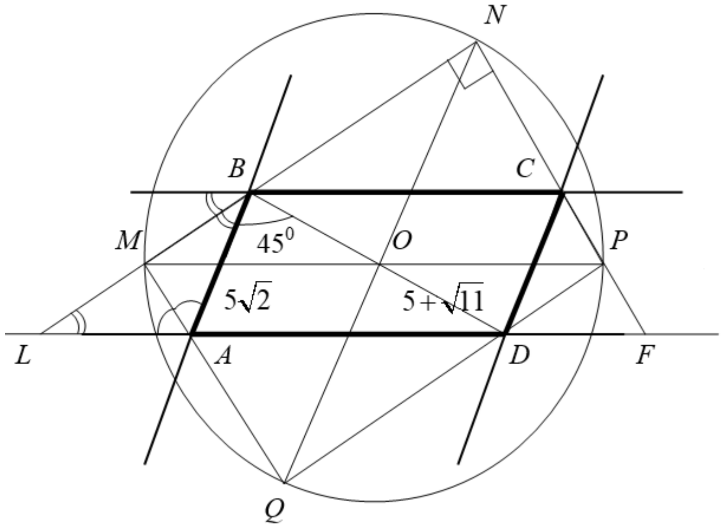
$$0{,}015x+0{,}015y+0{,}975z=0{,}025.$$

Воспользуемся условием, что $x+y+z=1$, и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}0{,}975x+0{,}025y+0{,}005z=0{,}955;\\ 0{,}015x+0{,}015y+0{,}975z=0{,}025;\\ x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}195x+5y+z=191;\\ 3x+3y+195z=5;\\ x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}190x-4z=186;\\ 192z=2;\\ x+y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{1}{96};\\ x=\dfrac{893}{912};\\ y=\dfrac{1}{96}.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{893}{912}$.

Задание 3. (15 баллов) Меньшая сторона параллелограмма и меньшая его диагональ, соответственно равные $5\sqrt{2}$ и $5+\sqrt{11}$, образуют угол в 45^0. Найдите радиус описанной окружности около четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис внешних углов заданного параллелограмма.



Решение. Пусть $ABCD$ – заданный параллелограмм. Тогда $AB=5\sqrt{2}$, $BD=5+\sqrt{11}$, $\angle ABD=45^\circ$.

Найдем вторую сторону параллелограмма, применив теорему косинусов в треугольнике ΔABD:

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$,

$AD^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2+\left(5+\sqrt{11}\right)^2-2\cdot5\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{11}\right)\cdot\cos45^\circ$,

$AD^2=50+25+10\sqrt{11}+11-2\cdot5\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{11}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$AD^2=50+25+10\sqrt{11}+11-50-10\sqrt{11}$,

$AD^2=36$, $AD=6$.

Пусть биссектрисы внешних углов при вершинах A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C – в точке N, углов при вершинах C и D – в точке P, а углов при вершинах D и A – в точке Q. Четырехугольник, образованный биссектрисами внешних углов параллелограмма, есть $MNPQ$.

Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых и секущей пересекаются под прямым углом, а значит, $MNPQ$ – прямоугольник ($\angle M=\angle N=\angle P=\angle Q=90^\circ$).

Пусть биссектриса внешнего угла B пересекает продолжение стороны AD в точке L.

Рассмотрим ΔLBA – он равнобедренный (так как BM – биссектриса и накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BL равны), тогда $LA=AB=5\sqrt{2}$ и биссектриса AM является и медианой, то есть M – середина BL.

Аналогично, в равнобедренном ΔCDF: $CD=DF=5\sqrt{2}$ и P – середина CF.

Рассмотрим трапецию $LBCF$ ($AD \parallel BC$), в которой MP является средней линией, а значит, она параллельна основаниям и равна:

$$MP=\frac{1}{2}\left(LF+BC\right)=\frac{1}{2}\left(LA+AD+DF+BC\right)=\frac{1}{2}\left(2AB+2BC\right)=AB+BC.$$

По заданным числовым значениям задачи получаем: $MP=AB+BC=5\sqrt{2}+6$.

Итак, $MNPQ$ – прямоугольник, где диагонали $MP=QN=5\sqrt{2}+6$ и радиус описанной около прямоугольника окружности равен $R=OM=\dfrac{5\sqrt{2}+6}{2}=3+2{,}5\sqrt{2}$.

Ответ: $3+2{,}5\sqrt{2}$.

Задание 4. (20 баллов). ООО «СварМонтаж» занимается строительством линейной части магистральных газопроводов. В составе организации работают три бригады сварщиков, причем некоторые из сварщиков имеют удостоверение НАКС («Национальное Агентство Контроля сварки»). Среди сотрудников трех бригад, доли сотрудников, имеющих удостоверение НАКС, образуют геометрическую прогрессию.

Если бы количество сварщиков при неизменном проценте обладателей удостоверений НАКС в бригадах соотносилось бы как 1:2:1, то процент сварщиков, имеющих удостоверение НАКС, был бы равен 45, а если бы соотношение было бы 2:3:1, то процент сварщиков, имеющих удостоверение НАКС, составил бы 40.

Сколько процентов сотрудников в каждой бригаде имеют удостоверение НАКС?

Решение. Пусть доли сотрудников, имеющих удостоверение НАКС в каждой бригаде, составляют $\frac{p}{100}$, $\frac{q}{100}$, $\frac{r}{100}$, соответственно. Указанные доли составляют геометрическую прогрессию, следовательно, по признаку геометрической прогрессии $q^2 = p \cdot r$.

Пусть количества сотрудников (сварщиков) в каждой бригаде составляют x, y, z, соответственно.

По условию при соотношении сотрудников бригад 1:2:1 процент имеющих удостоверение НАКС равен 45. Это означает, что $x:y:z = 1:2:1$, следовательно, $x = k$, $y = 2k$, $z = k$;

$$\frac{45}{100}\cdot(x+y+z) = \frac{p}{100}\cdot x + \frac{q}{100}\cdot y + \frac{r}{100}\cdot z;\ 45\cdot(x+y+z) = p\cdot x + q\cdot y + r\cdot z;$$

$$45\cdot(k+2k+k) = p\cdot k + q\cdot 2k + r\cdot k;\ 45\cdot(1+2+1) = p\cdot 1 + q\cdot 2 + r\cdot 1;$$

А значит, $p + 2q + r = 180$.

Также по условию при соотношении сотрудников бригад 2:3:1 процент имеющих удостоверение НАКС равен 40. Это означает, что $x:y:z = 2:3:1$, следовательно, $x = 2k$, $y = 3k$, $z = k$;

$$\frac{40}{100}\cdot(x+y+z) = \frac{p}{100}\cdot x + \frac{q}{100}\cdot y + \frac{r}{100}\cdot z;\ 40\cdot(x+y+z) = p\cdot x + q\cdot y + r\cdot z;$$

$$40\cdot(2k+3k+k) = p\cdot 2k + q\cdot 3k + r\cdot k;\ 40\cdot(2+3+1) = p\cdot 2 + q\cdot 3 + r\cdot 1;$$

А значит, $2p + 3q + r = 240$.

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} q^2 = p\cdot r, \\ p + 2q + r = 180, \\ 2p + 3q + r = 240. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = p\cdot r, \\ p = 60 - q, \\ r = 120 - q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 40, \\ p = 20, \\ r = 80. \end{cases}$$

Ответ: 20 %, 40 %, 80 %.

Задание 5. (20 баллов). Решите неравенство: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+16} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+14} + \frac{6}{2\sqrt{2}-3} < 0$

.

Решение.

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+16} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+14} < -\frac{6}{2\sqrt{2}-3};\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+16} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+14} < \frac{6}{3-2\sqrt{2}}.$$

Домножив обе части на $3-2\sqrt{2} > 0$, получим

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+16} + \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+14} < \frac{6\left(3-2\sqrt{2}\right)}{3-2\sqrt{2}}$$

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} < 6,\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} < 6.$$

Заметим, что $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 1$, следовательно, $3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$. Уравнение можно записать в виде:

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} + \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{x^2-8x+15} < 6.$$

Сделаем замену переменной $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15} = t$, $t > 0$, тогда неравенство примет вид

$$\begin{cases} t+\dfrac{1}{t}<6, \\ t>0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2-6t+1<0, \\ t>0; \end{cases} \quad \begin{cases} t\in\left(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right), \\ t>0; \end{cases} \quad t\in\left(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right).$$

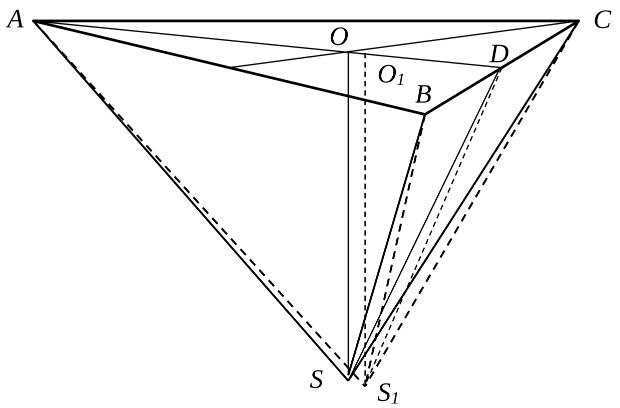
Сделаем обратную замену: $\begin{cases} \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15}>3-2\sqrt{2}, \\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15}<3+2\sqrt{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15}>\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}, \\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-8x+15}<3+2\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-8x+15>-1, \\ x^2-8x+15<1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-8x+16>0, \\ x^2-8x+14<0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)^2>0, \\ x^2-8x+14<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 4, \\ x\in\left(4-\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right); \end{cases} \quad x\in\left(4-\sqrt{2};4\right)\cup\left(4;4+\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\left(4-\sqrt{2};4\right)\cup\left(4;4+\sqrt{2}\right)$.

