1. В баллоне ёмкостью 55 литров при давлении 1,6 МПа находится пропан массой 24 кг. Найдите массу паров пропана. Молярная масса пропана 44,1 г/моль; температура кипения пропана при данном давлении 42^0С; плотность жидкого пропана 528 кг/м^3.

Решение:

Из условия понятно, что почти весь пропан находится в жидком состоянии.

Для газообразного пропана используем уравнение Менделеева-Клапейрона.

Введём обозначения:

p – давление 1,6 МПа (давление насыщенного пара пропана);

T – температура кипения пропана при данных условиях 42^0С+273=315К;

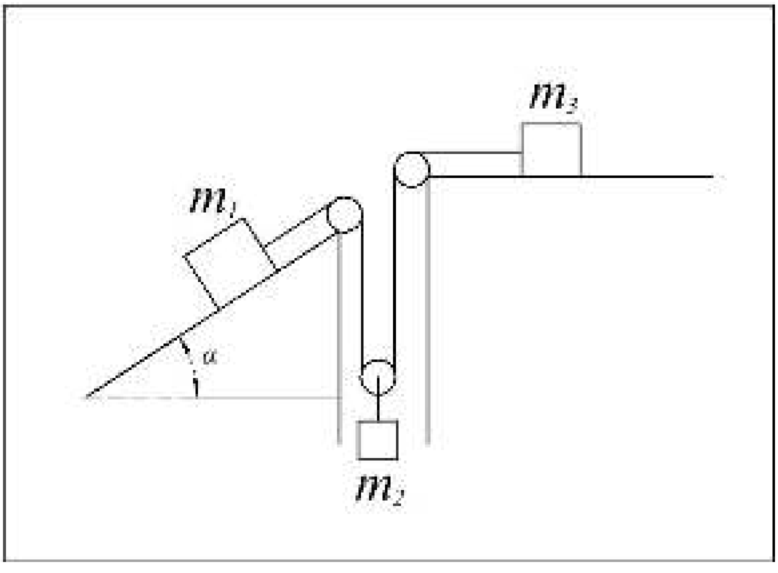
V – общий объём баллона $V_{пара}+V_{ж}=V$, где $V_{пара}$ – объём, занимаемый паром; $V_ж$ – объём, занимаемый жидким пропаном;

m – общая масса пропана $m_{пара}+m_{ж}=m$, где $m_{пара}$ – масса, занимаемая паром; $m_ж$ – масса, занимаемая жидким пропаном.

$$\begin{cases} pV_{пара}=\dfrac{m_{пара}}{\mu}RT \\ V_{пара}+V_{ж}=V \\ \rho V_{ж}=m_{ж} \\ m_{пара}+m_{ж}=m \end{cases} \Rightarrow \quad m_{пара}=0,2711кг$$

0,25	Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для газа.
0,5	Записаны соотношения для объёмов и масс.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. Система грузов, связанных между собой нитями, в некоторый момент приходит в движение (см. рисунок). Найдите ускорение груза $\boldsymbol{m_3}$, если $\boldsymbol{m_1:m_2:m_3 = 1:2:3}$ Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\boldsymbol{\alpha = 30^0}$. Массой блоков и нитей пренебречь. Нить нерастяжима. Трение отсутствует.



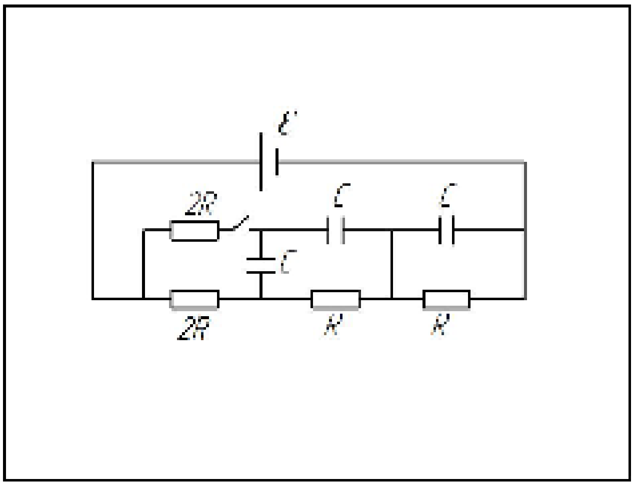
Решение:

