Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2z}{xy}\right)(3x+3y+6z)}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}-\frac{4z^2}{x^2y^2}} \text{ при } x=5.6,\ y=\frac{5}{28}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2z}{xy}\right)(3x+3y+6z)}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}-\frac{4z^2}{x^2y^2}}=3\frac{\left(\frac{x+y-2z}{xy}\right)(x+y+2z)}{\frac{x^2+2xy+y^2-4z^2}{x^2y^2}}=3\frac{\left(\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)}{xy}\right)}{\frac{(x+y)^2-4z^2}{x^2y^2}}=$$

$$=3\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)x^2y^2}{((x+y)^2-4z^2)xy}=3\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)xy}{(x+y-2z)(x+y+2z)}=3xy=3\cdot 5.6\cdot\frac{5}{28}=3\cdot\frac{28}{5}\cdot\frac{5}{28}=3$$

Ответ: 3

Задание 2. (10 баллов) Имеются механические часы с двенадцатичасовым циферблатом. На сколько градусов меньший угол между часовой и минутной стрелкой больше в 15:45, чем в 13:05, если учитывать, что каждый взятый момент времени секундная стрелка часов смотрела строго на отметку «12».

Решение. Заметим, что часовая стрелка за каждый час проходит угол в 30°, минутная стрелка за 5 минут проходит 30°. Найдем меньшие углы между часовой и минутной стрелкой в каждый момент времени.

Если на часах 15:45, а секундная стрелка смотрит строго на отметку «12», тогда минутная стрелка находится строго на отметке «9», а часовая стрелка в промежутке между «3» и «4». Значит, меньший угол между часовой и минутной стрелкой будет меньше 180° на угол, который прошла часовая стрелка от «3» до «4». Найдем этот угол. Так как за один час часовая стрелка проходит 30°, то за 45 минут она пройдет угол $\frac{45}{60}\cdot 30°=22,5°$. И значит, угол между стрелками будет равен α = 180°−22,5°=157,5°.

Если на часах 13:05, а секундная стрелка смотрит строго на отметку «12», тогда минутная стрелка находится строго на отметке «1», а часовая стрелка в промежутке между «1» и «2». Так как за один час часовая стрелка проходит 30°, то за 5 минут она пройдет угол $\frac{5}{60}\cdot 30°=2,5°$. Тогда угол между стрелками будет равен β = 2,5°.

Найдем разность: $\alpha-\beta$ =157,5°−2,5°= 155°.

Ответ: 155°.

Задание 3. (15 баллов) Завод изготавливает детали для буровых установок, среди которых 5 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 6 % деталей. Сколько процентов качественных деталей были признаны ОТК бракованными, если 2 % всех бракованных деталей было признано качественными?

Решение. Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3) $0{,}001x$	$0{,}94x$
Признаны бракованными ОТК	2)	4) $0{,}049x$	$0{,}06x$
	$0{,}95x$	$0{,}05x$	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию $0{,}05x$ деталей бракованные, причем ОТК признал качественными из них $0{,}05\cdot 0{,}02x=0{,}001x$, а бракованными $0{,}05\cdot 0{,}98x=0{,}049x$.

ОТК отобрал бракованных деталей $0{,}06x$. Тогда количество качественных деталей, признанных ОТК бракованными, $0{,}06x-0{,}049x=0{,}011x$.

Всего же качественных деталей $x-0{,}05x=0{,}95x$. Таким образом, процент качественных деталей, которые были признаны отделом технического контроля бракованными, равен $\frac{0{,}011x}{0{,}95x}\cdot 100\%=\frac{110}{95}\%=\frac{22}{19}\%=1\frac{3}{19}\%$.

Ответ: $1\frac{3}{19}\%$.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить $\sqrt{1464^2-1444^2+1504^2-1484^2+\ldots+2024^2-2004^2}$.

Решение. Разложим подкоренное выражение на пары слагаемых по формуле разности квадратов

$$1464^2-1444^2+1504^2-1484^2+\ldots+2024^2-2004^2=(1464-1444)(1464+1444)+$$
$$+(1504-1484)(1504+1484)+\ldots+(2024-2004)(2024+2004)=20\cdot(2908+2988+\ldots+4028)$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=2908,\ a_n=4028,\ d=80,\ n=\frac{4028-2908}{80}+1=15$.

Следовательно: $S_{25}=\frac{4028+2908}{2}\cdot 15=3468\cdot 15=289\cdot 12\cdot 15=289\cdot 36\cdot 5$.

Тогда: $\sqrt{1464^2-1444^2+1504^2-1484^2+\ldots+2024^2-2004^2}=\sqrt{20\cdot 289\cdot 36\cdot 5}=10\cdot 17\cdot 6=1020$.

Ответ: 1020.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x-2024)^4+(x-2022)^4=82$.

Решение. Сделаем замену переменных: $y=x-2023$.

Тогда уравнение примет вид: $(y-1)^4+(y+1)^4=82$.

Возведем скобки в 4 степень:

$$(y^2-2y+1)^2+(y^2+2y+1)^2=82,$$

$$y^4-2y^3+y^2-2y^3+4y^2-2y+y^2-2y+1+y^4+2y^3+y^2+2y^3+4y^2+2y+y^2+2y+1=82,$$

$$2y^4+12y^2+2=82 \text{ или } y^4+6y^2-40=0,$$

$$D=36+160=196,$$

$$y^2=\frac{-6\pm 14}{2}=\left[\begin{array}{l}-10,\\ 4.\end{array}\right.$$

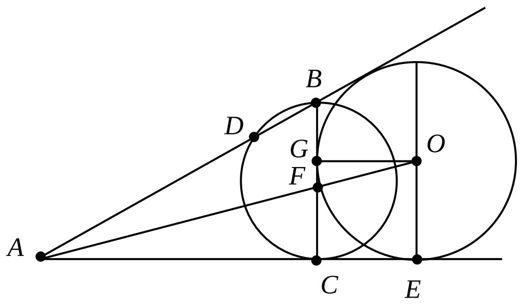
Подходит только один корень уравнения $y^2 = 4, y = \pm 2$.

Тогда сделаем обратную замену $x = y + 2023$ и получим $x_1 = 2 + 2023 = 2025$, $x_2 = -2 + 2023 = 2021$.

Ответ: 2021; 2025.

Задание 6. (30 баллов) Катет *BC* прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу *AB* в точке *D*. Найти радиус окружности, касающейся катета *BC* и продолжений сторон *AC* и *AB*, если *AC* = 12, *AD* = 9.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AB = \dfrac{AC^2}{AD} = \dfrac{12^2}{9} = 16$.

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 16^2 - 12^2 = 112 \Rightarrow BC = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Окружность с центром в точке *O* вписана в $\angle BAC$, а значит, *AO* – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\dfrac{CF}{BF} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{12}{16} \Rightarrow CF = \dfrac{12}{28} BC = \dfrac{12 \cdot 4\sqrt{7}}{28} = \dfrac{12\sqrt{7}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике *ACF* $\operatorname{tg} CAF = \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\dfrac{OE}{AE} = \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Введем обозначения: *r* – искомый радиус, тогда *OE*=*OG*=*CE*=*r*.

Следовательно, $\dfrac{r}{12+r} = \dfrac{\sqrt{7}}{7} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow r\left(\sqrt{7}-1\right) = 12 \Rightarrow r = \dfrac{12}{\sqrt{7}-1} = 2\left(\sqrt{7}+1\right)$.

Ответ: $2\left(\sqrt{7}+1\right)$.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{7}{x}+\frac{7}{y}-\frac{14z}{xy}\right)(x+y+2z)}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}-\frac{4z^2}{x^2y^2}} \text{ при } x=4.5,\ y=\frac{2}{63}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{7}{x}+\frac{7}{y}-\frac{14z}{xy}\right)(x+y+2z)}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}-\frac{4z^2}{x^2y^2}}=7\frac{\left(\frac{x+y-2z}{xy}\right)(x+y+2z)}{\frac{x^2+2xy+y^2-4z^2}{x^2y^2}}=7\frac{\left(\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)}{xy}\right)}{\frac{(x+y)^2-4z^2}{x^2y^2}}=$$

$$=7\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)x^2y^2}{((x+y)^2-4z^2)xy}=7\frac{(x+y-2z)(x+y+2z)xy}{(x+y-2z)(x+y+2z)}=7xy=7\cdot 4.5\cdot\frac{2}{63}=7\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{63}=1$$

Ответ: 1

Задание 2. (10 баллов) Имеются механические часы с двенадцатичасовым циферблатом. На сколько градусов меньший угол между часовой и минутной стрелкой больше в 15:40, чем в 13:10, если учитывать, что каждый взятый момент времени секундная стрелка часов смотрела строго на отметку «12».