Задание 6. (30 баллов) Для монтажа бурового оборудования в скважину используется подвес, состоящий из металлического каркаса в форме равностороннего треугольника и трех регулируемых по длине тросов протянутых через вершины треугольника и соединяющихся на крюке. Расстояние между тросами на каркасе составляет 2,5 м, а их первоначальная длина от каркаса до крюка – 3 м. При спуске оборудования оказалось, что крюк нужно сместить на $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ м вдоль медианы каркаса по направлению от вершины. На сколько метров нужно удлинить трос, проходящий через эту вершину?



Решение. Пирамида $SABC$ – правильная, тогда медиана $AD=AB\cdot\sin 60^\circ=2{,}5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$, а апофема $SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{119}}{4}$.

Так как O – точка пересечения медиан ΔABC, то $AO=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$, а $DO=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$.

При увеличении длины троса SA проекция вершины пирамиды переместиться в точку O_1, так что $OO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, тогда $AO_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}=\dfrac{31\sqrt{3}}{30}$, а $DO_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{5}=\dfrac{13\sqrt{3}}{60}$.

Поскольку, при увеличении длины троса SA до SA_1 длина апофемы ΔS_1BC равна $S_1D=SD$, то $S_1O_1=\sqrt{S_1D^2-DO_1^{\,2}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{119}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{13\sqrt{3}}{60}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{6567}{900}}=\dfrac{\sqrt{6567}}{30}$.

Следовательно, $S_1A=\sqrt{S_1O_1^{\,2}+AO_1^{\,2}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6567}}{30}\right)^2+\left(\dfrac{31\sqrt{3}}{30}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9450}{900}}=\sqrt{10{,}5}$.

Тогда трос нужно удлинить на $\sqrt{10{,}5}-3$.

Ответ: $\sqrt{10{,}5}-3$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2024^2-173^2+2004^2-193^2+1984^2-213^2...+1504^2-693^2}.$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2024^2-173^2+2004^2-193^2+...+1504^2-693^2=$$
$$=(2024-173)(2024+173)+(2004-193)(2004+193)+...+(1504-693)(1504+693)=$$
$$=2197\cdot1851+2197\cdot1811+...+2197\cdot811=2197\cdot(1851+1811+...+811).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=1851,\ a_n=811,\ d=40,\ n=\dfrac{1851-811}{40}+1=27$.

Следовательно: $S_8=\dfrac{1851+811}{2}\cdot27=1331\cdot27$.

Тогда: $\sqrt[3]{2024^2-173^2+2004^2-193^2+...+1504^2-693^2}=\sqrt[3]{2197\cdot1331\cdot27}=13\cdot11\cdot3=429$.

Ответ: 429.

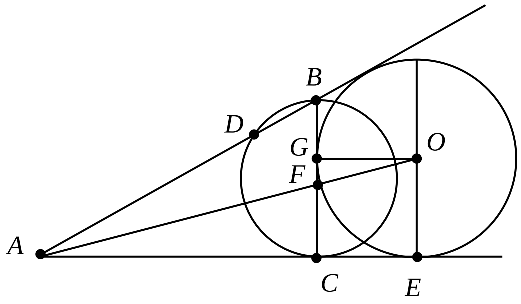
Задание 2. (10 баллов) Процедура контроля качества нефтеперерабатывающего завода подразумевает последовательный анализ проб из 10 резервуаров с готовой продукцией. Партия признается несоответствующей показателям качества, если отбракованы две пробы. Вероятность отбраковки одной пробы p = 0,1. Найти вероятность того, что партия будет признана несоответствующей показателям качества после анализа шестой пробы.

Решение. Для того чтобы партию признали несоответствующей показателям качества, нужно, чтобы была отбракована одна проба из первых пяти и шестая проба. Вероятность того, что была отбракована одна проба из первых пяти. равна $P_5(1)=5\cdot p\cdot(1-p)^4=5\cdot0{,}1\cdot0{,}9^4=0{,}5\cdot0{,}6561=0{,}32805$. Тогда вероятность, что после шестой пробы партию признают несоответствующей показателям качества, составит $P_6(1\text{из}5{,}6)=p\cdot P_5(1)=0{,}1\cdot0{,}32805=0{,}032805$

Ответ: 0,032805

Задание 3. (15 баллов) Катет BC прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Найти радиус окружности, касающейся катета BC и продолжений сторон AC и AB, если AC= 24, AD=18.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AB = \dfrac{AC^2}{AD} = \dfrac{24^2}{18} = 32$.

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 32^2 - 24^2 = 448 \Rightarrow BC = \sqrt{448} = 8\sqrt{7}$.

Окружность с центром в точке O вписана в $\angle BAC$, а значит, AO – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\dfrac{CF}{BF} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{24}{32} \Rightarrow CF = \dfrac{24}{56} BC = \dfrac{24 \cdot 8\sqrt{7}}{56} = \dfrac{24\sqrt{7}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике ACF $\operatorname{tg} CAF = \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\dfrac{OE}{AE} = \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Введем обозначения: r – искомый радиус, тогда $OE=OG=CE=r$.

Следовательно, $\dfrac{r}{24+r} = \dfrac{\sqrt{7}}{7} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow r\left(\sqrt{7}-1\right) = 24 \Rightarrow r = \dfrac{24}{\sqrt{7}-1} = 4\left(\sqrt{7}+1\right)$.

Ответ: $4\left(\sqrt{7}+1\right)$**.**

Задание 4. (20 баллов) Сколько отрицательных членов в последовательности $x_n = C_{n+5}^4 - \dfrac{195}{16}\dfrac{C_{n+3}^n}{n+1}$ $(n=1,2.3.....)$, где C_{n+5}^4, C_{n+3}^n - числа сочетаний? Найти эти члены.

Решение. Так как $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, то

$$x_n = \frac{(n+5)!}{4!(n+1)!} - \frac{195}{16}\frac{(n+3)!}{n!\,3!\,(n+1)} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{4!} - \frac{195}{16}\frac{(n+2)(n+3)}{3!} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)}{4!} \cdot \left(n^2 + 9n - \frac{115}{4}\right).$$

Отсюда следует, что для искомых значений n должно выполняться неравенство $n^2 + 9n - \dfrac{115}{4} < 0$. Множество решений данного неравенства есть интервал $-\dfrac{41}{4} < n < \dfrac{5}{2}$. Таким образом, нужно найти все натуральные числа, лежащие в этом интервале. Таких чисел два: 1 и 2.

При $n=1$: $x_1 = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot (4+36-115)}{96} = -\dfrac{75}{8}$

При $n=2$: $x_2 = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot (16+72-115)}{96} = -\dfrac{45}{8}$

Ответ: $\left\{2 : -\dfrac{75}{8}, -\dfrac{45}{8}\right\}$**.**

Задание 5. (20 баллов). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z; \\ z^2 + y^2 = 6z, \end{cases},$$

удовлетворяющие условию $z \le 3$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы. Имеем:

$$6x - 3x^2 - 4z + 2xz = 3 - z \Rightarrow 2xz - 3z = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) \Rightarrow -z = (x-1)^2 - \frac{2}{3}xz\,\mathbf{.}$$

Дополним обе части уравнения до полного квадрата справа выражением $\dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{9}z^2$:

$$\frac{1}{9}z^2+\frac{2}{3}z-z=(x-1)^2-\frac{2}{3}xz+\frac{2}{3}z+\frac{1}{9}z^2 \Rightarrow \frac{1}{9}z(z-3)=\left((x-1)-\frac{1}{3}z\right)^2.$$

Отсюда следует, что $z(z-3)\ge 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} z\le 0; \\ z\ge 3. \end{array}\right.$.

Из второго уравнения системы имеем: $z^2-6z=-y^2$, откуда $z^2-6z\le 0$ и $z\in[0;6]$.

С учётом исходного условия, что $z\le 3$, и условия, полученного из первого уравнения, имеем систему для z:

$$\begin{cases} z\le 0;\; z\ge 3 \\ z\in[0;6] \\ z\le 3 \end{cases}.$$

Всем трём условиям удовлетворяют лишь два значения: $z_1=0;\; z_2=3$.

Рассмотрим возможные случаи:

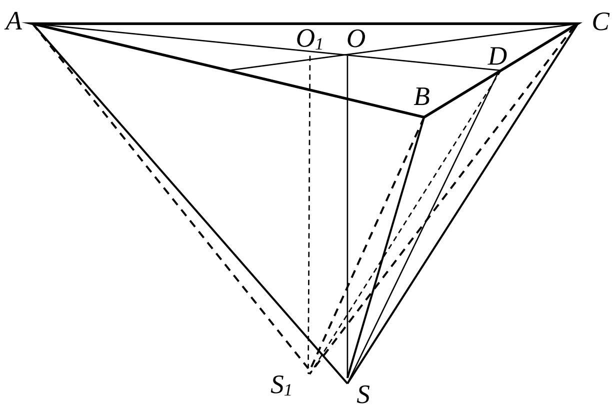
1) $z_1=0$. Из второго уравнения системы получаем $y_1=0$, а из первого $(2-x)\cdot 3x=3$; $x_1=1$. Поэтому решением будет тройка чисел $(1;0;0)$.

2) $z_2=3$. Из второго уравнения системы получаем $y_2=3;\; y_3=-3$. Из первого уравнения $(2-x)(3x-6)=0\Rightarrow x=2$, Таким образом, получаем второе решение системы $(2;-3;3)$ и третье решение $(2;3;3)$.

Ответ: $(1;0;0)$; $(2;-3;3)$; $(2;3;3)$.