Используем второй закон Ньютона и связь ускорений.

$$\begin{cases} T - mg\sin\alpha = ma_1 \\ T = 3ma_3 \\ 2T - 2mg = -2ma_2 \\ a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a_3 = 2{,}5\, м/с^2$$

0,25	Записано три закона Ньютона для движения грузов
0,5	Записано соотношение для связи ускорений
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. Найдите заряд, протекший через ключ после замыкания. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Параметры, указанные на схеме, считать известными.



Решение:

Общий ток: $I = \dfrac{\xi}{4R}$

Ключ разомкнут: $\dfrac{q}{0.5C} = IR \quad \Rightarrow \quad q = 0.5IRC$

Ключ замкнут: $\begin{cases} \dfrac{q_1}{C} = 3IR \\ \dfrac{q_2}{C} = 2IR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 3IRC \\ q_2 = 2IRC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta q_1 = 2.5IRC \\ \Delta q_2 = 2.5IRC \end{cases}$

Получим: $\Delta q = 5\dfrac{\xi}{4R}RC = 1.25\xi C$

0,25	Записан закон Ома.
0,5	Найдены значения зарядов на конденсаторах до и после замыкания.
0,75	Найдены значения изменения зарядов на конденсаторах с учётом ДОзарядки и ПЕРЕзарядки. Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4.

Система состоит из двух материальных точек, массы которых m и M, соединенных невесомой пружиной жесткости k. Удерживая точки в положении, когда пружина не деформирована, им сообщают одинаковые по величине и знаку электрические заряды. Оказалось, что период малых колебаний такой системы в n=2 раза меньше, чем в случае, когда эти точки не заряжены. Найдите величину электрического заряда каждой точки, в предположении, что изменение длины пружины после сообщения им электрического заряда много меньше начального расстояния L между ними. Излучением и внешними силами пренебречь.

Решение.

Центр масс системы покоится. Расстояния от каждой точки до центра масс $L_1 = \frac{M}{m+M}L$, $L_2 = \frac{m}{m+M}L$. Если x – общая деформация пружины, то смещения точек равны $x_1 = \frac{M}{m+M}x$, $x_2 = \frac{m}{m+M}x$. Периоды колебаний каждой точки одинаковые.

Пусть x_0 – равновесное растяжение пружины после сообщения заряда точкам, тогда $kx_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(L+x_0\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2+2x_0L+x_0{}^2}$

Пользуясь формулой для бесконечной суммы геометрической прогрессии с показателем $t<1$: $\frac{1}{1-t} = 1+t+\ldots$, пренебрегая $x_0{}^2$ и принимая $t = -2x_0/L$:

$kx_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2+2Lx_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}\frac{2x_0}{L}$, откуда $\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^3}2\right)x_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}$.

Если x – деформация пружины относительно равновесного растяжения, то уравнение движения точки m

$ma_1 = -k\left(x_0+x\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(L+x_0+x\right)^2}$, $ma_1 = -k\left(x_0+x\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}\frac{2\left(x_0+x\right)}{L}$

$a_1 = -\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{L^3}\right)\frac{m+M}{mM}x_1$ - уравнение колебаний точки m с циклической частотой

$\omega_1 = \sqrt{\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{L^3}\right)\frac{m+M}{mM}}$. Частота колебаний точки в отсутствие зарядов $\omega_0 = \sqrt{k\frac{m+M}{mM}}$,

По условию $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{kL^3}\right)} = n$, $q = \sqrt{2\pi\varepsilon_0\left(n^2-1\right)kL^3}$