Решение. Заметим, что часовая стрелка за каждый час проходит угол в 30°, минутная стрелка за час проходит 360°. Найдем меньшие углы между часовой и минутной стрелкой в каждый момент времени.

Если на часах 15:40, а секундная стрелка смотрит строго на отметку «12», тогда минутная стрелка находится строго на отметке «8», а часовая стрелка в промежутке между «3» и «4». Значит меньший угол между часовой и минутной стрелкой будет меньше 180° на 30° и на угол, который прошла часовая стрелка от «3» до «4». Найдем этот угол. Так как за час часовая стрелка проходит 30°, то за 40 минут одна пройдет угол $\frac{40}{60}\cdot 30°=20°$. И значит угол между стрелками будет равен $\alpha = 180°-30°-20°=130°$.

Если на часах 13:10, а секундная стрелка смотрит строго на отметку «12», тогда минутная стрелка находится строго на отметке «2», а часовая стрелка в промежутке между «1» и «2». Так как за один час часовая стрелка проходит 30°, то за 10 минут она пройдет угол $\frac{10}{60}\cdot 30°=5°$. Тогда угол между стрелками будет равен $\beta=30°-\frac{10}{60}\cdot 30°=30°-5°=25°$.

Найдем разность: $\alpha-\beta=130°-25°=105°$.

Ответ. 105°.

Задание 3. (15 баллов) Завод изготавливает детали для буровых установок, среди которых 6 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 7 % деталей. Сколько процентов качественных деталей были признаны ОТК бракованными, если 2 % всех бракованных деталей было признано качественными?

Решение. Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3) 0,0012x	0,93x
Признаны бракованными ОТК	2)	4) 0,0588x	0,07x
	0,94x	0,06x	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию 0,06x деталей бракованные, причем ОТК признал качественными из них 0,06·0,02x=0,0012x, а бракованными 0,06·0,98x=0,0588x.

ОТК отобрал бракованных деталей 0,07x. Тогда количество качественных деталей, признанных ОТК бракованными, 0,07x−0,0588x=0,0112x.

Всего же качественных деталей x−0,06x=0,94x. Таким образом, процент качественных деталей, которые были признаны отделом технического контроля бракованными, равен $\frac{0,0112x}{0,94x}\cdot 100\% = \frac{112}{94}\% = \frac{56}{47}\% = 1\frac{9}{47}\%$.

Ответ. $1\frac{9}{47}\%$.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить $\sqrt{1711^2-1698^2+1737^2-1724^2+...+2023^2-2010^2}$.

Решение. Разложим подкоренное выражение на пары слагаемых по формуле разности квадратов

$$1711^2-1698^2+1737^2-1724^2+...+2023^2-2010^2=(1711-1698)(1711+1698)+$$
$$+(1737-1724)(1737+1724)+...+(2023-2010)(2023+2010)=13\cdot(3409+3461+...+4033)$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=3409,\ a_n=4033,\ d=52,\ n=\frac{4033-3409}{52}+1=13$.

Следовательно: $S_{25}=\frac{4033+3409}{2}\cdot 13=3721\cdot 13$.

Тогда:. $\sqrt{1711^2-1698^2+1737^2-1724^2+...+2023^2-2010^2}=\sqrt{13\cdot 3721\cdot 13}=13\cdot 61=793$.

Ответ: 793.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x+2023)^4+(x+2025)^4=16$.

Решение. Сделаем замену переменных $y=x+2024$.

Тогда уравнение примет вид: $(y-1)^4+(y+1)^4=16$.

Возведем скобки в 4 степень:

$$(y^2-2y+1)^2+(y^2+2y+1)^2=82,$$

$$y^4-2y^3+y^2-2y^3+4y^2-2y+y^2-2y+1+y^4+2y^3+y^2+2y^3+4y^2+2y+y^2+2y+1=16,$$

$$2y^4+12y^2+2=16 \text{ или } y^4+6y^2-7=0,$$

$$D=36+28=64,$$

$$y^2=\frac{-6\pm 8}{2}=\left[\begin{array}{l}-7,\\ 1.\end{array}\right.$$

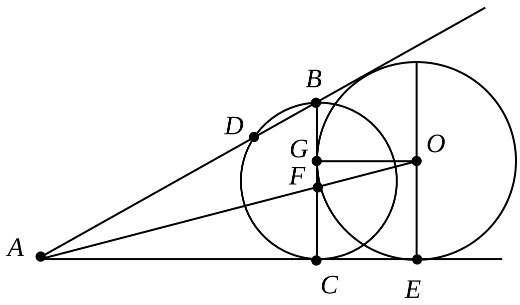
Подходит только одно решение $y^2 = 1, y = \pm 1$.

Тогда сделаем обратную замену $x = y - 2024$ и получим $x_1 = 1 - 2024 = -2023$, $x_2 = -1 - 2024 = -2025$.

Ответ. –2025, –2023.

Задание 6. (30 баллов) Катет *BC* прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу *AB* в точке *D*. Найти радиус окружности, касающейся катета *BC* и продолжений сторон *AC* и *AB*, если *AC* = 18, *AD* = 12.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{18^2}{12} = 27$.

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 27^2 - 18^2 = 405 \Rightarrow BC = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$.

Окружность с центром в точке *O* вписана в $\angle BAC$, а значит, *AO* – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\frac{CF}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \Rightarrow CF = \frac{2}{5} BC = \frac{2 \cdot 9\sqrt{5}}{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике *ACF* $\operatorname{tg} CAF = \frac{CF}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\frac{OE}{AE} = \frac{CF}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Введем обозначения: *r* – искомый радиус, тогда *OE*=*OG*=*CE*=*r*.

Следовательно, $\frac{r}{18 + r} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow r\left(\sqrt{5} - 1\right) = 18 \Rightarrow r = \frac{18}{\sqrt{5} - 1} = 4{,}5\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

Ответ: $4{,}5\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

Задание 1.(5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{(x+2y)^2}{z}-\frac{z^2}{x+2y}\right)\frac{5xy}{x+2y-z}}{\frac{z}{x+2y}+\frac{x+2y}{z}+1}:z \text{ при } x=9{,}8;\ y=\frac{6}{35}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{(x+2y)^2}{z}-\frac{z^2}{x+2y}\right)\frac{5xy}{x+2y-z}}{\frac{z}{x+2y}+\frac{x+2y}{z}+1}=\frac{\frac{(x+2y)^3-z^3}{(x+2y)z}\cdot\frac{5xy}{x+2y-z}}{\frac{(x+2y)^2+(x+2y)z+z^2}{(x+2y)z}}=\frac{\left((x+2y)^3-z^3\right)5xy}{\left((x+2y)^2+(x+2y)z+z^2\right)(x+2y-z)}$$

$$=\frac{\left((x+2y)^3-z^3\right)5xy}{(x+2y)^3-z^3}=5xy=5\cdot 9{,}8\cdot\frac{6}{35}=5\cdot\frac{49}{5}\cdot\frac{6}{35}=\frac{42}{5}=8{,}4$$

Ответ: 8,4.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 6 касается продолжения сторон *AD* и *CD* за точку *D*прямоугольника *ABCD* в точках *K* и *L* соответственно. Найти стороны прямоугольника, если *BK*=13, а *BL*=11.

Решение.

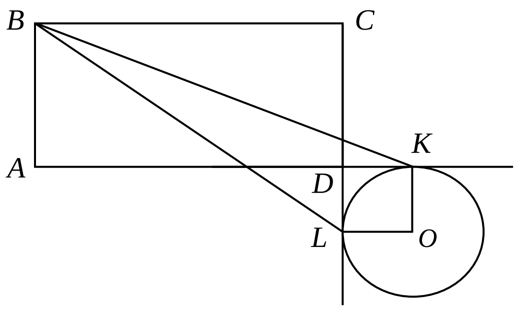


Рис. 1.