Задание 6. (30 баллов) Для монтажа бурового оборудования в скважину используется подвес, состоящий из металлического каркаса в форме равностороннего треугольника и трех регулируемых по длине тросов протянутых через вершины треугольника и соединяющихся на крюке. Расстояние между тросами на каркасе составляет 1,5 м, а их первоначальная длина от каркаса до крюка – 2,5 м. При спуске оборудования оказалось, что крюк нужно сместить на $\frac{\sqrt{3}}{9}$ м вдоль медианы каркаса по направлению к вершине. На сколько метров нужно укоротить трос, проходящий через эту вершину?

Решение.



Пирамида $SABC$ – правильная, тогда медиана $AD=AB\cdot\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, а апофема $SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{91}}{4}$.

Так как O – точка пересечения медиан ΔABC, то $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $DO = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

При укорачивании длины троса SA проекция вершины пирамиды переместиться в точку O_1, так что $OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, тогда $AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$, а $DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{13\sqrt{3}}{36}$.

Поскольку, при увеличении длины троса SA до SA_1 длина апофемы ΔS_1BC равна $S_1D = SD$, то $S_1O_1 = \sqrt{S_1D^2 - DO_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{91}}{4}\right)^2 - \left(\frac{13\sqrt{3}}{36}\right)^2} = \sqrt{\frac{6864}{36}} = \frac{\sqrt{429}}{9}$.

Следовательно, $S_1A = \sqrt{S_1O_1{}^2 + AO_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{429}}{9}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{23}{4}} = \sqrt{5{,}75}$.

Тогда трос нужно укоротить на $2{,}5 - \sqrt{5{,}75}$.

Ответ: $2{,}5 - \sqrt{5{,}75}$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2024^2-1351^2+2001^2-1374^2+1978^2-1397^2...+1863^2-1512^2}\,.$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2024^2-1351^2+2001^2-1374^2+...+1863^2-1512^2=$$
$$=(2024-1351)(2024+1351)+(2001-1374)(2001+1374)+...+(1863-1512)(1863+1512)=$$
$$=3375\cdot 673+3375\cdot 627+...+3375\cdot 351=3375\cdot(673+627+...+351).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=673,\ a_n=351,\ d=46,\ n=\dfrac{673-351}{46}+1=8$.

Следовательно: $S_8=\dfrac{673+351}{2}\cdot 8=4096$.

Тогда: $\sqrt[3]{2024^2-1351^2+2001^2-1374^2+...+1863^2-1512^2}=\sqrt[3]{3375\cdot 4096}=15\cdot 16=240$.

Ответ: 240.

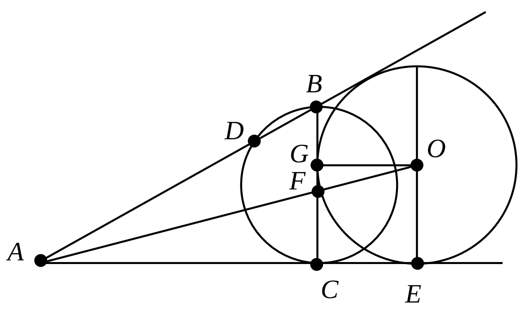
Задание 2. (10 баллов) Процедура контроля качества нефтеперерабатывающего завода подразумевает последовательный анализ проб из 12 резервуаров с готовой продукцией. Партия признается несоответствующей показателям качества, если отбракованы две пробы. Вероятность отбраковки одной пробы p = 0,2. Найти вероятность того, что партия будет признана несоответствующей показателям качества после анализа пятой пробы.

Решение. Для того чтобы партию признали несоответствующей показателям качества, нужно, чтобы была отбракована одна проба из первых четырех и пятая проба. Вероятность того, что была отбракована одна проба из четырех, равна $P_4(1)=4\cdot p\cdot(1-p)^3=4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^3=0{,}8\cdot 0{,}512=0{,}4096$. Тогда вероятность, что после пятой пробы партию признают несоответствующей показателям качества, составит $P_5(1из4{,}5)=p\cdot P_4(1)=0{,}2\cdot 0{,}4096=0{,}08192$

Ответ: 0,08192

Задание 3. (15 баллов) Катет BC прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Найти радиус окружности, касающейся катета BC и продолжений сторон AC и AB, если AC= 12, AD=8.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{12^2}{8} = 18$.

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 18^2 - 12^2 = 180 \Rightarrow BC = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

Окружность с центром в точке O вписана в $\angle BAC$, а значит, AO – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\frac{CF}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{18} \Rightarrow CF = \frac{12}{30} BC = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{30} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике ACF $\operatorname{tg} CAF = \frac{CF}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\frac{OE}{AE} = \frac{CF}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Введем обозначения: r – искомый радиус, тогда $OE=OG=CE=r$.

Следовательно, $\frac{r}{12+r} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow r\left(\sqrt{5}-1\right) = 12 \Rightarrow r = \frac{12}{\sqrt{5}-1} = 3\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Ответ: $3\left(\sqrt{5}+1\right)$**.**

Задание 4. (20 баллов) Сколько отрицательных членов в последовательности $x_n = C_{n+6}^5 - \frac{110}{9}\frac{C_{n+4}^n}{n+1}$ $\left(n = 1,2.3.....\right)$, где C_{n+6}^5, C_{n+4}^n - числа сочетаний? Найти эти члены.

Решение.

Так как $C_n^m = \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$, то

$$x_n = \frac{\left(n+6\right)!}{5!\left(n+1\right)!} - \frac{110}{9}\frac{\left(n+4\right)!}{n!\,4!\left(n+1\right)} = \frac{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)\left(n+5\right)\left(n+6\right)}{5!} - \frac{110}{9}\frac{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)}{4!} =$$

$$= \frac{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)}{5!} \cdot \left(n^2 + 11n - \frac{280}{9}\right).$$

Отсюда следует, что для искомых значений n должно выполняться неравенство $n^2 + 11n - \frac{280}{9} < 0$. Множество решений данного неравенства есть интервал $-\frac{40}{3} < n < \frac{7}{3}$. Таким образом, нужно найти все натуральные числа, лежащие в этом интервале. Таких чисел два: 1 и 2.

При $n = 1: x_1 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \left(1 + 11 - \frac{280}{9}\right)}{120} = -\frac{86}{9}$

При $n = 2: x_2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left(4 + 22 - \frac{280}{9}\right)}{120} = -\frac{46}{9}$

Ответ: $\left\{2 : -\frac{86}{9}, -\frac{46}{9}\right\}$**.**

Задание 5. (20 баллов). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left(2+x\right)\left(4x-2z\right) = -3z-4; \\ z^2 + y^2 = 8z, \end{cases},$$

удовлетворяющие условию $z \le 4$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы. Имеем:

$$8x+4x^2-4z-2xz=-3z-4 \Rightarrow z+2xz=4\left(x^2+2x+1\right) \Rightarrow z=4(x+1)^2-2xz\,.$$

Дополним обе части уравнения до полного квадрата справа выражением $-2z+\frac{1}{4}z^2$:

$$\frac{1}{4}z^2-2z+z=4(x+1)^2-2(x+1)z+\frac{1}{4}z^2 \Rightarrow \frac{1}{4}z(z-4)=\left(2(x+1)-\frac{1}{2}z\right)^2.$$

Отсюда следует, что $z(z-4)\geq 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} z\leq 0; \\ z\geq 4. \end{array}\right.$.

Из второго уравнения системы имеем: $z^2-8z=-y^2$, откуда $z^2-8z\leq 0$ и $z\in[0;8]$.

С учётом исходного условия, что $z\leq 4$, и условия, полученного из первого уравнения, имеем систему для z:

$$\begin{cases} z\leq 0;\ z\geq 4 \\ z\in[0;8] \\ z\leq 4 \end{cases}.$$

Всем трём условиям удовлетворяют лишь два значения: $z_1=0;\ z_2=4$.

Рассмотрим возможные случаи:

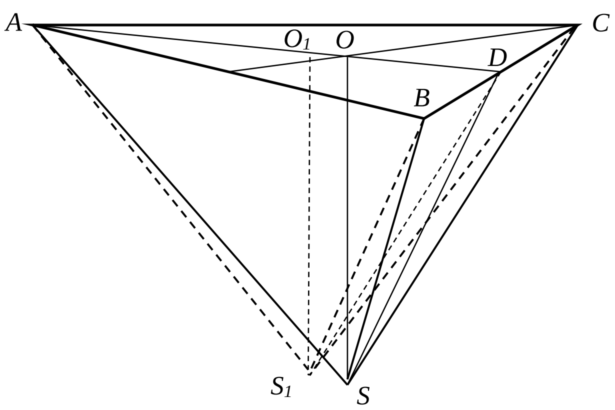
1) $z_1=0$. Из второго уравнения системы получаем $y_1=0$, а из первого $(2+x)\cdot 4x=-4$; $x_1=-1$. Поэтому решением будет тройка чисел $(-1;0;0)$.

2) $z_2=4$. Из второго уравнения системы получаем $y_2=4;\ y_3=-4$. Из первого уравнения $(2+x)(4x-8)=-16 \Rightarrow x=0$, Таким образом, получаем второе решение системы $(0;-4;4)$ и третье решение $(0;4;4)$.

Ответ: $(-1;0;0)$; $(0;-4;4)$; $(0;4;4)$.

Задание 6. (30 баллов) Для монтажа бурового оборудования в скважину используется подвес, состоящий из металлического каркаса в форме равностороннего треугольника и трех регулируемых по длине тросов протянутых через вершины треугольника и соединяющихся на крюке. Расстояние между тросами на каркасе составляет 3 м, а их первоначальная длина от каркаса до крюка – 2,5 м. При спуске оборудования оказалось, что крюк нужно сместить на $\frac{\sqrt{3}}{6}$ м вдоль медианы каркаса по направлению к вершине. На сколько метров нужно укоротить трос, проходящий через эту вершину?

Решение.



Пирамида $SABC$ – правильная, тогда медиана $AD = AB \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а апофема $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$.