Ответ: $q = \sqrt{6\pi\varepsilon_0 kL^3}$

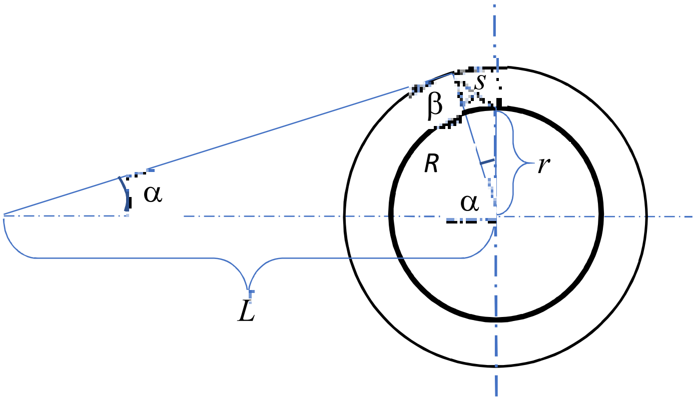
Критерии оценивания

0,25	Выведены соотношения для смещения точек при колебаниях, найдено положение равновесия с необходимыми пояснениями.
0,5	Получено уравнение колебаний с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5.

Оптическая система состоит из точечного источника света и непрозрачного небольшого шарика радиуса r, который находится внутри шара радиуса R из прозрачного материала, $R > r$. Центры шаров совпадают. На каком расстоянии от центра шаров снаружи должен находиться точечный источник света, чтобы он освещал только половину поверхности внутреннего шарика? Показатель преломления прозрачного материала равен $n = 5/4$. Снаружи большого шара – вакуум. Принять, что $R/r = n$, $R = 0{,}06$ м. Отражением лучей пренебречь.

Решение.



Луч, который касается поверхности, преломляется под углом $sin\beta = 1/n$. Радиус большого шара и расстояние от источника связаны соотношением $R = L\,sin\alpha$

По теореме косинусов (по рисунку) $s^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha$, $r^2 = R^2 + s^2 - 2sR\cos\beta$

Откуда $s\cos\beta = R - r\cos\alpha$. Из алгебраического уравнения

$$\left(R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha\right)\cos^2\beta = \left(s\cos\beta\right)^2 = \left(R - r\cos\alpha\right)^2 = R^2 - 2Rr\cos\alpha + r^2\cos^2\alpha$$

$\cos^2\alpha - 2\frac{R}{r}\frac{1}{n^2}\cos\alpha - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{n^2} = 0$, с учётом $\frac{R}{r} = n$, получается равенство $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

Следовательно, $L = \frac{R}{sin\alpha} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$

Ответ: $L = \frac{5}{3}R = 0{,}1$ м

Критерии оценивания

0,25	Найден предельный угол полного внутреннего отражения.
0,5	Записаны геометрические соотношения с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6.

Ученики 11-го класса проводят эксперименты в лаборатории физики - собирают установку для наблюдения фотоэффекта. В их распоряжении вакуумный фотоэлемент, на который подано напряжение ***ξ = 0,8 В***, состоящий из плоских параллельных пластин (катода и анода). С помощью системы линз ученикам удалось сфокусировать луч лазера на катоде. На аноде они наблюдали пятно фотоэлектронов диаметра ***D***. При изменении полярности подключения напряжения наблюдаемое пятно фотоэлектронов уменьшилось в диаметре в два раза. Найдите по данным опыта частоту лазера, если работа выхода материала катода ученикам известна из справочника ***A = 2 эВ***.

Решение:

Пусть расстояние между обкладками – ***L***.

При разности потенциалов ξ между обкладками, ускорение фотоэлектронов $a = \frac{e\xi}{Lm}$

При ускоряющей разности потенциалов:

$$\begin{cases} \frac{D}{2} = vt_1 \\ L = \frac{at_1^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad D = 2v\sqrt{\frac{2L}{a}}$$

При тормозящей разности потенциалов:

$$\begin{cases} \frac{d}{2} = v\cos\alpha t_2 \\ L = v\sin\alpha t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ 0 = v\sin\alpha - at_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{2L}{a}(v^2 - 2La)}$$

С учётом, что $D=2d$

$$2La = \frac{3v^2}{4}$$

Получим

$$\Rightarrow \quad 2L\frac{e\xi}{Lm} = \frac{3v^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{4e}{3}\xi$$

Из уравнения Эйнштейна: $\frac{mv^2}{2} = h\upsilon - A$

Следовательно: $h\upsilon - A = \frac{4e\xi}{3} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{4e\xi}{3h} + \frac{A}{h} = 7,43 \cdot 10^{14}$ *Гц*

0,25	Записано уравнение Эйнштейна.
0,5	Записаны кинематические уравнения для ускоряющей и тормозящей разности потенциалов.