Заметим, что *DK*=*DL*=6. Введем обозначения: *x* – сторона *AD* прямоугольника, а *y* – сторона *CD*. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{cases}(x+6)^2+y^2=13^2;\\ x^2+(y+6)^2=11^2;\\ x>0;y>0.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}x^2+12x+36+y^2=169;\\ x^2+y^2+12y+36=121;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+12x+36+y^2=169;\\ 12(x-y)=169-121;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+12x+36+y^2=169;\\ y=x-4;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+12x+36+(x-4)^2=169; \\ y=x-4; \\ x>0; y>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+4x-117=0; \\ y=x-4; \\ x>0; y>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-1; \\ y=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-5. \end{cases}$$

Таким образом, $AD=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-1; CD=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-5$.

Ответ: $AD=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-1; CD=\dfrac{\sqrt{238}}{2}-5$**.**

Задание 3. (15 баллов) На предприятии изготавливают инструмент для шахт, который в зависимости от качества делится на три сорта. При проверке качества в отделе технического контроля (ОТК) вероятности неверной сортировки продукции составляют:

– для инструмента первого сорта вероятность попасть во второй сорт составляет 0,01, в третий сорт – 0,015;

– для инструмента второго сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,025, в третий сорт – 0,015;

– для инструмента третьего сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,005, во второй сорт – 0,02;

Какая доляинструмента первого сорта была изготовлена, если после контроля ОТК 95,5% инструмента были признаны первосортным, а 2,5 % инструмента – третьесортным?

Решение.Введем обозначения: x–доля изготовленного инструмента первого сорта, y–второго сорта, z – третьего сорта.

Для инструмента первого сорта получим уравнение:

$0{,}975x+0{,}025y+0{,}005z=0{,}955$.

Для инструмента третьего сорта получим уравнение:

$0{,}015x+0{,}015y+0{,}975z=0{,}025$.

Воспользуемся условием, что $x+y+z=1$, и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}975x+0{,}025y+0{,}005z=0{,}955; \\ 0{,}015x+0{,}015y+0{,}975z=0{,}025; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 195x+5y+z=191; \\ 3x+3y+195z=5; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 190x-4z=186; \\ 192z=2; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{96}; \\ x=\dfrac{893}{912}; \\ y=\dfrac{1}{96}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{893}{912}$.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить $\sqrt{925^2-900^2+975^2-950^2+\ldots+2125^2-2100^2}$.

Решение. Разложим подкоренное выражение на пары слагаемых по формуле разности квадратов

$$925^2-900^2+975^2-950^2+\ldots+2125^2-2100^2=(925-900)(925+900)+(975-950)(975+950)+\ldots+$$
$$+(2125-2100)(2125+2100)=25\cdot(1825+1925+\ldots+4225).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=1825,\ a_n=4225,\ d=100,\ n=\dfrac{4225-1825}{100}+1=25$.

Следовательно: $S_{25}=\dfrac{4225+1825}{2}\cdot 25=3025\cdot 25$.

Тогда:. $\sqrt{925^2-900^2+975^2-950^2+...+2125^2-2100^2}=\sqrt{25\cdot 3025\cdot 25}=25\cdot 55=1375$.

Ответ: 1375.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x-2006)^3-(x-2024)^3=7992$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t=x-2015$, тогда $x-2006=t+9, x-2024=t-9$.

Тогда уравнение примет вид $(t+9)^3-(t-9)^3=7992$.

Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:

$(t+9)^3-(t-9)^3=((t+9)-(t-9))((t+9)^2+(t+9)(t-9)+(t-9)^2)=$

$=18\cdot(t^2+18t+81+t^2-81+t^2-18t+81)=18\cdot(3t^2+81)=54\cdot(t^2+27)$.

Исходное уравнение примет вид:

$54\cdot(t^2+27)=7992,$

$t^2+27=148,$

$t^2=121,$

$t=\pm 11.$

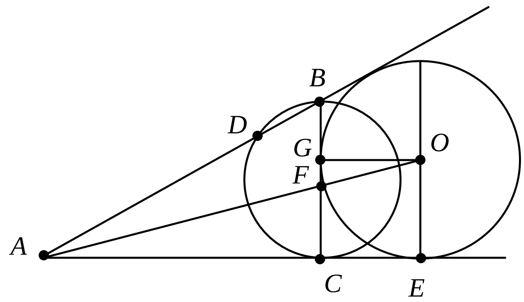
После обратной замены получим:

$x_1=2026, x_2=2004.$

Ответ: 2004;2026.

Задание 6. (30 баллов) Катет *BC* прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу *AB* в точке *D*.Найти радиус окружности, касающейся катета *BC* и продолжений сторон *AC* и *AB*, если *AC*= 24, *AD*=18.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2=AD\cdot AB\Rightarrow AB=\frac{AC^2}{AD}=\frac{24^2}{18}=32$.

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2-AC^2=32^2-24^2=448\Rightarrow BC=\sqrt{448}=8\sqrt{7}$.

Окружность с центром в точке *O* вписана в $\angle BAC$, а значит, *AO* – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\frac{CF}{BF}=\frac{AC}{AB}=\frac{24}{32}\Rightarrow CF=\frac{24}{56}BC=\frac{24\cdot 8\sqrt{7}}{56}=\frac{24\sqrt{7}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике ACF $\operatorname{tg} CAF=\frac{CF}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\frac{OE}{AE}=\frac{CF}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Введем обозначения: *r* – искомый радиус, тогда *OE*=*OG*=*CE*=*r*.

Следовательно, $\frac{r}{24+r}=\frac{\sqrt{7}}{7}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Rightarrow r(\sqrt{7}-1)=24\Rightarrow r=\frac{24}{\sqrt{7}-1}=4(\sqrt{7}+1)$.

Ответ: $4(\sqrt{7}+1)$**.**

Задание 1.(5 баллов)Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{(2x+y)^2}{z}+\frac{z^2}{2x+y}\right)\frac{3xy}{2x+y+z}}{\frac{z}{2x+y}+\frac{2x+y}{z}-1}:z \text{ при } x=16{,}25;\ y=\frac{6}{45}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{(2x+y)^2}{z}+\frac{z^2}{2x+y}\right)\frac{3xy}{2x+y+z}}{\frac{z}{2x+y}+\frac{2x+y}{z}-1}:z=\frac{\frac{(2x+y)^3+z^3}{(2x+y)z}\cdot\frac{3xy}{2x+y+z}}{\frac{(2x+y)^2-(2x+y)z+z^2}{(2x+y)z}}=\frac{\left((2x+y)^3+z^3\right)\cdot 3xy}{\left((2x+y)^2-(2x+y)z+z^2\right)(2x+y+z)}=$$

$$=\frac{\left((2x+y)^3+z^3\right)\cdot 3xy}{(2x+y)^3+z^3}=3xy=3\cdot 16{,}25\cdot\frac{6}{45}=3\cdot\frac{65}{4}\cdot\frac{6}{45}=\frac{13}{2}=6{,}5$$

Ответ: 6,5.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 8 касается продолжения сторон AD и CD за точку Dпрямоугольника $ABCD$ в точках K и L соответственно. Найти стороны прямоугольника, если BK=17, а BL=15.

Решение.

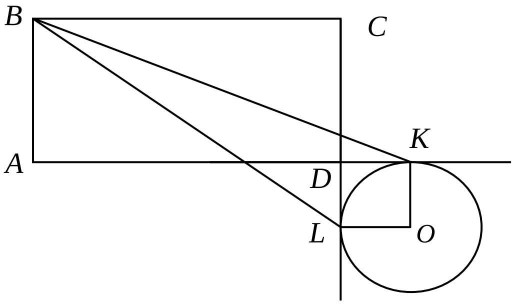


Рис. 1.

Заметим, что DK=DL=8.Введем обозначения:x – сторона AD прямоугольника, а y – сторона CD. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{cases}(x+8)^2+y^2=17^2;\\ x^2+(y+8)^2=15^2;\\ x>0;y>0.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}x^2+16x+64+y^2=289;\\ x^2+y^2+16y+64=225;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+16x+64+y^2=289;\\ 16(x-y)=289-225;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+16x+64+y^2=289;\\ y=x-4;\\ x>0;y>0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+16x+64+(x-4)^2=289; \\ y=x-4; \\ x>0; y>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+8x-209=0; \\ y=x-4; \\ x>0; y>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-2; \\ y=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-6. \end{cases}$$

Таким образом, $AD=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-2; CD=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-6$.