Так как O – точка пересечения медиан ΔABC, то $AO = \frac{2}{3}AD = \sqrt{3}$, а $DO = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

При укорачивании длины троса SA проекция вершины пирамиды переместиться в точку O_1, так что $OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, тогда $AO_1 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, а $DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Поскольку, при увеличении длины троса SA до SA_1 длина апофемы ΔS_1BC равна $S_1D = SD$, то $S_1O_1 = \sqrt{S_1D^2 - DO_1^{\ 2}} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Следовательно, $S_1A = \sqrt{S_1O_1^{\ 2} + AO_1^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{171}{36}} = \sqrt{4{,}75}$.

Тогда трос нужно укоротить на $2{,}5 - \sqrt{4{,}75}$.

Ответ: $2{,}5 - \sqrt{4{,}75}$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2072^2-2024^2+2090^2-2006^2+2108^2-1988^2+\ldots+2216^2-1880^2}\,.$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2072^2-2024^2+2090^2-2006^2+2108^2-1988^2+\ldots+2216^2-1880^2=$$
$$=(2072-2024)(2072+2024)+(2090-2006)(2090+2006)+\ldots+(2216-1880)(2216+1880)=$$
$$=4096\cdot 48+4096\cdot 84+\ldots+4096\cdot 336=4096\cdot(48+84+\ldots+336).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=48,\ a_n=336,\ d=36,\ n=\dfrac{336-48}{36}+1=9$.

Следовательно: $S_8=\dfrac{336+48}{2}\cdot 9=192\cdot 9$.

Тогда: $\sqrt[3]{2072^2-2024^2+2090^2-2006^2++2108^2-1988^2\ldots+2216^2-1880^2}=\sqrt[3]{4096\cdot 9\cdot 192}=$
$=\sqrt[3]{2^{12}\cdot 3^2\cdot 3\cdot 64}=2^4\cdot 3\cdot 4=192.$

Ответ: 192.

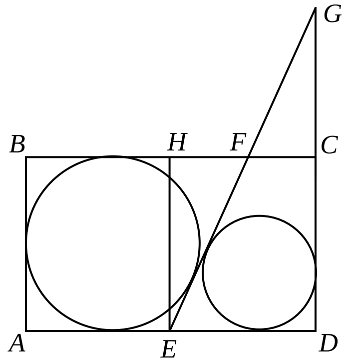
Задание 2. (10 баллов) Процедура контроля качества нефтеперерабатывающего завода подразумевает последовательный анализ проб из 10 резервуаров с готовой продукцией. Партия признается несоответствующей показателям качества, если отбракованы две пробы. Вероятность отбраковки одной пробы p = 0,1. Найти вероятность того, что партия будет признананесоответствующей показателям качества после анализа седьмой пробы, если две первые пробы не были отбракованы.

Решение.Для того чтобы партию признали несоответствующей показателям качества, нужно, чтобы были не отбракованы первая и вторая пробы, отбракована одна из третьей – шестой проб и седьмая проба. Вероятность того, что были не отбракованы первая и вторая пробы равна $P_2(0)=(1-p)^2=0{,}9^2=0{,}81$, одна из третьей – шестой проб равна $P_{3-6}(1)=4\cdot p\cdot(1-p)^3=4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3=0{,}4\cdot 0{,}729=0{,}2916$. Тогда вероятность, что после седьмой пробыпартию признают несоответствующей показателям качества,составит $P_7(1из3-6{,}7)=p\cdot P_2(0)\cdot P_{3-6}(1)=0{,}1\cdot 0{,}81\cdot 0{,}2916=0{,}0236196$.

Ответ: 0,0236196.

Задание 3. (15 баллов) В канале прямоугольного сечения необходимо разместить две трубы круглого сечения, разделенные перегородкой. Найти максимально возможные радиусы этих труб, если сечение канала прямоугольник со сторонами 12 и 22 см, ширина перегородки 13 см.

Решение.



Первая наибольшая окружность – это окружность радиуса 6, вписанная в трапецию*ABFE*. По свойству окружности, вписанной в четырехугольник, $AE + BF = AB + EF = 12 + 13 = 25$.

По теореме Пифагора $FH^2 = EF^2 - EH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow FH = \sqrt{25} = 5$.

Значит, $AE = BH = \dfrac{AE + BF - FH}{2} = \dfrac{25 - 5}{2} = 10 \Rightarrow BF = BH + FH = 10 + 5 = 15$.

Тогда оставшаяся часть канала имеет форму трапеции с основаниями $CF = BC - BF = 22 - 15 = 7$, $DE = AD - AE = 22 - 10 = 12$. Чтобы узнать радиус окружности, которая может быть вписана в эту трапецию, достроим ее до треугольника *EDG*. Прямоугольные треугольники*FCG* и*EDG* подобны по углам:

$$\frac{CG}{DG} = \frac{CF}{DE} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{CG}{CG + 12} = \frac{7}{12} \Rightarrow CG = \frac{12 \cdot 7}{4} = \frac{84}{5} \Rightarrow DG = \frac{84}{5} + 12 = \frac{144}{5}.$$

По теореме Пифагора $EG^2 = DE^2 + DG^2 = 12^2 + \left(\dfrac{144}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \left(5^2 + 12^2\right) = \left(\dfrac{156}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow EG = \dfrac{156}{5}$,а радиус вписанной окружности $r = \dfrac{DE + DG - EG}{2} = \dfrac{60 + 144 - 156}{5 \cdot 2} = \dfrac{48}{10} = 4{,}8$.

Ответ:6;4,8.

Задание 4. (20 баллов)Сколько положительных членов в последовательности $x_n = C_{n+3}^n - \dfrac{(n+1)}{195} C_{n+5}^4 \quad (n = 1{,}2.3.....)$, где C_{n+5}^4, C_{n+3}^n - числа сочетаний? Найти эти члены.

Решение. Так как $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, то

$$x_n = \frac{(n+3)!}{3!n!} - \frac{(n+1)}{195} \cdot \frac{(n+5)!}{4!(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{195 \cdot 4!} =$$

$$= \frac{16 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)}{195 \cdot 4!}\left(\frac{195 \cdot 4}{16} - (n+4)(n+5)\right) = -\frac{2 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)}{195 \cdot 3}\left(n^2 + 9n - \frac{115}{4}\right).$$

Отсюда следует, что для искомых значений n должно выполняться неравенство $n^2 + 9n - \dfrac{115}{4} < 0$. Множество решений данного неравенства есть интервал $-\dfrac{41}{4} < n < \dfrac{5}{2}$. Таким образом, нужно найти все натуральные числа, лежащие в этом интервале. Таких чисел два: 1 и 2.

При $n = 1$: $x_1 = -\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (4 + 36 - 115)}{195 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{60}{37}$

При $n = 2$: $x_2 = -\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (16 + 72 - 115)}{195 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{18}{13}$

Ответ: $\left\{2 : \dfrac{60}{37}, \dfrac{18}{13}\right\}$**.**

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{3x^2-2-x^4}\cdot\sin\left(\pi\left(2x+5x^2\right)\right)=0$$

Решение.Данное выражение имеет смысл только для значений *x*, удовлетворяющих условию $3x^2-2-x^4\geq 0$, т.е.для $-\sqrt{2}\leq x\leq -1,\quad 1\leq x\leq\sqrt{2}$.

Остаётся найти значения *x* из этих промежутков, при каждом из которых выражение обращается в нуль.

Приравняем к нулю первый сомножитель: $\sqrt{3x^2-2-x^4}=0\Rightarrow x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$.

Теперь приравняем к нулю второй сомножитель: $\sin\left(\pi\left(2x+5x^2\right)\right)=0$.

$$\pi\left(2x+5x^2\right)=\pi k,\quad k\in Z\Rightarrow 5x^2+2x-k=0,\quad k\in Z.$$

Так как $D=4(1+5k)$, то из этих уравнений имеют действительные решения лишь те, у которых $k\geq 0$.

При любом $k\geq 0$ уравнение $5x^2+2x-k=0$ имеет два корня

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+5k}}{5};\quad x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+5k}}{5}$, причём $x_1<0,\quad x_2\geq 0$.

Найдём решения уравнения, попавшие в промежутки $-\sqrt{2}<x_1<-1,\quad 1<x_2<\sqrt{2}$. Для этого нужно решить систему двойных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<\dfrac{-1-\sqrt{1+5k_1}}{5}<-1;\\ 1<\dfrac{-1+\sqrt{1+5k_2}}{5}<\sqrt{2};\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-5\sqrt{2}<-1-\sqrt{1+5k_1}<-5;\\ 5<-1+\sqrt{1+5k_2}<5\sqrt{2};\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4<\sqrt{1+5k_1}<5\sqrt{2}-1;\\ 6<\sqrt{1+5k_2}<5\sqrt{2}+1;\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}16<1+5k_1<\left(5\sqrt{2}-1\right)^2;\\ 36<1+5k_2<\left(5\sqrt{2}+1\right)^2;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}15<5k_1<5\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-2\right);\\ 35<5k_2<5\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+2\right);\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3<k_1<\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-2\right);\\ 7<k_2<\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+2\right);\end{array}\right.$$

Поскольку $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, то $7{,}12=1{,}41\cdot(5\cdot 1{,}41-2)<\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-2\right)<1{,}42\cdot(5\cdot 1{,}42-2)=7{,}24$,а $12{,}76=1{,}41\cdot(5\cdot 1{,}41+2)<\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+2\right)<1{,}42\cdot(5\cdot 1{,}42+2)=12{,}92$.

Поскольку $k\geq 0$- целое, то приведённым неравенствам удовлетворяют $k_1=4,5,6,7$ и $k_2=8,9,10,11,12$.