0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. В баллоне ёмкостью 5 литров при давлении 0,2 МПа находится бутан. Найдите массу жидкого бутана, если известно, что паров ровно столько же. Молярная масса пропана 58 г/моль; температура кипения бутана при данном давлении 20^0С; плотность жидкого пропана 600 кг/м^3.

Решение:

Из условия понятно, что почти весь пропан находится в жидком состоянии.

Для газообразного пропана используем уравнение Менделеева-Клапейрона.

Введём обозначения:

p – давление 0,2 МПа (давление насыщенного пара пропана);

T – температура кипения бутана при данных условиях 20^0С+273=293К;

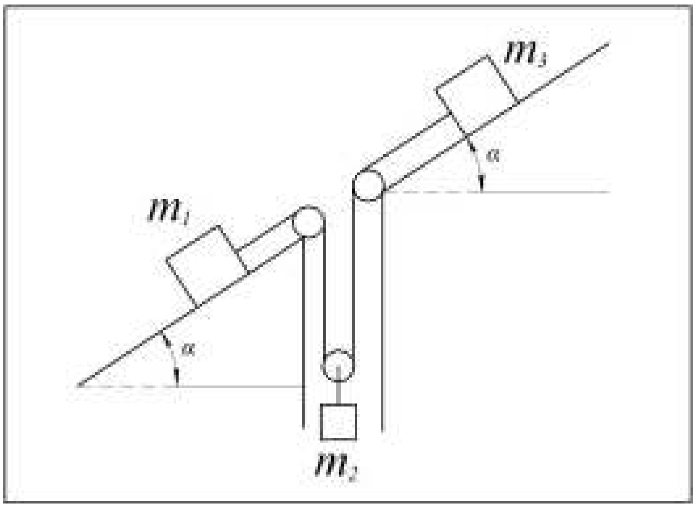
V – общий объём баллона $V_{пара} + V_{ж} = V$, где $V_{пара}$ – объём, занимаемый паром; $V_{ж}$ – объём, занимаемый жидким бутаном;

m – общая масса пропана $m_{пара} + m_{ж} = m$, где $m_{пара}$ – масса, занимаемая паром; $m_{ж}$ – масса, занимаемая жидким бутаном.

$$\begin{cases} pV_{пара} = \dfrac{m_{пара}}{\mu} RT \\ V_{пара} + V_{ж} = V \\ \rho V_{ж} = m_{ж} \\ m_{пара} + m_{ж} = m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m_{пара} = 0,024 кг$$

0,25	Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для газа.
0,5	Записаны соотношения для объёмов и масс.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. Система грузов, связанных между собой нитями, в некоторый момент приходит в движение (см. рисунок). Найдите ускорение груза m_3, если $m_1:m_2:m_3 = 1:2:3$ Наклонные плоскости составляют с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Массой блоков и нитей пренебречь. Нить нерастяжима. Трение отсутствует.

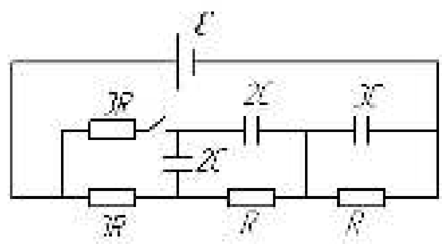


Решение:

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1 \\ T + m_3 g \sin\alpha = m_3 a_3 \\ 2T - m_2 g = -m_2 a_2 \\ \dfrac{a_1 + a_3}{2} = a_2 \end{cases} \Rightarrow \quad a_3 = 7\, м/с^2$$

0,25	Записано три закона Ньютона для движения грузов
0,5	Записано соотношение для связи ускорений
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. Найдите заряд, протекший через ключ после замыкания. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Параметры, указанные на схеме, считать известными.