Ответ: $AD=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-2; CD=\dfrac{\sqrt{434}}{2}-6$**.**

Задание 3. (15 баллов) На предприятии изготавливают инструмент для шахт, который в зависимости от качества делится на три сорта. При проверке качества в отделе технического контроля (ОТК) вероятности неверной сортировки продукции составляют:

– для инструмента первого сорта вероятность попасть во второй сорт составляет 0,015, в третий сорт – 0,01;

– для инструмента второго сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,015, в третий сорт – 0,01;

– для инструмента третьего сорта вероятность попасть в первый сорт составляет 0,005, во второй сорт – 0,05;

Какая доляинструмента первого сорта была изготовлена, если после контроля ОТК 93,5% инструмента были признаны первосортным, а3 % инструмента – третьесортным?

Решение.Введем обозначения: x–доля изготовленного инструмента первого сорта, y–второго сорта, z – третьего сорта.

Для инструмента первого сорта получим уравнение:

$0{,}975x+0{,}015y+0{,}005z=0{,}935$.

Для инструмента третьего сорта получим уравнение:

$0{,}01x+0{,}01y+0{,}945z=0{,}03$.

Воспользуемся условием, что $x+y+z=1$, и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}975x+0{,}015y+0{,}005z=0{,}935; \\ 0{,}01x+0{,}01y+0{,}945z=0{,}03; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 195x+3y+z=187; \\ 2x+2y+189z=6; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 192x-2z=184; \\ 187z=4; \\ x+y+z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{4}{187}; \\ x=\dfrac{717}{748}; \\ y=\dfrac{15}{748}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{717}{748}$.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить $\sqrt{1568^2-1552^2+1600^2-1584^2+\ldots+2048^2-2032^2}$.

Решение. Разложим подкоренное выражение на пары слагаемых по формуле разности квадратов

$$1568^2-1552^2+1600^2-1584^2+\ldots+2048^2-2032^2=(1568-1552)(1568+1552)+$$
$$+(1600-1584)(1600+1584)+\ldots+(2048-2032)(2048+2032)=16\cdot(3120+3184+\ldots+4080)$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=3120,\ a_n=4080,\ d=64,\ n=\dfrac{4080-3120}{64}+1=16$.

Следовательно: $S_{25}=\dfrac{4080+3120}{2}\cdot 16=3600\cdot 16$.

Тогда:. $\sqrt{1568^2-1552^2+1600^2-1584^2+...+2048^2-2032^2}=\sqrt{16\cdot 3600\cdot 16}=16\cdot 60=960$.

Ответ:960.

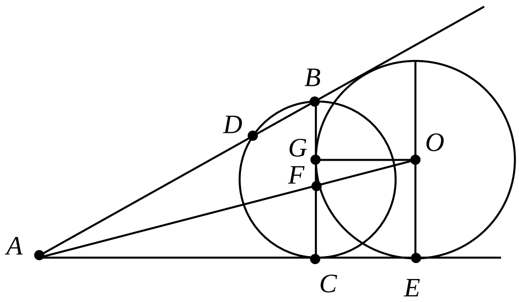
Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x-2010)^3-(x-2024)^3=6734$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t=x-2017$, тогда $x-2010=t+7,\ x-2024=t-7$.
Тогда уравнение примет вид $(t+7)^3-(t-7)^3=5772$.
Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:
$$(t+7)^3-(t-7)^3=((t+7)-(t-7))((t+7)^2+(t+7)(t-7)+(t-7)^2)=$$
$$=14\cdot(t^2+14t+49+t^2-49+t^2-14t+49)=14\cdot(3t^2+49).$$
Исходное уравнение примет вид:
$$14\cdot(3t^2+49)=6734,$$
$$3t^2+49=481,$$
$$t^2=144,$$
$$t=\pm 12.$$
После обратной замены получим:
$$x_1=2029, x_2=2005.$$

Ответ: 2005; 2029.

Задание 6. (30 баллов) Катет *BC* прямоугольного треугольника является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу *AB* в точке *D*.Найти радиус окружности, касающейся катета *BC* и продолжений сторон *AC* и *AB*, если *AC*= 12, *AD*=8.

Решение.



По свойству касательной и секущей $AC^2=AD\cdot AB\Rightarrow AB=\dfrac{AC^2}{AD}=\dfrac{12^2}{8}=18$.

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2-AC^2=18^2-12^2=180\Rightarrow BC=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$.

Окружность с центром в точке *O* вписана в $\angle BAC$, а значит, *AO* – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы $\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12}{18}\Rightarrow CF=\dfrac{12}{30}BC=\dfrac{12\cdot 6\sqrt{5}}{30}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике *ACF* $\operatorname{tg} CAF=\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Так как $\Delta ACF \sim \Delta AEO$ (по углам), $\dfrac{OE}{AE}=\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Введем обозначения: *r* – искомый радиус, тогда *OE*=*OG*=*CE*=*r*.

Следовательно, $\dfrac{r}{12+r}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow r(\sqrt{5}-1)=12\Rightarrow r=\dfrac{12}{\sqrt{5}-1}=3(\sqrt{5}+1)$.

Ответ: $3(\sqrt{5}+1)$**.**

Задание 1.(5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{y^3}}\right)\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}\right)\sqrt[6]{xy^5}}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)}-\frac{xy}{x+y}\text{ при } x=729;\ y=64.$$

Решение.

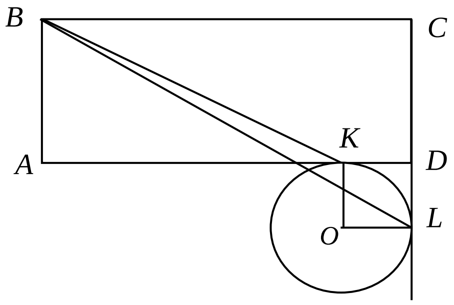
$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{y^3}}\right)\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}\right)\sqrt[6]{xy^5}}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)}-\frac{xy}{x+y}=\frac{\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}}\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}\right)\sqrt[6]{xy^5}}{\frac{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{xy^2}}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)}-\frac{xy}{x+y}=$$

$$=\frac{\frac{x^3-y^3}{\sqrt[6]{xy^9}}\sqrt[6]{xy^5}}{\frac{y^2-x^2}{\sqrt[6]{xy^4}}}-\frac{xy}{x+y}=\frac{x^3-y^3}{y^2-x^2}-\frac{xy}{x+y}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(y-x)(y+x)}-\frac{xy}{x+y}=$$

$$=-\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\frac{xy}{x+y}=-\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=-x-y=-729-64=-793.$$

Ответ: -793

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 5 касается сторонs*AD* и продолжения стороны *CD* за точку *D*прямоугольника *ABCD* в точках *K* и *L* соответственно. Найти стороны прямоугольника, если *BK*=17, а *BL*=23.



Решение. Заметим, что *DK*=*DL*=5. Обозначим за x – сторону *AD* прямоугольника, а за y – сторону *CD*. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{cases}(x-5)^2+y^2=17^2;\\ x^2+(y+5)^2=23^2;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}x^2-10x+25+y^2=289;\\ x^2+y^2+10y+25=529;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-10x+25+y^2=289;\\ 10(x+y)=529-289;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-10x+25+y^2=289;\\ y=24-x;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-10x+25+(24-x)^2=289;\\ y=24-x;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-29x+156=0;\\ y=24-x;\\ x>5;\, y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0{,}5\cdot\left(29+\sqrt{217}\right);\\ y=0{,}5\cdot\left(19-\sqrt{217}\right).\end{cases}$$

Таким образом, $AD = 0{,}5 \cdot \left(29 + \sqrt{217}\right); CD = 0{,}5 \cdot \left(19 - \sqrt{217}\right)$.

Ответ: $AD = 0{,}5 \cdot \left(29 + \sqrt{217}\right); CD = 0{,}5 \cdot \left(19 - \sqrt{217}\right)$**.**

Задание 3. (15 баллов) Завод изготавливает детали для буровых, среди которых 5 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 6 % деталей. Сколько процентов бракованных деталей были признаны ОТК качественными, если 1,4 % всех качественных деталей было признано бракованными?