Таким образом, окончательно получим:

$$x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2};\ x=\frac{-1-\sqrt{1+5k}}{5}\ \left(k=4,5,6,7\right);\ x=\frac{-1+\sqrt{1+5k}}{5}\ \left(k=8,9,10,11,12\right).$$

Ответ: $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$;

$x=\dfrac{-1-\sqrt{1+5k}}{5}\ \left(k=4,5,6,7\right)$;

$x=\dfrac{-1+\sqrt{1+5k}}{5}\ \left(k=8,9,10,11,12\right)$.

Задание 6.(30 баллов) В сферическом корпусе зонда расположено оборудование в пяти капсулах сферической формы, три из которых имеют радиус $5\sqrt{3}$ см, их центры расположены в одной плоскости, и они попарно касаются друг друга. Две остальные капсулы имеют меньший радиус. Найти максимально возможный радиус этих двух капсул.

Решение.

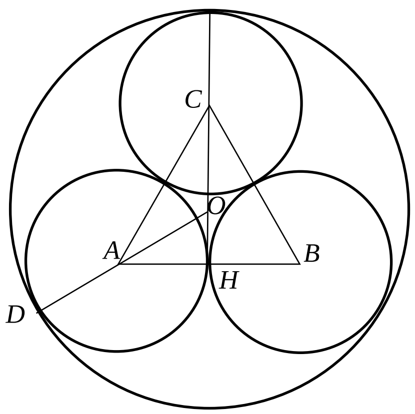


Рис. 1

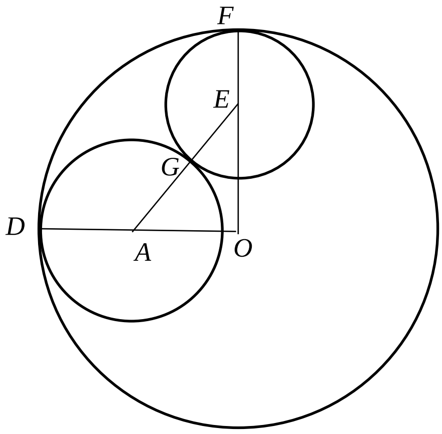


Рис. 2

Центры трех одинаковых сферических капсул, расположенных в одной плоскости (рис. 1), находятся в вершинах правильного треугольника ABC: $AB = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$. Центр сферы корпуса зонда находится в точке пересечения медиан этого треугольника в точке O: $CH = AB \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \Rightarrow OH = \frac{1}{3}CH = \frac{1}{3}15 = 5 \Rightarrow AO = 10$.

Тогда радиус корпуса зонда: $DO = AD + AO = 5\sqrt{3} + 10$.

Рассмотрим плоскость перпендикулярную плоскости ABC, проходящую точку O (рис. 2). Тогда максимально возможный радиус сферы, которую можно разместить в корпусе зонда над тремя одинакового радиуса, равен $EF = EG = r$. Из треугольника AOE:

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 \Rightarrow \left(5\sqrt{3} + r\right)^2 = 10^2 + \left(5\sqrt{3} + 10 - r\right)^2;$$

$$75 + 10\sqrt{3}r + r^2 = 100 + 75 + 100\sqrt{3} + 100 - 2\left(5\sqrt{3} + 10\right) \cdot r + r^2;$$

$$10\sqrt{3}r + 2\left(5\sqrt{3} + 10\right) \cdot r = 100\left(2 + \sqrt{3}\right);$$

$$r = \frac{100\left(2 + \sqrt{3}\right)}{20\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2073^2-2023^2+2093^2-2003^2+2113^2-1983^2...+2773^2-1323^2}.$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2073^2-2023^2+2093^2-2003^2+2113^2-1983^2...+2773^2-1323^2=$$

$$=(2073-2023)(2073+2023)+(2093-2003)(2093+2003)+...+(2773-1323)(2773+1323)=$$

$$=4096\cdot 50+4096\cdot 90+...+4096\cdot 1450=4096\cdot(50+90+...+1450).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=50,\ a_n=1450,\ d=40,\ n=\frac{1450-50}{40}+1=36$.

Следовательно: $S_8=\frac{1450+50}{2}\cdot 36=27000$.

Тогда:

$$\sqrt[3]{2073^2-2023^2+2093^2-2003^2+2113^2-1983^2...+2773^2-1323^2}=\sqrt[3]{4096\cdot 27000}=16\cdot 30=480.$$

Ответ: 480.

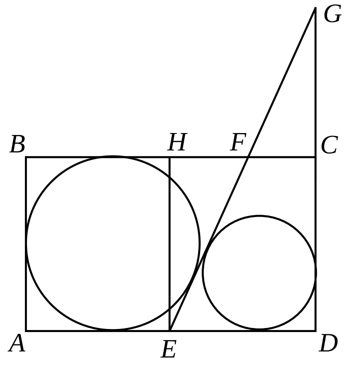
Задание 2. (10 баллов)Процедура контроля качества нефтеперерабатывающего завода подразумевает последовательный анализ проб из 12 резервуаров с готовой продукцией. Партия признается несоответствующей показателям качества, если отбракованы две пробы. Вероятность отбраковки одной пробы p = 0,2. Найти вероятность того, что партия будет признананесоответствующей показателям качества после анализа шестой пробы, если две первые пробы не были отбракованы.

Решение.Для того чтобы партию признали несоответствующей показателям качества, нужно, чтобы были не отбракованы первая и вторая пробы, отбракована одна из третьей – пятой проб и шестая проба. Вероятность того, что были не отбракованы первая и вторая пробы равна $P_2(0)=(1-p)^2=0{,}8^2=0{,}64$, одна из третьей – пятой проб равна $P_{3-5}(1)=3\cdot p\cdot(1-p)^3=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2=0{,}6\cdot 0{,}64=0{,}384$. Тогда вероятность, что после шестой пробыпартию признают несоответствующей показателям качества,составит $P_6(1из3-5{,}6)=p\cdot P_2(0)\cdot P_{3-5}(1)=0{,}2\cdot 0{,}64\cdot 0{,}384=0{,}049152$.

Ответ: 0,049152.

Задание 3. (15 баллов) В канале прямоугольного сечения необходимо разместить две трубы круглого сечения, разделенные перегородкой. Найти максимально возможные радиусы этих труб, если сечение канала прямоугольник со сторонами 15 и 24 см, а перегородка равна 17 см.

Решение.



Первая наибольшая окружность – это окружность радиуса 7,5; вписанная в трапецию*ABFE*. По свойству окружности, вписанной в четырехугольник, $AE+BF=AB+EF=15+17=32$.

По теореме Пифагора $FH^2=EF^2-EH^2=17^2-15^2=64 \Rightarrow FH=\sqrt{64}=8$.

Значит, $AE=BH=\dfrac{AE+BF-FH}{2}=\dfrac{32-8}{2}=12 \Rightarrow BF=BH+FH=12+8=20$.

Тогда оставшаяся часть канала имеет форму трапеции с основаниями $CF=BC-BF=24-20=4$, $DE=AD-AE=24-12=12$. Чтобы узнать радиус окружности, которая может быть вписана в эту трапецию, достроим ее до треугольника *EDG*. Прямоугольные треугольники*FCG* и*EDG* подобны по углам:

$$\frac{CG}{DG}=\frac{CF}{DE}=\frac{4}{12} \Rightarrow \frac{CG}{CG+15}=\frac{4}{12} \Rightarrow CG=\frac{15\cdot 4}{8}=\frac{15}{2} \Rightarrow DG=\frac{15}{2}+15=\frac{45}{2}.$$

По теореме Пифагора $EG^2=DE^2+DG^2=12^2+\left(\dfrac{45}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\left(8^2+15^2\right)=\left(\dfrac{51}{2}\right)^2 \Rightarrow EG=\dfrac{51}{2}$,а радиус вписанной окружности $r=\dfrac{DE+DG-EG}{2}=\dfrac{24+45-51}{2\cdot 2}=\dfrac{18}{4}=4{,}5$.

Ответ:7,5;4,5.

Задание 4. (20 баллов)Сколько положительных членов в последовательности $x_n=C_{n+4}^{n}-\dfrac{(n+1)}{110}C_{n+6}^{5}$ $(n=1,2.3.....)$, где C_{n+6}^{5}, C_{n+4}^{n} - числа сочетаний? Найти эти члены.

Решение. Так как $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, то

$$x_n=\frac{(n+4)!}{4!n!}-\frac{9(n+1)}{110}\cdot\frac{(n+6)!}{5!(n+1)!}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!}-\frac{9(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{110\cdot 5!}=$$

$$=\frac{9\cdot(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{110\cdot 5!}\left(\frac{110\cdot 5}{9}-(n+5)(n+6)\right)=-\frac{3\cdot(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{110\cdot 40}\left(n^2+11n-\frac{280}{9}\right)$$

.

Отсюда следует, что для искомых значений n должно выполняться неравенство $n^2+11n-\dfrac{280}{9}<0$. Множество решений данного неравенства есть интервал $-\dfrac{40}{3}<n<\dfrac{7}{3}$. Таким образом, нужно найти все натуральные числа, лежащие в этом интервале. Таких чисел два: 1 и 2.

При $n=1$: $x_1=-\dfrac{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\left(1+11-\dfrac{280}{9}\right)}{110\cdot 40}=\dfrac{86}{55}$

При $n=2$: $x_2=\dfrac{3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\left(4+22-\dfrac{280}{9}\right)}{110\cdot 40}=\dfrac{69}{55}$

Ответ: $\left\{2:\frac{86}{55},\frac{69}{55}\right\}$.

Задание 5. (20 баллов)Решить уравнение:

$$\sqrt{5x^4-4-x^8}\cdot\sin\left(\pi\left(2x+3x^2\right)\right)=0$$

Решение.Данное выражение имеет смысл только для значений x, удовлетворяющих условию $5x^4-4-x^8\ge 0$, т.е.для $-\sqrt{2}\le x\le -1,\quad 1\le x\le\sqrt{2}$.