Решение:

Общий ток: $I = \dfrac{\xi}{5R}$

Ключ разомкнут: $\dfrac{q}{C} = IR \quad \Rightarrow \quad q = IRC$

Ключ замкнут: $\begin{cases} \dfrac{q_1}{2C} = 4IR \\ \dfrac{q_2}{2C} = 3IR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 8IRC \\ q_2 = 6IRC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta q_1 = 7IRC \\ \Delta q_2 = 7IRC \end{cases}$

Получим: $\Delta q = 14\dfrac{\xi}{5R}RC = 2.8\xi C$

0,25	Записан закон Ома.
0,5	Найдены значения зарядов на конденсаторах до и после замыкания.
0,75	Найдены значения изменения зарядов на конденсаторах с учётом ДОзарядки и ПЕРЕзарядки. Приведено решение с необходимыми

	пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. Система состоит из двух материальных точек, массы которых m и M, соединенных невесомой пружиной жесткости k. Удерживая точки в положении, когда пружина не деформирована, им сообщают одинаковые по величине и знаку электрические заряды. Оказалось, что период малых колебаний такой системы в n=3 раза меньше, чем в случае, когда эти точки не заряжены. Найдите величину электрического заряда каждой точки, в предположении, что изменение длины пружины после сообщения им электрического заряда много меньше начального расстояния L между ними. Излучением и внешними силами пренебречь.

Решение. Центр масс системы покоится. Расстояния от каждой точки до центра масс $L_1 = \frac{M}{m+M}L$, $L_2 = \frac{m}{m+M}L$. Если x – общая деформация пружины, то смещения точек равны $x_1 = \frac{M}{m+M}x$, $x_2 = \frac{m}{m+M}x$. Периоды колебаний каждой точки одинаковые.

Пусть x_0 – равновесное растяжение пружины после сообщения заряда точкам, тогда

$$kx_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(L+x_0\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2+2x_0L+x_0^{\,2}}$$

Пользуясь формулой для бесконечной суммы геометрической прогрессии с показателем $t<1$: $\frac{1}{1-t} = 1+t+\ldots$, пренебрегая $x_0^{\,2}$ и принимая $t = -2x_0/L$:

$$kx_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2+2Lx_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}\frac{2x_0}{L}$$, откуда $$\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^3}2\right)x_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}.$$

Если x – деформация пружины относительно равновесного растяжения, то уравнение движения точки m

$$ma_1 = -k\left(x_0+x\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(L+x_0+x\right)^2}, \quad ma_1 = -k\left(x_0+x\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L^2}\frac{2\left(x_0+x\right)}{L}$$

$a_1 = -\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{L^3}\right)\frac{m+M}{mM}x_1$ - уравнение колебаний точки m с циклической частотой

$\omega_1 = \sqrt{\left(k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{L^3}\right)\frac{m+M}{mM}}$. Частота колебаний точки в отсутствие зарядов $\omega_0 = \sqrt{k\frac{m+M}{mM}}$,

По условию $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{kL^3}\right)} = n$, $q = \sqrt{2\pi\varepsilon_0\left(n^2-1\right)kL^3}$

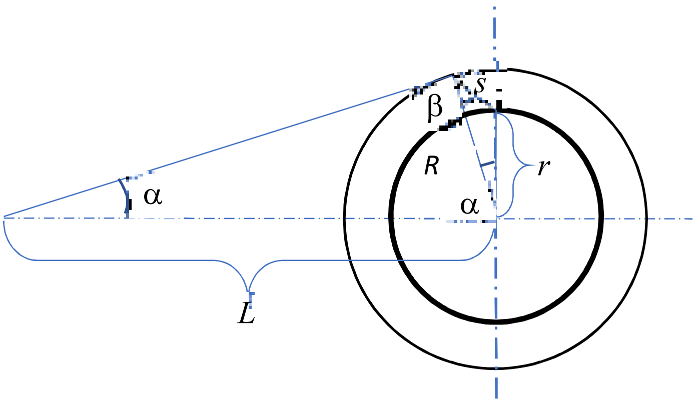
Ответ: $q = 4\sqrt{\pi\varepsilon_0 kL^3}$