Решение.Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3)	$0{,}94x$
Признаны бракованными ОТК	2)	4)	$0{,}06x$
	$0{,}95x$	$0{,}05x$	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию $0{,}95x$ деталей качественные, причем ОТК признал бракованными из них $0{,}95 \cdot 0{,}014x = 0{,}0133x$, а качественными $0{,}95 \cdot 0{,}986x = 0{,}9367x$.

ОТК отобрал качественных деталей $0{,}94x$. Тогда количество качественных деталей, признанных ОТК бракованными, $0{,}94x - 0{,}9367x = 0{,}0033x$.

Всего же бракованных деталей $0{,}05x$. Таким образом, процент бракованных деталей, которые были признаны отделом технического контроля качественными,равен: $\frac{0{,}0033x}{0{,}05x} \cdot 100\% = \frac{33}{5} = 6{,}6\%$.

Ответ: 6,6%.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2024^2 - 1351^2 + 2001^2 - 1374^2 + 1978^2 - 1397^2 \ldots + 1863^2 - 1512^2}\ .$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2024^2 - 1351^2 + 2001^2 - 1374^2 + \ldots + 1863^2 - 1512^2 =$$

$$= (2024 - 1351)(2024 + 1351) + (2001 - 1374)(2001 + 1374) + \ldots + (1863 - 1512)(1863 + 1512) =$$

$$= 3375 \cdot 673 + 3375 \cdot 627 + \ldots + 3375 \cdot 351 = 3375 \cdot (673 + 627 + \ldots + 351).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1 = 673,\ a_n = 351,\ d = 46,\ n = \frac{673 - 351}{46} + 1 = 8$.

Следовательно: $S_8 = \frac{673 + 351}{2} \cdot 8 = 4096$.

Тогда: $\sqrt[3]{2024^2 - 1351^2 + 2001^2 - 1374^2 + \ldots + 1863^2 - 1512^2} = \sqrt[3]{3375 \cdot 4096} = 15 \cdot 16 = 240$.

Ответ: 240.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $\left(x^2 + 9x + 112\right)^3 - \left(x^2 + 9x - 90\right)^3 = 8242408$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t = x^2 + 9x + 11$, тогда $x^2 + 9x + 112 = t + 101, x^2 + 9x - 90 = t - 101$.

Тогда уравнение примет вид $(t + 101)^3 - (t - 101)^3 = 8242408$.

Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:

$$(t+101)^3-(t-101)^3=((t+101)-(t-101))\left((t+101)^2+(t+101)(t-101)+(t-101)^2\right)=$$

$$=202\cdot\left(t^2+202t+10201+t^2-10201+t^2-202t+10201\right)=202\cdot\left(3t^2+10201\right).$$

Исходное уравнение примет вид:

$$202\cdot\left(3t^2+10201\right)=8242408,$$

$$3t^2+10201=40804,$$

$$t^2=10201,$$

$$t=\pm101.$$

После обратной замены получим:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+9x+11=101;\\x^2+9x+11=-101;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+9x-90=0;\\x^2+9x+112=0;\end{array}\right.$$

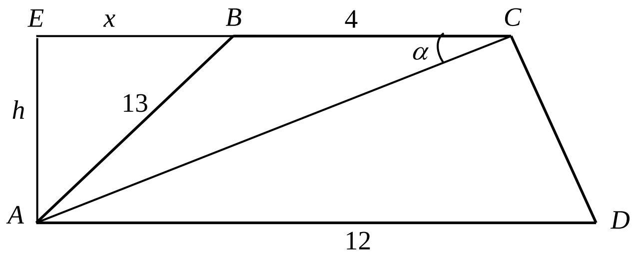
$$x_1=-15, x_2=6.$$

Ответ. -15;6.

Задание 6. (30 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 4 и 12 метров, а боковая сторона – 13 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами – 8,125 метра. Найти площадь поляны.

Решение.

Построим трапецию $ABCD$ и достроим прямоугольный треугольник AEC. Введем обозначения: $x=BE$, $h=AE$.



По условию задачи треугольник ABC вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{13}{2\cdot8{,}125}=\frac{4}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AEC: $\sin\alpha=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AC=\frac{5h}{4}$.

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2+BE^2=AB^2\Rightarrow x^2+h^2=13^2 \text{ и } AE^2+CE^2=AC^2\Rightarrow(x+4)^2+h^2=\left(\frac{5h}{4}\right)^2.$$

$$\begin{cases}x^2+h^2=13^2;\\(x+4)^2+h^2=\left(\frac{5h}{4}\right)^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+h^2=169;\\8x+16=\frac{25h^2}{16}-169.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h^2=\frac{128x+185\cdot16}{25};\\x^2+\frac{128x}{25}-\frac{1265}{25}=0.\end{cases}$$

$$\frac{25x^2}{4}+32x-\frac{1265}{4}=0;$$

$$D=32^2+25\frac{1265}{4}=8930{,}25=94{,}5^2$$

$x_1=\frac{-32-94{,}5}{12{,}5}<0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_1=\frac{-32+94{,}5}{12{,}5}=5$ метров;

$h^2=169-25=144$; $h=12$.

Следовательно, $S=\frac{4+12}{2}\cdot12=96$.

Ответ: 96.

Задание 1.(5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}^3}+\frac{1}{\sqrt{2y}^3}\right)\left(\sqrt{x}^3-\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{2xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}-\frac{2xy}{x+2y} \text{ при } x=216;\ y=27.$$

Решение.

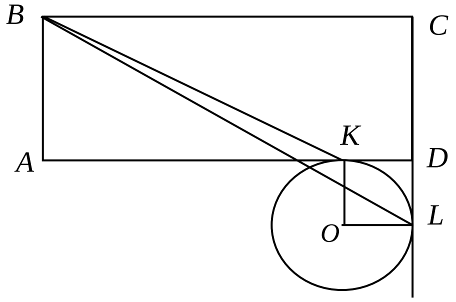
$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}^3}+\frac{1}{\sqrt{2y}^3}\right)\left(\sqrt{x}^3-\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{2xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}-\frac{xy}{x+y}=\frac{\frac{\sqrt{x}^3+\sqrt{2y}^3}{\sqrt{2xy}^3}\left(\sqrt{x}^3-\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\frac{\sqrt[3]{2y}^2-\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{2xy}^2}\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{2xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}-\frac{2xy}{x+2y}=$$

$$=\frac{\frac{x^3-8y^3}{\sqrt[6]{2xy}^9}\sqrt[6]{2xy}^5}{\frac{4y^2-x^2}{\sqrt[6]{2xy}^4}}-\frac{2xy}{x+2y}=\frac{x^3-8y^3}{4y^2-x^2}-\frac{2xy}{x+2y}=\frac{(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)}{(2y-x)(2y+x)}-\frac{2xy}{x+2y}=-\frac{x^2+2xy+4y^2}{x+2y}-\frac{2xy}{x+2y}=$$

$$=-\frac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}=-x-2y=-216-54=-270.$$

Ответ: -270.

Задание 2. (10 баллов) Окружность радиуса 9 касается стороны*AD* и продолжения стороны *CD* за точку *D*прямоугольника *ABCD* в точках *K* и *L* соответственно. Найти стороны прямоугольника, если *BK*=12, а *BL*=24.



Решение. Заметим, что *DK*=*DL*=9. Обозначим за *x* – сторону*AD* прямоугольника, а за *y* – сторону*CD*. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{cases}(x-9)^2+y^2=12^2;\\ x^2+(y+9)^2=24^2;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}x^2-18x+81+y^2=144;\\ x^2+y^2+18y+81=576;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-18x+81+y^2=144;\\ 18(x+y)=576-81;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-18x+81+y^2=144;\\ y=24-x;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-18x+81+(24-x)^2=144;\\ y=24-x;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-66x+513=0;\\ y=24-x;\\ x>9;\ y>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1{,}5\left(11-\sqrt{7}\right);\\ y=1{,}5\left(5+\sqrt{7}\right).\end{cases}$$

Таким образом, $AD=1{,}5\left(11-\sqrt{7}\right);CD=1{,}5\left(5+\sqrt{7}\right)$.