Остаётся найти значения x из этих промежутков, при каждом из которых выражение обращается в нуль.

Приравняем к нулю первый сомножитель: $\sqrt{5x^4-4-x^8}=0\Rightarrow x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$.

Теперь приравняем к нулю второй сомножитель: $\sin\left(\pi\left(2x+3x^2\right)\right)=0$.

$$\pi\left(2x+3x^2\right)=\pi k,\quad k\in Z\Rightarrow 3x^2+2x-k=0,\quad k\in Z.$$

Так как $D=4(1+3k)$, то из этих уравнений имеют действительные решения лишь те, у которых $k\ge 0$.

При любом $k\ge 0$ уравнение $3x^2+2x-k=0$ имеет два корня

$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+3k}}{3};\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{1+3k}}{3}$, причём $x_1<0,\quad x_2\ge 0$.

Найдём решения уравнения, попавшие в промежутки $-\sqrt{2}<x_1<-1,\quad 1<x_2<\sqrt{2}$. Для этого нужно решить систему двойных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<\frac{-1-\sqrt{1+3k_1}}{3}<-1;\\ 1<\frac{-1+\sqrt{1+3k_2}}{3}<\sqrt{2};\end{array}\right. .\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-3\sqrt{2}<-1-\sqrt{1+3k_1}<-3;\\ 3<-1+\sqrt{1+3k_2}<3\sqrt{2};\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2<\sqrt{1+3k_1}<3\sqrt{2}-1;\\ 4<\sqrt{1+3k_2}<3\sqrt{2}+1;\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4<1+3k_1<\left(3\sqrt{2}-1\right)^2;\\ 16<1+3k_2<\left(3\sqrt{2}+1\right)^2;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3<3k_1<3\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-2\right);\\ 15<3k_2<3\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\right);\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<k_1<\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-2\right);\\ 5<k_2<\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\right);\end{array}\right.$$

Поскольку $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, то $3{,}14\approx 1{,}41\cdot(3\cdot 1{,}41-2)<\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-2\right)<1{,}42\cdot(3\cdot 1{,}42-2)\approx 3{,}21$,а $8{,}78\approx 1{,}41\cdot(3\cdot 1{,}41+2)<\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\right)<1{,}42\cdot(3\cdot 1{,}42+2)\approx 8{,}89$.

Поскольку $k\ge 0$- целое, то приведённым неравенствам удовлетворяют $k_1=2{,}3$ и $k_2=5{,}6{,}7{,}8$.

Таким образом, окончательно получим:

$$x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2};\ x=\frac{-1-\sqrt{1+3k}}{3}\ (k=2{,}3);\ x=\frac{-1+\sqrt{1+3k}}{3}\ (k=5{,}6{,}7{,}8).$$

Ответ: $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$;

$x=\frac{-1-\sqrt{1+3k}}{3}\ (k=2{,}3)$;

$x=\frac{-1+\sqrt{1+3k}}{3}\ (k=5{,}6{,}7{,}8)$.

Задание 6.(30 баллов) В сферическом корпусе зонда расположено оборудование в пяти капсулах сферической формы, три из которых имеют радиус 6 см, их центры расположены в одной плоскости, и они попарно касаются друг друга. Две остальные капсулы имеют меньший радиус. Найти максимально возможный радиус этих двух капсул.

Решение.

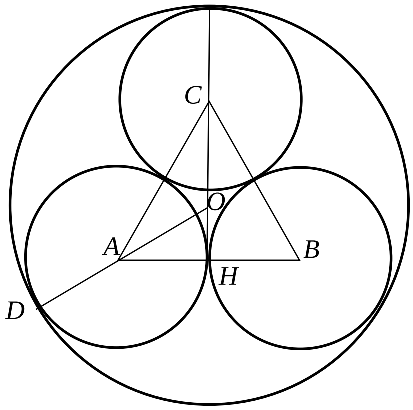


Рис. 1

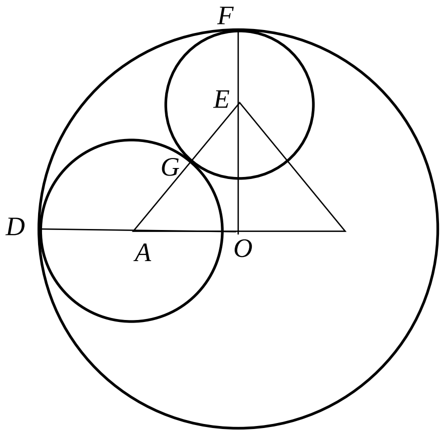


Рис. 2

Центры трех одинаковых сферических капсул, расположенных в одной плоскости (рис. 1), находятся в вершинах правильного треугольника ABC: $AB = 2 \cdot 6 = 12$. Центр сферы корпуса зонда находится в точке пересечения медиан этого треугольника в точке O:

$$CH = AB \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow OH = \frac{1}{3}CH = \frac{1}{3}6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AO = 4\sqrt{3}.$$

Тогда радиус корпуса зонда: $DO = AD + AO = 6 + 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим плоскость перпендикулярную плоскости ABC, проходящую точку O (рис. 2). Тогда максимально возможный радиус сферы, которую можно разместить в корпусе зонда над тремя одинакового радиуса, равен $EF = EG = r$. Из треугольника AOE:

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 \Rightarrow (6+r)^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(6 + 4\sqrt{3} - r\right)^2;$$

$$36 + 12r + r^2 = 48 + 36 + 48\sqrt{3} + 48 - 2\left(6 + 4\sqrt{3}\right) \cdot r + r^2;$$

$$12r + 2\left(6 + 4\sqrt{3}\right) \cdot r = 48\left(2 + \sqrt{3}\right);$$

$$r = \frac{48\left(2+\sqrt{3}\right)}{8\left(3+\sqrt{3}\right)} = 6\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

Ответ: $6\left(3+\sqrt{3}\right)$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt{2023}\left(\sqrt[6]{2021\sqrt{2024}+6071}+\sqrt{\sqrt{2024}-1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2024}+1}.$$

Решение. Выделим куб разности в подкоренном выражении первого слагаемого скобки

$$2021\sqrt{2024}+6071=2024\sqrt{2024}-3\sqrt{2024}+6072-1=\left(\sqrt{2024}\right)^3-3\sqrt{2024}\cdot 1^2+3\left(\sqrt{2024}\right)^2\cdot 1+1^3=$$
$$=\left(\sqrt{2024}-1\right)^3$$

Подставим полученное выражение в исходное и преобразуем его

$$\sqrt{2023}\left(\sqrt[6]{2021\sqrt{2024}+6071}+\sqrt{\sqrt{2024}-1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2024}+1}=\sqrt{2023}\left(\sqrt[6]{\left(\sqrt{2024}-1\right)^3}+\sqrt{\sqrt{2024}-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\sqrt{2024}+1}=\sqrt{2023}\cdot 2\sqrt{\sqrt{2024}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2024}+1}=2\sqrt{2023}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2024}-1\right)\left(\sqrt{2024}+1\right)}=$$
$$=2\sqrt{2023}\cdot\sqrt{2024-1}=4046.$$

Ответ: 4046.

Задание 2. (10 баллов) Завод изготавливает детали для буровыхустановок, среди которых 6 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 7 % деталей. Сколько процентов качественных деталей были признаны ОТК бракованными, если 2 % всех бракованных деталей было признано качественными?

Решение. Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3) $0{,}0012x$	$0{,}93x$
Признаны бракованными ОТК	2)	4) $0{,}0588x$	$0{,}07x$
	$0{,}94x$	$0{,}06x$	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию $0{,}06x$ деталей бракованные, причем ОТК признал качественными из них $0{,}06\cdot 0{,}02x=0{,}0012x$, а бракованными $0{,}06\cdot 0{,}98x=0{,}0588x$.

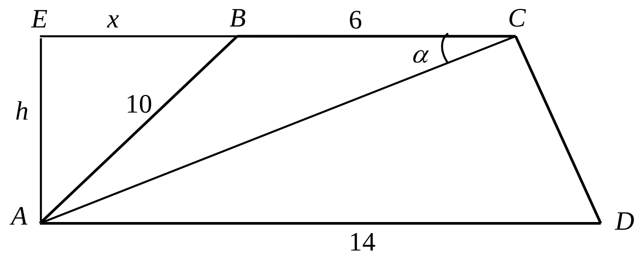
ОТК отобрал бракованных деталей $0{,}07x$. Тогда количество качественных деталей, признанных ОТК бракованными, $0{,}07x-0{,}0588x=0{,}0112x$.

Всего же качественных деталей $x-0{,}06x=0{,}94x$. Таким образом, процент качественных деталей, которые были признаны отделом технического контроля бракованными,равен $\frac{0{,}0112x}{0{,}94x}\cdot 100\%=\frac{112}{94}\%=\frac{56}{47}\%=1\frac{9}{47}\%$.

Ответ: $1\frac{9}{47}\%$.

Задание 3. (15 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 6 и 14 метров, а боковая сторона –10 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами, равен $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ метра. Найти площадь поляны.

Решение.



Построим трапецию *ABCD* и достроим прямоугольный треугольник *AEC*. Введем обозначения: $x=BE$, $h=AE$.

По условию задачи треугольник *ABC* вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{10}{2\cdot\frac{5\sqrt{13}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Из прямоугольного треугольника *AEC*:

$$\sin\alpha=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{13}h}{2}.$$

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2+BE^2=AB^2\Rightarrow x^2+h^2=10^2 \text{ и } AE^2+CE^2=AC^2\Rightarrow (x+6)^2+h^2=\left(\frac{\sqrt{13}h}{2}\right)^2.$$

$$\begin{cases} x^2+h^2=10^2; \\ (x+6)^2+h^2=\left(\frac{\sqrt{13}h}{2}\right)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=100; \\ x^2+12x+36+h^2=\frac{13h^2}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2=100-x^2; \\ x^2+12x+36=\frac{9}{4}(100-x^2). \end{cases}$$

$$\frac{13}{4}x^2+12x-189=0;$$

$$D=12^2+4\cdot\frac{13}{4}\cdot 189=2601=51^2$$

$x_1=\frac{-12-51}{\frac{13}{2}}<0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_2=\frac{-12+51}{\frac{12}{2}}=6$ метров;

$h^2=100-36=64;\ h=8.$

Следовательно, $S=\frac{6+14}{2}\cdot 8=80$.