Критерии оценивания

0,25	Выведены соотношения для смещения точек при колебаниях, найдено положение равновесия с необходимыми пояснениями.
0,5	Получено уравнение колебаний с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Оптическая система состоит из точечного источника света и непрозрачного небольшого шарика радиуса r, который находится внутри шара радиуса R из прозрачного материала, $R > r$. Центры шаров совпадают. На каком расстоянии от центра шаров снаружи должен находиться точечный источник света, чтобы он освещал только половину поверхности внутреннего шарика? Показатель преломления прозрачного материала равен $n = 5/3$. Снаружи большого шара – вакуум. Принять, что $R/r = n$, $R = 0{,}12$ м. Отражением лучей пренебречь.

Решение.



Луч, который касается поверхности, преломляется под углом $\sin\beta = 1/n$. Радиус большого шара и расстояние от источника связаны соотношением $R = L\sin\alpha$

По теореме косинусов (по рисунку) $s^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha$, $r^2 = R^2 + s^2 - 2sR\cos\beta$

Откуда $s\cos\beta = R - r\cos\alpha$. Из алгебраического уравнения

$\cos^2\alpha - 2\frac{R}{r}\frac{1}{n^2}\cos\alpha - \left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{n^2} = 0$, с учётом $\frac{R}{r} = n$, получается равенство $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

Следовательно, $L = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}}$

Ответ: $L = \frac{5}{4}R = 0{,}15$ м

Критерии оценивания

0,25	Найден предельный угол полного внутреннего отражения.

0,5	Записаны геометрические соотношения с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6. Ученики 11-го класса проводят эксперименты в лаборатории физики - собирают установку для наблюдения фотоэффекта. В их распоряжении вакуумный фотоэлемент, на который подано напряжение $\boldsymbol{\xi = 0{,}8}$ **В**, состоящий из плоских параллельных пластин (катода и анода). С помощью системы линз ученикам удалось сфокусировать луч лазера на катоде. На аноде они наблюдали пятно фотоэлектронов диаметра $\boldsymbol{D}$. При изменении полярности подключения напряжения наблюдаемое пятно фотоэлектронов уменьшилось в диаметре в два раза. Найдите по данным эксперимента красную границу фотоэффекта для данного материала катода ($\upsilon_{кр}$), если известна частота используемого лазера $\upsilon = 7 \cdot 10^{14}\ Гц$.

Решение:

Пусть расстояние между обкладками – $\boldsymbol{L}$.

При разности потенциалов ξ между обкладками, ускорение фотоэлектронов

$$a = \frac{e\xi}{Lm}$$

При ускоряющей разности потенциалов:

$$\begin{cases} \frac{D}{2} = vt_1 \\ L = \frac{at_1^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad D = 2v\sqrt{\frac{2L}{a}}$$

При тормозящей разности потенциалов:

$$\begin{cases} \frac{d}{2} = v\cos\alpha t_2 \\ L = v\sin\alpha t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ 0 = v\sin\alpha - at_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{2L}{a}(v^2 - 2La)}$$

С учётом, что $D=2d$

$$2La = \frac{3v^2}{4}$$

Получим

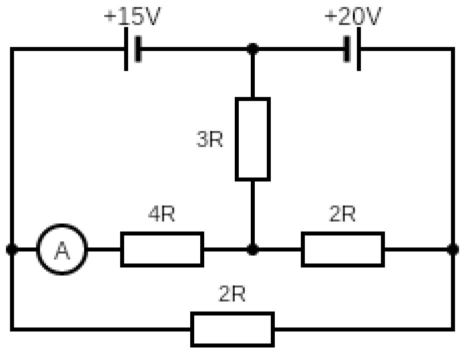
$$\Rightarrow \quad 2L\frac{e\xi}{Lm}=\frac{3v^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2}=\frac{4e}{3}\xi$$

Из уравнения Эйнштейна: $\frac{mv^2}{2}=h\upsilon - A$

Следовательно: $h\upsilon - A=\frac{4e\xi}{3} \quad \Rightarrow \quad h\upsilon - h\upsilon_{кр}=\frac{4e\xi}{3} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{кр}=\upsilon-\frac{4e\xi}{3h}=4.4\cdot 10^{14}\,Гц$

0,25	Записано уравнение Эйнштейна и определена «красная граница».
0,5	Записаны кинематические уравнения для ускоряющей и тормозящей разности потенциалов.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. Определите показания идеального амперметра, считая параметры, указанные на схеме известными. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь. $R = 5$ *Ом*.