Ответ: $AD = 1{,}5\left(11-\sqrt{7}\right); CD = 1{,}5\left(5+\sqrt{7}\right)$**.**

Задание 3. (30 баллов) Завод изготавливает детали для буровых, среди которых 4 % составляют бракованные. При проверке отдел технического контроля (ОТК) отбраковал 5 % деталей. Сколько процентов бракованных деталей были признаны ОТК качественными, если 1,3 % всех качественных деталей было признано бракованными?

Решение.Все детали данного завода можно разделить на 4 категории: 1) качественные, которые ОТК признал качественными; 2) качественные, которые ОТК признал бракованными; 3) бракованные, которые ОТК признал качественными; 4) бракованные, которые ОТК признал бракованными (схема ниже).

	Качественные	Бракованные	
Признаны качественными ОТК	1)	3)	$0{,}95x$
Признаны бракованными ОТК	2)	4)	$0{,}05x$
	$0{,}96x$	$0{,}04x$	

Пусть x – общее количество деталей на этом заводе. По условию $0{,}96x$ деталей качественные, причем ОТК признал бракованными из них $0{,}96 \cdot 0{,}013x = 0{,}01248x$, а качественными $0{,}96 \cdot 0{,}987x = 0{,}94752x$.

ОТК отобрал качественных деталей $0{,}95x$. Тогда количество качественных деталей, признанных бракованными $0{,}95x - 0{,}94752x = 0{,}00248x$.

Всего же бракованных деталей $0{,}04x$. Таким образом, процент бракованных деталей, которые были признаны отделом технического контроля качественными,равен: $\frac{0{,}00248x}{0{,}04x} \cdot 100\% = \frac{248}{40} = 6{,}2\%$.

Ответ: 6,2%.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2024^2 - 173^2 + 2004^2 - 193^2 + 1984^2 - 213^2 ... + 1504^2 - 693^2}\ .$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2024^2 - 173^2 + 2004^2 - 193^2 + ... + 1504^2 - 693^2 =$$
$$= (2024-173)(2024+173) + (2004-193)(2004+193) + ... + (1504-693)(1504+693) =$$
$$= 2197 \cdot 1851 + 2197 \cdot 1811 + ... + 2197 \cdot 811 = 2197 \cdot (1851 + 1811 + ... + 811).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1 = 1851,\ a_n = 811,\ d = 40,\ n = \frac{1851-811}{40} + 1 = 27$.

Следовательно: $S_8 = \frac{1851+811}{2} \cdot 27 = 1331 \cdot 27$.

Тогда: $\sqrt[3]{2024^2 - 173^2 + 2004^2 - 193^2 + ... + 1504^2 - 693^2} = \sqrt[3]{2197 \cdot 1331 \cdot 27} = 13 \cdot 11 \cdot 3 = 429$.

Ответ. 429.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $\left(x^2 + 4x + 66\right)^3 - \left(x^2 + 4x - 21\right)^3 = 5268024$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t = x^2 + 4x + 66$, тогда $x^2 + 4x + 153 = t + 87, x^2 + 4x - 21 = t - 87$.

Тогда уравнение примет вид $(t+87)^3 - (t-87)^3 = 5268024$.

Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:

$$(t+87)^3 - (t-87)^3 = \left((t+87) - (t-87)\right)\left((t+87)^2 + (t+87)(t-87) + (t-87)^2\right) =$$
$$= 174 \cdot \left(t^2 + 174t + 87^2 + t^2 - 87^2 + t^2 - 174t + 87^2\right) = 174 \cdot \left(3t^2 + 87^2\right).$$

Исходное уравнение примет вид:

$174\cdot\left(3t^2+87^2\right)=5268024,$

$3t^2+87^2=30276=4\cdot 87^2,$

$t^2=87^2,\ t=\pm 87.$

После обратной замены получим:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+4x+66=87;\\ x^2+4x+66=-87;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x-21=0;\\ x^2+4x+153=0;\end{array}\right.$$

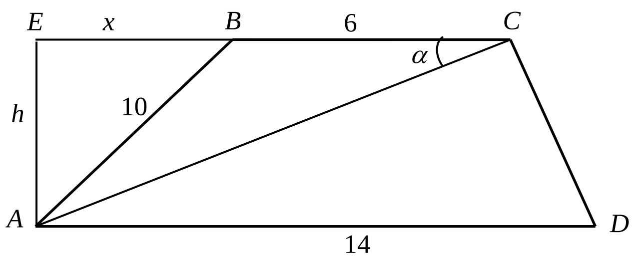
$x_1=-7, x_2=3.$

Ответ. -7;3.

Задание 6. (30 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 6 и 14 метров, а боковая сторона –10 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами, равен $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ метра. Найти площадь поляны.

Решение.

Построим трапецию *ABCD* и достроим прямоугольный треугольник *AEC*. Введем обозначения: *x*=*BE*, *h*=*AE*.



По условию задачи треугольник *ABC* вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{10}{2\cdot\frac{5\sqrt{13}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Из прямоугольного треугольника *AEC*: $\sin\alpha=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{13}h}{2}.$

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2+BE^2=AB^2\Rightarrow x^2+h^2=10^2 \text{ и } AE^2+CE^2=AC^2\Rightarrow (x+6)^2+h^2=\left(\frac{\sqrt{13}h}{2}\right)^2.$$

$$\begin{cases}x^2+h^2=10^2;\\ (x+6)^2+h^2=\left(\frac{\sqrt{13}h}{2}\right)^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+h^2=100;\\ x^2+12x+36+h^2=\frac{13h^2}{4}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h^2=100-x^2;\\ x^2+12x+36=\frac{9}{4}\left(100-x^2\right).\end{cases}$$

$\frac{13}{4}x^2+12x-189=0;$

$D=12^2+4\cdot\frac{13}{4}\cdot 189=2601=51^2$

$x_1=\frac{-12-51}{\frac{13}{2}}<0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_2=\frac{-12+51}{\frac{12}{2}}=6$ метров;

$h^2=100-36=64;\ h=8.$

Следовательно, $S=\frac{6+14}{2}\cdot 8=80.$

Ответ: 80.

Задание 1.(5 баллов) Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3x}^3}-\frac{1}{\sqrt{y}^3}\right)\left(\sqrt{3x}^3+\sqrt{y}^3\right)\sqrt[6]{3xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{3x}^4+\sqrt[3]{3xy}^2+\sqrt[3]{y}^4\right)}+\frac{3xy}{3x+y} \text{ при } x=81;\ y=64.$$

Решение.

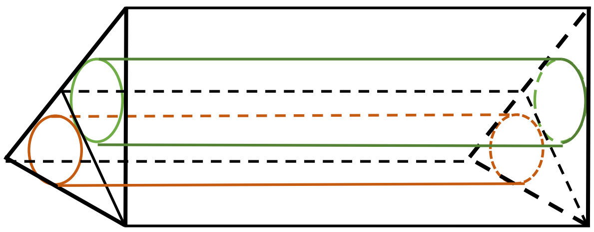
$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3x}^3}-\frac{1}{\sqrt{y}^3}\right)\left(\sqrt{3x}^3+\sqrt{y}^3\right)\sqrt[6]{3xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{3x}^4+\sqrt[3]{3xy}^2+\sqrt[3]{y}^4\right)}+\frac{3xy}{3x+y}=\frac{\frac{\sqrt{y}^3-\sqrt{3x}^3}{\sqrt{3xy}^3}\left(\sqrt{x}^3+\sqrt{3y}^3\right)\sqrt[6]{3xy}^5}{\frac{\sqrt[3]{y}^2-\sqrt[3]{3x}^2}{\sqrt[3]{3xy}^2}\left(\sqrt[3]{3x}^4+\sqrt[3]{3xy}^2+\sqrt[3]{y}^4\right)}+\frac{3xy}{3x+y}=$$

$$=\frac{\frac{y^3-27x^3}{\sqrt[6]{3xy}^9}\sqrt[6]{3xy}^5}{\frac{y^2-9x^2}{\sqrt[6]{3xy}^4}}+\frac{3xy}{3x+y}=\frac{27x^3-y^3}{y^2-9x^2}+\frac{3xy}{3x+y}=\frac{(y-3x)(9x^2+3xy+y^2)}{(y-3x)(y+3x)}+\frac{3xy}{3x+y}=\frac{9x^2+3xy+y^2}{3x+y}+\frac{3xy}{3x+y}=$$

$$=\frac{9x^2+6xy+y^2}{3x+y}=3x+y=243+64=307.$$

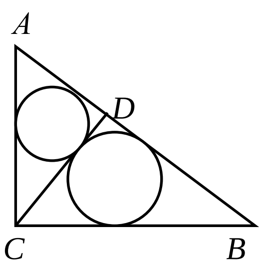
Ответ: 307

Задание 2. (10 баллов) Инженер-исследователь занимается проблемой размещения труб в треугольной полости (рисунок).