Ответ: 80.

Задание 4.(20 баллов).Три нефтеперерабатывающих завода региона среди прочей выпускают продукцию «А». Доли этой продукции в общем выпуске этих заводов, образуют геометрическую прогрессию.

Если бы эти доли соотносилось как 2:3:1, то доля продукции «А» в совокупном выпуске этих трех заводов составляла бы 0,485, а если бы это соотношение было бы 1:2:1, то доляпродукции «А» в совокупном выпуске составляла бы 0,54.

Какую долю продукции «А» выпускает каждый из заводов?

Решение.Пусть доли выпускапродукции «А» на заводах составляют p , q , r , соответственно. Указанные доли составляют геометрическую прогрессии, следовательно, по признаку геометрической прогрессии $q^2 = p \cdot r$.

Пусть объемы выпуска на каждом заводе составляют x , y , z , соответственно.

По условию при соотношении долей продукции«А» 2:3:1совокупная доляэтой продукции равна0,48. Это означает, что $x : y : z = 2 : 3 : 1$, следовательно, $x = 2z$, $y = 3z$;

$0{,}48 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$0{,}45 \cdot (2z + 3z + z) = p \cdot 2z + q \cdot 3z + r \cdot z \Rightarrow 0{,}48 \cdot 6 = p \cdot 2 + q \cdot 3 + r$;

А значит, $2p + 3q + r = 2{,}88$.

Также по условию при соотношении долей продукции«А» 1:2:1совокупная доляэтой продукции0,54. Это означает, что $x : y : z = 1 : 2 : 1$, следовательно, $y = 2x$, $z = x$;

$0{,}54 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$0{,}4 \cdot (x + 2x + x) = p \cdot x + q \cdot 2x + r \cdot x \Rightarrow 0{,}54 \cdot 4 = p + q \cdot 2 + r$;

А значит, $p + 2q + r = 2{,}16$.

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p + 2q + r = 2{,}16, \\ 2p + 3q + r = 2{,}88. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p = 0{,}72 - q, \\ r = 1{,}44 - q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0{,}48, \\ p = 0{,}24, \\ r = 0{,}96. \end{cases}$$

Ответ:0,24;0,48;0,96.

Задание 5. (20 баллов). Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-4)(x+2z) = -4 - 10z; \\ z^2 + y^2 = 7{,}5z, \end{cases},$$

удовлетворяющие условию $z \le 6$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы. Имеем:

$$x^2 - 4x + 2xz - 8z = -4 - 10z \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 2z(x-2) - 4z = -10z \Rightarrow -6z = (x-2)^2 + 2z(x-2).$$

Дополним обе части уравнения до полного квадрата справа выражением z^2 :

$$z^2 - 6z = (x-2)^2 + 2z(x-2)) + z^2 \Rightarrow z(z-6) = ((x-2) + z)^2.$$

Отсюда следует, что $z(z-6) \ge 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} z \le 0; \\ z \ge 6. \end{array}\right.$.

Из второго уравнения системы имеем: $z^2 - 7{,}5z = -y^2$, откуда $z^2 - 7{,}5z \le 0$ и $z \in [0;7{,}5]$.

С учётом исходного условия, что $z \le 6$, и условия, полученного из первого уравнения, имеем систему для z:

$$\begin{cases} z \le 0; \ z \ge 6 \\ z \in [0;7{,}5] \\ z \le 6 \end{cases}.$$

Всем трём условиям удовлетворяют лишь два значения: $z_1 = 0;\ z_2 = 6$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $z_1 = 0$. Из второго уравнения системы получаем $y_1 = 0$, а из первого $(x-4) \cdot x = -4$; $x_1 = 2$.Поэтому решением будет тройка чисел $(2;0;0)$.

2) $z_2 = 6$. Из второго уравнения системы получаем $y_2 = 3;\ y_3 = -3$. Из первого уравнения $(x-4)(x+12) = -64 \Rightarrow x = -4$, Таким образом, получаем второе решение системы $(-4;-3;6)$ и третье решение $(-4;3;6)$.

Ответ: $(2;0;0)$; $(-4;-3;6)$; $(-4;3;6)$.

Задание 6.(30 баллов) В сферическом корпусе зонда расположено оборудование в пяти капсулах сферической формы, три из которых попарно касаются друг друга, и их центры расположены в одной плоскости. Две остальные капсулы имеют меньший радиус $2\sqrt{3}$ см. Найти максимально возможный радиус трех одинаковых капсул.

Решение.

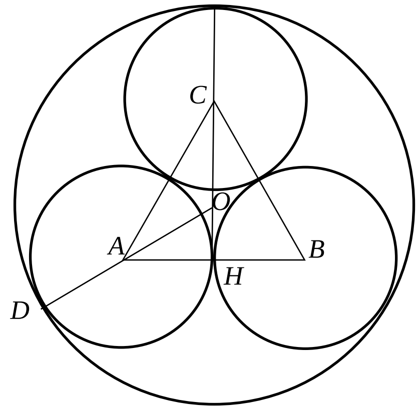


Рис. 1

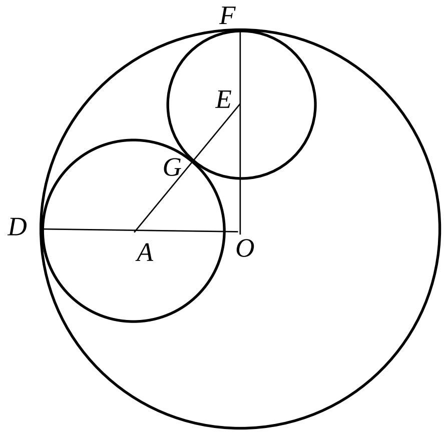


Рис. 2

Центры трех одинаковых сферических капсул, расположенных в одной плоскости (рис. 1), находятся в вершинах правильного треугольника ABC. Чтобы их радиусы были максимально возможными они должны касаться кормуса зонда. Обозначим их радиус R, тогда $AB = 2R$. Центр сферы корпуса зонда находится в точке пересечения медиан этого треугольника в точке O:

$$CH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R \Rightarrow OH = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{3}R}{3} \Rightarrow AO = 2CH = \frac{2\sqrt{3}R}{3}.$$

Тогда радиус корпуса зонда: $DO = AD + AO = R + \frac{2\sqrt{3}R}{3} = \frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)R}{3}$.

Рассмотрим плоскость перпендикулярную плоскости ABC , проходящую точку O (рис. 2). Тогда максимально возможный радиус сферы, которую можно разместить в корпусе зонда над тремя одинакового радиуса, равен $EF = EG = 2\sqrt{3}$. Из треугольника AOE:

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{3} + R\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2 + \left(\frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)R}{3} - 2\sqrt{3}\right)^2;$$

$$108 + 36\sqrt{3}R + 9R^2 = 12\sqrt{3}R^2 + 3\left(7 + 4\sqrt{3}\right) \cdot R^2 - 12\sqrt{3}\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \cdot R + 108;$$

$$12\sqrt{3}R^2 + 3\left(7 + 4\sqrt{3}\right) \cdot R^2 - 9R^2 = 36\sqrt{3}R + 12\sqrt{3}\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \cdot R;$$

$$R = \frac{72\left(1 + \sqrt{3}\right)}{12\left(2 + \sqrt{3}\right)} = 6\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Ответ: $6\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt{2024}\left(\sqrt[6]{2022\sqrt{2025}+6074}+\sqrt{\sqrt{2025}-1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2025}+1}.$$

Решение. Выделим куб разности в подкоренном выражении первого слагаемого скобки

$$2022\sqrt{2025}+6074=2025\sqrt{2025}-3\sqrt{2025}+6075-1=\left(\sqrt{2025}\right)^3-3\sqrt{2025}\cdot1^2+3\left(\sqrt{2025}\right)^2\cdot1+1^3=$$
$$=\left(\sqrt{2025}-1\right)^3$$

Подставим полученное выражение в исходное и преобразуем его

$$\sqrt{2024}\left(\sqrt[6]{2022\sqrt{2025}+6074}+\sqrt{\sqrt{2025}-1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2025}+1}=\sqrt{2024}\left(\sqrt[6]{\left(\sqrt{2025}-1\right)^3}+\sqrt{\sqrt{2025}-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\sqrt{2025}+1}=\sqrt{2024}\cdot2\sqrt{\sqrt{2025}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2025}+1}=2\sqrt{2024}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2025}-1\right)\left(\sqrt{2025}+1\right)}=$$
$$=2\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2025-1}=4048.$$

Ответ: 4048.

Задание 2. (10 баллов) Завод изготавливает детали для буровыхустановок, среди которых 5 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 6 % деталей. Сколько процентов качественных деталей были признаны ОТК бракованными, если 2 % всех бракованных деталей было признано качественными?

Решение.Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3) $0{,}001x$	$0{,}94x$
Признаны бракованными ОТК	2)	4) $0{,}049x$	$0{,}06x$
	$0{,}95x$	$0{,}05x$	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию $0{,}05x$ деталей бракованные, причем ОТК признал качественными из них $0{,}05\cdot0{,}02x=0{,}001x$, а бракованными $0{,}05\cdot0{,}98x=0{,}049x$.