Решение:

По правилам обходов и закону Кирхгофа

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \xi_1 - 4I_1R - 3IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0.11538A \\ \xi_2 - 2I_2R - 3IR = 0 \end{cases}$$

Критерии оценивания

0,25	Записано правило Кирхгофа для токов.
0,5	Применены правила обходов по контуру ли закон Кирхгофа для разностей потенциалов.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. Аня и Катя стоят спинами друг к другу на Красной площади. Аня подпрыгивает вверх на некоторую высоту h в своей системе отсчета и приземляется на расстоянии S_0 от Кати. Высота h много меньше радиуса Земли. Потом Аня подпрыгнула второй раз на высоту в два раза большую и приземлилась на расстоянии S от Кати. Найдите отношение расстояний S к S_0. Изменением ускорения свободного падения на высоте h пренебречь.

Решение:

v_0 – скорость поверхности Земли

v – скорость Ани на высоте h

ЗСМИ: $mv_0R = mv(R + h)$

$$v = \frac{v_0R}{R + h}$$

Δv – скорость относительного движения девочек вдоль поверхности земли

$$\Delta v = v_0 - v = \frac{v_0h}{R + h} \sim \frac{v_0h}{R}$$

Из кинематики t пропорционально корню из высоты h

Следовательно, расстояние между девочками $S_0 = \Delta vt$ пропорционально корню квадратному из куба высоты.

Получаем, $S=S_0 \cdot 2^{1,5}$

Ответ: $2^{1,5} = 2,828$

Критерии оценивания

0,25	Найдена зависимость расстояния h от t
0,5	Применен ЗСМИ или законы Кеплера

0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. В сосуде переменного объёма содержится 1 моль одноатомного идеального газа при давлении p_1 = 4 атм и объёме V_1 = 40 л. Газ медленно переводят из одного состояния в другое таким образом, что с каждым уменьшением объёма на 5 л, давление повышается на одну атмосферу (зависимость давления от объёма линейна). Найдите модуль изменения внутренней энергии за время достижения максимальной температуры.

Решение:

Запишем уравнение процесса: $p = a - bV$

Исходя из данных задачи: $p = 12_{атм} - \frac{8_{атм}}{40_{л}} V = 12_{атм} - \frac{1_{атм}}{5_{л}} V$

Уравнение гиперболы: $p = \frac{\nu RT}{V}$

Найдём пересечение:

$$\frac{\nu RT}{V} = a - bV = 12_{атм} - \frac{1_{атм}}{5_{л}} V \quad \Rightarrow \quad \nu RT = 12_{атм} V - \frac{1_{атм}}{5_{л}} V^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1_{атм}}{5_{л}} V^2 - 12_{атм} V + \nu RT = 0$$

Так как решение только одно, следовательно

$$D = \left(12_{атм}\right)^2 - 4\frac{1_{атм}}{5_{л}} \nu RT = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(12_{атм}\right)^2 = 4\frac{1_{атм}}{5_{л}} \nu RT \quad \Rightarrow$$

$$\nu RT = \frac{\left(12_{атм}\right)^2}{4\frac{1_{атм}}{5_{л}}} = 180_{атм \cdot л}$$

Получим, $|U| = \frac{3}{2}\nu R\left(T - T_1\right) = \frac{3}{2}\left(\nu RT - p_1 V_1\right) = 3кДж$