Сечение этой полости имеет форму прямоугольного треугольника. Внутри треугольной полости закреплена перегородка, выходящая из прямого угла под прямым углом к гипотенузе. В две полученные треугольные полости вписаны трубы, радиусы которых равны 1,5 см и 2 см. Необходимо найти радиус и длину окружности трубы, которую можно вписать в эту треугольную полость без перегородки.

Решение.



В треугольнике ABC ($\angle C=90°$), CD – высота. Пусть r_1=1,5 см – радиус окружности, вписанной в треугольник ADC, r_2=2 см – радиус окружности, вписанной в треугольник DBC.

Так как ΔADCподобен ΔCDB, их стороны и радиусы вписанных окружностей пропорциональны, то $\frac{AC}{BC} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} BC$.

По теореме Пифагора для треугольника ABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{9}{16} BC^2 + BC^2 = \frac{25}{16} BC^2$.

Так как ΔABCподобен ΔCAD, их стороны и радиусы вписанных окружностей пропорциональны, то $\frac{AB}{BC} = \frac{r}{r_2} = \frac{\frac{5}{4} AC}{AC} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow r = 2{,}5$ (см).

Вычислим длину окружности $l = 2\pi r = 5\pi$ (см).

Ответ: 2,5 см; 5π см.

Задание 3. (15 баллов) Три стрелка стреляют по очереди по мишеням. Вероятность того, что стрелок попадет в десятку равна $0{,}11n+0{,}6$, где n – порядковый номер стрелка (1,2,3). Найти вероятность того, что хотя бы двое из них попадут в десятку.

Решение.Для начала вычислим вероятность попадания каждого стрелка в мишень. Для 1 получим число p_1=0,71, для второго – p_2=0,82, для третьего – p_3=0,93. Рассмотрим все ситуации, когда в десятку попал хотя бы два стрелка:

- в десятку попали только два стрелка – или первый и второй, или второй и третий, или первый и третий;
- в десятку попали все три стрелка.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}71 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}07 + 0{,}29 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}93 +$$
$$+ 0{,}71 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}93 + 0{,}71 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}93 = 0{,}040754 + 0{,}221154 + 0{,}118854 + 0{,}541446 = 0{,}922208.$$

Ответ: 0,922208.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2073^2 - 2023^2 + 2093^2 - 2003^2 + 2113^2 - 1983^2 ... + 2773^2 - 1323^2}\ .$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2073^2 - 2023^2 + 2093^2 - 2003^2 + 2113^2 - 1983^2 ... + 2773^2 - 1323^2 =$$
$$= (2073-2023)(2073+2023) + (2093-2003)(2093+2003) + ... + (2773-1323)(2773+1323) =$$
$$= 4096 \cdot 50 + 4096 \cdot 90 + ... + 4096 \cdot 1450 = 4096 \cdot (50 + 90 + ... + 1450).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1 = 50,\ a_n = 1450,\ d = 40,\ n = \frac{1450-50}{40} + 1 = 36$.

Следовательно: $S_8 = \frac{1450+50}{2} \cdot 36 = 27000$.

Тогда:

$$\sqrt[3]{2073^2 - 2023^2 + 2093^2 - 2003^2 + 2113^2 - 1983^2 ... + 2773^2 - 1323^2} = \sqrt[3]{4096 \cdot 27000} = 16 \cdot 30 = 480\ .$$

Ответ:480.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x^2 + x + 32)^3 - (x^2 + x - 42)^3 = 405224$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t = x^2 + x - 5$, тогда $x^2 + x - 42 = t - 37,\quad x^2 + x + 32 = t + 37$.

Тогда уравнение примет вид $(t+37)^3 - (t-37)^3 = 405224$.

Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:

$(t+37)^3-(t-37)^3=((t+37)-(t-37))((t+37)^2+(t+37)(t-37)+(t-37)^2)=$
$=74\cdot(t^2+74t+1369+t^2-1369+t^2-74t+1369)=74\cdot(3t^2+1369)$.

Исходное уравнение примет вид:

$74\cdot(3t^2+1369)=405224,$

$3t^2+1369=5476,$

$t^2=1369,\quad t=\pm 37.$

После обратной замены получим:

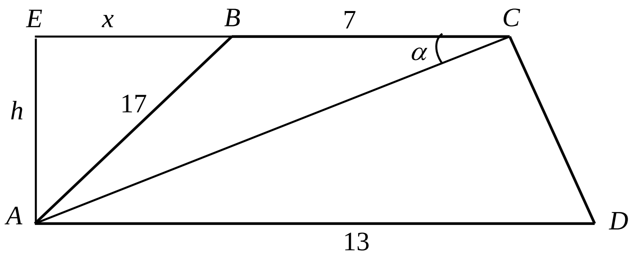
$$\left[\begin{array}{l}x^2+x-5=37;\\x^2+x-5=-37;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-42=0;\\x^2+x+32=0;\end{array}\right.$$

$x_1=-7, x_2=6.$

Ответ. -7;6.

Задание 6. (30 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 7 и 13 метров, а боковая сторона – 17 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами – $\frac{17}{\sqrt{2}}$ метра. Найти площадь поляны.

Решение.



Построим трапецию $ABCD$ и достроим прямоугольный треугольник AEC. Введем обозначения: $x=BE$, $h=AE$.

По условию задачи треугольник ABC вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{17}{2\cdot\frac{17}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника AEC: $\sin\alpha=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AC=\sqrt{2}h$.

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2+BE^2=AB^2\Rightarrow x^2+h^2=17^2 \text{ и } AE^2+CE^2=AC^2\Rightarrow(x+7)^2+h^2=(\sqrt{2}h)^2.$$

$$\begin{cases}x^2+h^2=17^2;\\(x+7)^2+h^2=(\sqrt{2}h)^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+h^2=289;\\x^2+14x+49=h^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h^2=289-x^2;\\2x^2+14x-240=0.\end{cases}$$

$x^2+7x-120=0$;

$D=7^2+4\cdot 120=529=23^2$

$x_1=\frac{-7-53}{2}<0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_1=\frac{-7+23}{2}=8$ метров;

$h^2=289-64=225$; $h=15$.

Следовательно, $S=\frac{7+13}{2}\cdot 15=150$.

Ответ: 150.

Математика. Вариант-42
8 - 9 класс

Задание 1.(5 баллов)

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}^3}-\frac{1}{\sqrt{2y}^3}\right)\left(\sqrt{x}^3+\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{2xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}+\frac{2xy}{x+2y}\ \text{при}\ x=81;\ y=64.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}^3}-\frac{1}{\sqrt{2y}^3}\right)\left(\sqrt{x}^3+\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2y}^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{2xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}+\frac{2xy}{x+2y}=\frac{\frac{\sqrt{2y}^3-\sqrt{x}^3}{\sqrt{2xy}^3}\left(\sqrt{x}^3+\sqrt{2y}^3\right)\sqrt[6]{2xy}^5}{\frac{\sqrt[3]{2y}^2-\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{2xy}^2}\left(\sqrt[3]{x}^4+\sqrt[3]{xy}^2+\sqrt[3]{2y}^4\right)}+\frac{2xy}{x+2y}=$$

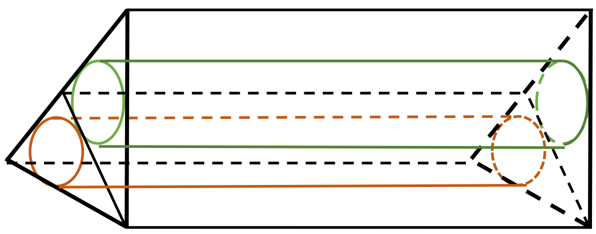
$$=\frac{\frac{8y^3-x^3}{\sqrt[6]{2xy}^9}\sqrt[6]{2xy}^5}{\frac{4y^2-x^2}{\sqrt[6]{2xy}^4}}+\frac{2xy}{x+2y}=\frac{x^3-8y^3}{4y^2-x^2}+\frac{2xy}{x+2y}=\frac{(2y-x)(x^2+2xy+4y^2)}{(2y-x)(2y+x)}+\frac{2xy}{x+2y}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x+2y}+\frac{2xy}{x+2y}=$$

$$=\frac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}=x+2y=81+128=209.$$

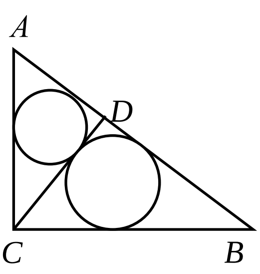
Ответ: 209

Задание 2. (10 баллов) Инженер-исследователь занимается проблемой размещения труб в треугольной полости (рисунок).