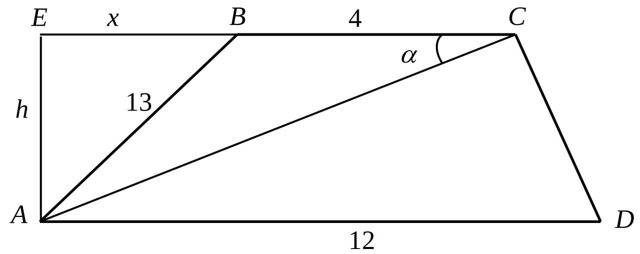
ОТК отобрал бракованных деталей $0{,}06x$. Тогда количество качественных деталей, признанных ОТК бракованными, $0{,}06x-0{,}049x=0{,}011x$.

Всего же качественных деталей $x-0{,}05x=0{,}95x$. Таким образом, процент качественных деталей, которые были признаны отделом технического контроля бракованными,равен $\frac{0{,}011x}{0{,}95x}\cdot100\%=\frac{110}{95}\%=\frac{22}{19}\%=1\frac{3}{19}\%$.

Ответ:$1\frac{3}{19}\%$.

Задание 3. (15 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 4 и 12 метров, а боковая сторона – 13 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами – 8,125 метра. Найти площадь поляны.

Решение.



Построим трапецию $ABCD$ и достроим прямоугольный треугольник AEC. Введем обозначения: $x=BE$, $h=AE$.

По условию задачи треугольник ABC вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{13}{2\cdot 8{,}125} = \frac{4}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AEC:

$$\sin\alpha = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC = \frac{5h}{4}.$$

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 13^2 \text{ и } AE^2 + CE^2 = AC^2 \Rightarrow (x+4)^2 + h^2 = \left(\frac{5h}{4}\right)^2.$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 13^2; \\ (x+4)^2 + h^2 = \left(\frac{5h}{4}\right)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 169; \\ 8x + 16 = \frac{25h^2}{16} - 169. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = \frac{128x + 185\cdot 16}{25}; \\ x^2 + \frac{128x}{25} - \frac{1265}{25} = 0. \end{cases}$$

$$\frac{25x^2}{4} + 32x - \frac{1265}{4} = 0;$$

$$D = 32^2 + 25\frac{1265}{4} = 8930{,}25 = 94{,}5^2$$

$x_1 = \frac{-32 - 94{,}5}{12{,}5} < 0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_1 = \frac{-32 + 94{,}5}{12{,}5} = 5$ метров;

$h^2 = 169 - 25 = 144;$

$h = 12.$

Следовательно, $S = \frac{4+12}{2}\cdot 12 = 96$.

Ответ: 96.

Задание 4.(20 баллов).Три нефтеперерабатывающих завода региона среди прочей выпускают продукцию «А». Доли этой продукции в общем выпуске этих заводов, образуют геометрическую прогрессию.

Если бы эти доли соотносилось как 1:2:1, то доля продукции «А» в совокупном выпуске этих трех заводов составляла бы 0,45, а если бы это соотношение было бы 1:3:2, то доляпродукции «А» в совокупном выпуске составляла бы 0,4.

Какую долю продукции «А» выпускает каждый из заводов?

Решение.Пусть доли выпускапродукции «А» на заводах составляют p, q, r, соответственно. Указанные доли составляют геометрическую прогрессии, следовательно, по признаку геометрической прогрессии $q^2 = p \cdot r$.

Пусть объемы выпуска на каждом заводе составляют x, y, z, соответственно.

По условию при соотношении долей продукции«А»1:2:1совокупная доляэтой продукции равна0,45. Это означает, что $x : y : z = 1 : 2 : 1$, следовательно, $x = z$, $y = x$;

$0{,}45 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$0{,}45 \cdot (x + 2x + x) = p \cdot x + q \cdot 2x + r \cdot x \Rightarrow 0{,}45 \cdot 4 = p + q \cdot 2 + r$;

А значит, $p + 2q + r = 1{,}8$.

Также по условию при соотношении долей продукции«А» 1:3:2совокупная доляэтой продукции0,4. Это означает, что $x : y : z = 1 : 3 : 2$, следовательно, $y = 3x$, $z = 2x$;

$0{,}4 \cdot (x + y + z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z$;

$0{,}4 \cdot (x + 3x + 2x) = p \cdot x + q \cdot 3x + r \cdot 2x \Rightarrow 0{,}4 \cdot 6 = p + q \cdot 3 + r \cdot 2$;

А значит, $p + 3q + 2r = 2{,}4$.

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p + 2q + r = 1{,}8, \\ p + 3q + 2r = 2{,}4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = p \cdot r, \\ p = 1{,}2 - q, \\ r = 0{,}6 - q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0{,}4, \\ p = 0{,}8, \\ r = 0{,}2. \end{cases}$$

Ответ:0,8;0,4;0,2.

Задание 5. (20 баллов). Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-4)(x-2z) = z - 4; \\ z^2 + y^2 = 12z, \end{cases},$$

удовлетворяющие условию $z \le 3$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы. Имеем:

$$x^2 - 4x - 2xz + 8z = z - 4 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) - 2z(x-2) + 4z = z \Rightarrow -3z = (x-2)^2 - 2z(x-2).$$

Дополним обе части уравнения до полного квадрата справа выражением z^2:

$$z^2 - 3z = (x-2)^2 - 2z(x-2)) + z^2 \Rightarrow z(z-3) = ((x-2) - z)^2.$$

Отсюда следует, что $z(z-3) \ge 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} z \le 0; \\ z \ge 3. \end{array}\right.$.

Из второго уравнения системы имеем: $z^2 - 12z = -y^2$, откуда $z^2 - 12z \le 0$ и $z \in [0;12]$.

С учётом исходного условия, что $z \le 3$, и условия, полученного из первого уравнения, имеем систему для z:

$$\begin{cases} z \le 0;\ z \ge 3 \\ z \in [0;12] \\ z \le 3 \end{cases}.$$

Всем трём условиям удовлетворяют лишь два значения: $z_1 = 0$; $z_2 = 3$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $z_1 = 0$. Из второго уравнения системы получаем $y_1 = 0$, а из первого $(x-4) \cdot x = -4$; $x_1 = 2$.Поэтому решением будет тройка чисел $(2;0;0)$.

2) $z_2 = 3$. Из второго уравнения системы получаем $y_2 = 3$; $y_3 = -3$. Из первого уравнения $(x-4)(x-6) = -1 \Rightarrow x = 5$, Таким образом, получаем второе решение системы $(5;-3;3)$и третье решение $(5;3;3)$.

Ответ: $(2;0;0)$; $(5;-3;3)$; $(5;3;3)$.

Задание 6.(30 баллов) В сферическом корпусе зонда расположено оборудование в пяти капсулах сферической формы, три из которых попарно касаются друг друга, и их центры расположены в одной плоскости. Две остальные капсулы имеют меньший радиус $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. Найти максимально возможный радиус трех одинаковых капсул.

Решение.

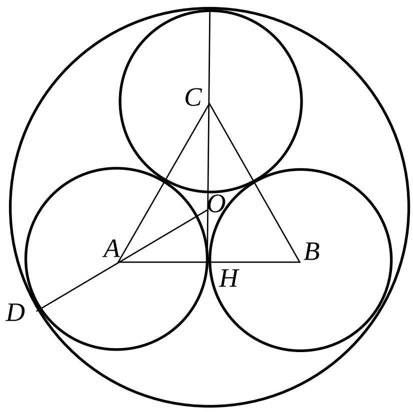


Рис. 1

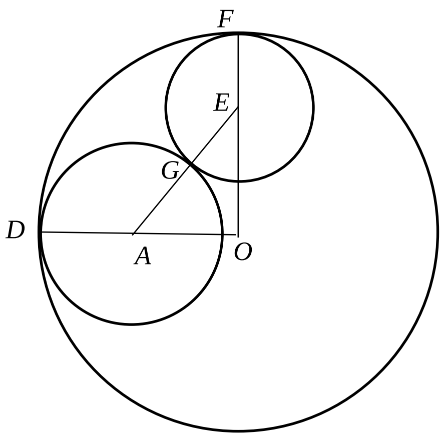


Рис. 2

Центры трех одинаковых сферических капсул, расположенных в одной плоскости (рис. 1), находятся в вершинах правильного треугольника ABC. Чтобы их радиусы были максимально возможными они должны касаться кормуса зонда. Обозначим их радиус R, тогда $AB = 2R$. Центр сферы корпуса зонда находится в точке пересечения медиан этого треугольника в точке O:

$$CH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R \Rightarrow OH = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{3}R}{3} \Rightarrow AO = 2CH = \frac{2\sqrt{3}R}{3}.$$

Тогда радиус корпуса зонда: $DO = AD + AO = R + \frac{2\sqrt{3}R}{3} = \frac{(3+2\sqrt{3})R}{3}$.

Рассмотрим плоскость перпендикулярную плоскости ABC, проходящую точку O (рис. 2). Тогда максимально возможный радиус сферы, которую можно разместить в корпусе зонда над тремя одинакового радиуса, равен $EF = EG = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника AOE:

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 \Rightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} + R\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2 + \left(\frac{(3+2\sqrt{3})R}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2;$$

$$75 + 30\sqrt{3}R + 9R^2 = 12\sqrt{3}R^2 + 3(7+4\sqrt{3}) \cdot R^2 - 10\sqrt{3}(3+2\sqrt{3}) \cdot R + 75;$$

$$12\sqrt{3}R^2 + 3(7+4\sqrt{3}) \cdot R^2 - 9R^2 = 30\sqrt{3}R + 10\sqrt{3}(3+2\sqrt{3}) \cdot R;$$

$$R = \frac{60(1+\sqrt{3})}{12(2+\sqrt{3})} = 5(\sqrt{3}-1).$$

Ответ: $5(\sqrt{3}-1)$.