Сечение этой полости имеет форму прямоугольного треугольника. Внутри треугольной полости закреплена перегородка, выходящая из прямого угла под прямым углом к гипотенузе. В две полученные треугольные полости вписаны трубы, радиусы которых равны 2 см и 2,1 см. Необходимо найти радиус и длину окружности трубы, которую можно вписать в эту треугольную полость без перегородки.



Решение.



В треугольнике ABC ($\angle C=90°$), CD – высота. Пусть r_1=2 см – радиус окружности, вписанной в треугольник ADC, r_2=2,1 см – радиус окружности, вписанной в треугольник DBC.

Так как ΔADCподобен ΔCDB, их стороны и радиусы вписанных окружностей пропорциональны, то $\frac{AC}{BC}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{2{,}1}=\frac{20}{21}\Rightarrow AC=\frac{20}{21}BC$.

По теореме Пифагора для треугольника ABC: $AB^2=AC^2+BC^2=\frac{400}{441}BC^2+BC^2=\frac{841}{441}bC^2$.

Так как ΔABCподобен ΔBCD, их стороны и радиусы вписанных окружностей пропорциональны, то $\frac{AB}{BC}=\frac{r}{r_2}=\frac{\frac{29}{21}BC}{BC}=\frac{29}{21}\Rightarrow\frac{r}{2{,}1}=\frac{29}{21}\Rightarrow r=2{,}9$ (см).

Вычислим длину окружности $l=2\pi r=5{,}8\pi$ (см).

Ответ: 2,9 см; 5,8π см.

Задание 3. (30 баллов) Три стрелка стреляют по очереди по мишеням. Вероятность того, что стрелок попадет в десятку равна 0,08n+0,7, где n – порядковый номер стрелка (1,2,3). Найти вероятность того, что хотя бы двое из них попадут в десятку.

Решение.Для начала вычислим вероятность попадания каждого стрелка в мишень. Для 1 получим число p_1=0,78, для второго – p_2=0,86, для третьего – p_3=0,94. Рассмотрим все ситуации, когда в десятку попал хотя бы два стрелка:

- в десятку попали только два стрелка – или первый и второй, или второй и третий, или первый и третий;
- в десятку попали все три стрелка.

$$p=p_1\cdot p_2\cdot(1-p_3)+(1-p_1)\cdot p_2\cdot p_3+p_1\cdot(1-p_2)\cdot p_3+p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}78\cdot 0{,}86\cdot 0{,}06+0{,}22\cdot 0{,}86\cdot 0{,}94+$$
$$+0{,}78\cdot 0{,}14\cdot 0{,}94+0{,}78\cdot 0{,}86\cdot 0{,}94=0{,}040248+0{,}177848+0{,}102648+0{,}630552=0{,}951296.$$

Ответ: 0,951296.

Задание 4. (20 баллов) Вычислить:

$$\sqrt[3]{2072^2-2024^2+2090^2-2006^2+2108^2-1988^2+\ldots+2216^2-1880^2}.$$

Решение. Разложим пары слагаемых по формуле разности кубов:

$$2072^2-2024^2+2090^2-2006^2+2108^2-1988^2+\ldots+2216^2-1880^2=$$
$$=(2072-2024)(2072+2024)+(2090-2006)(2090+2006)+\ldots+(2216-1880)(2216+1880)=$$
$$=4096\cdot 48+4096\cdot 84+\ldots+4096\cdot 336=4096\cdot(48+84+\ldots+336).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму арифметической прогрессии: $a_1=48,\ a_n=336,\ d=36,\ n=\frac{336-48}{36}+1=9$.Следовательно: $S_8=\frac{336+48}{2}\cdot 9=192\cdot 9$.

Тогда: $\sqrt[3]{2072^2-2024^2+2090^2-2006^2++2108^2-1988^2\ldots+2216^2-1880^2}=\sqrt[3]{4096\cdot 9\cdot 192}=$
$$=\sqrt[3]{2^{12}\cdot 3^2\cdot 3\cdot 64}=2^4\cdot 3\cdot 4=192.$$

Ответ:192.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $(x^2+2x+100)^3-(x^2+2x-24)^3=1906624$.

Решение. Сделаем замену переменных: $t=x^2+2x+38$, тогда $x^2+2x-24=t-62,\ \ x^2+2x+100=t+62$.

Тогда уравнение примет вид $(t+62)^3-(t-62)^3=1906624$.

Преобразуем левую часть, используя формулы сокращенного умножения:

$$(t+62)^3-(t-62)^3=((t+62)-(t-62))((t+62)^2+(t+62)(t-62)+(t-62)^2)=$$
$$=124\cdot(t^2+124t+3844+t^2-3844+t^2-124t+3844)=124\cdot(3t^2+3844).$$

Исходное уравнение примет вид:

$124\cdot\left(3t^2+1369\right)=1906624,$

$3t^2+3844=15376,$

$t^2=3844,\ t=\pm62.$

После обратной замены получим:

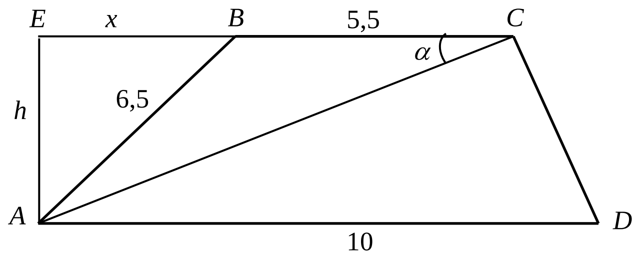
$$\left[\begin{array}{l}x^2+2x+38=62;\\ x^2+2x+38=-62;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-24=0;\\ x^2+2x+100=0;\end{array}\right.$$

$x_1=-6, x_2=4.$

Ответ. -6;4.

Задание 6. (30 баллов) Геологическая экспедиция разбила лагерь на поляне, имеющей форму трапеции. Основания этой трапеции равны 5,5 и 10 метров, а боковая сторона – 6,5 метров. Радиус окружности, для которой меньшее основание и известная боковая сторона являются хордами – $\frac{65}{12}$ метра. Найти площадь поляны.

Решение.



Построим трапецию *ABCD* и достроим прямоугольный треугольник *AEC*. Введем обозначения: *x=BE, h=AE*.

По условию задачи треугольник *ABC* вписан в окружнсть, радиус которой найдем по теореме синусов:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{6,5}{2\cdot\frac{65}{12}}=\frac{1,2}{2}=\frac{3}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AEC: $\sin\alpha=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AC=\frac{5}{3}h.$

Тогда по теореме Пифагора:

$$AE^2+BE^2=AB^2\Rightarrow x^2+h^2=6,5^2 \text{ и } AE^2+CE^2=AC^2\Rightarrow(x+5,5)^2+h^2=\left(\frac{5}{3}h\right)^2.$$

$$\begin{cases}x^2+h^2=6,5^2;\\ (x+5,5)^2+h^2=\left(\frac{5}{3}h\right)^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+h^2=42,25;\\ (x+5,5)^2=\frac{16}{9}h^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h^2=42,25-x^2;\\ 25x^2+99x-403,75=0.\end{cases}$$

$25x^2+99x-403,75=0;$

$D=99^2+4\cdot25\cdot403,75=50176=224^2$

$x_1=\frac{-99-224}{50}<0$ – не удовлетворяет условиям задачи; $x_1=\frac{-99+224}{50}=2,5$ метра;

$h^2=42,25-6,25=36;\ h=6.$

Следовательно, $S=\frac{6+10}{2}\cdot6=48.$

Ответ: 48.