Критерии оценивания

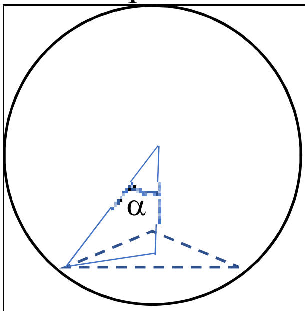
0,25	Записано уравнение для линейной зависимости процесса или уравнение касающейся гиперболы, а также формула изменения внутренней энергии.
0,5	Найдена точка касания изотермы и линейного процесса.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. Тонкостенную диэлектрическую сферу радиуса *R=0,3 м* равномерно зарядили зарядом *Q = 1 мкКл*. После этого в стенке сферы открыли три малых отверстия,

радиус каждого из которых равен $r = R/50$. Отверстия расположены так, что они образуют вершины равностороннего треугольника, сторона которого равна R. Чему равна величина напряженности электрического поля в центре сферы? Принять $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ Ф/м. Численный ответ округлить до десятых.

Решение:

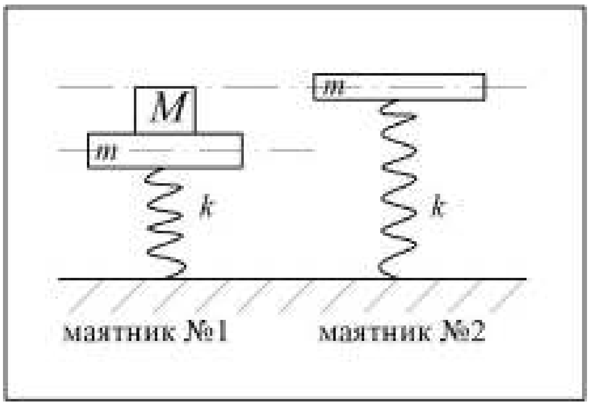
Внутри равномерно заряженной сферы напряженность поля равна нулю. Наличие отверстий можно представить как результат наложения противоположных по знаку Q зарядов, величина каждого из которых равна $q = \frac{Q}{4\pi R^2}\pi\left(\frac{R}{50}\right)^2 = \frac{Q}{10000}$. Эти заряды можно рассматривать как точечные.

	Для треугольника $E = 3\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lvert q\rvert}{R^2}\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2\cos\left(30^0\right)}\right)^2}\Big/R = \sqrt{\frac{2}{3}}$. $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q}{10000}\right)\frac{\sqrt{6}}{R^2}$. $E = 10\sqrt{6} \approx 24{,}5$ В/м

Критерии оценивания

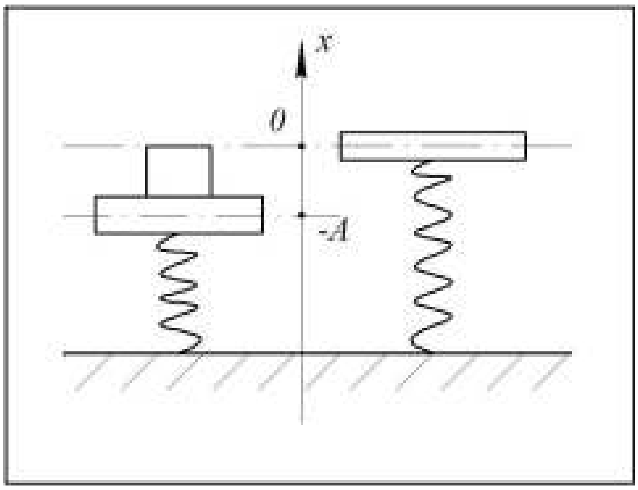
0,25	Введены точечные заряды.
0,5	Найдены их величины и напряженности от каждого из них.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Рассмотрим систему двух одинаковых пружинных вертикальных маятников жёсткостью ***k = 100 Н/м*** и массой ***m = 0,25 кг***, находящихся в равновесии. На первый маятник сверху положили груз массой ***M = 3m***. Через большой промежуток времени, когда колебания прекратились груз перенесли на второй маятник. Считать, что за время переноса груза маятники не успели сместиться. Найдите минимальное время, через которое маятники окажутся на одной высоте.



Решение:

Найдем циклические частоты маятников:



$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} \end{cases}$$

Решение уравнений колебаний маятников составит:

$$\begin{cases} x_1 = -A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ x_2 = -A + A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}t\right) = -A + A\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

Когда маятники окажутся на одной высоте их решения совпадут:

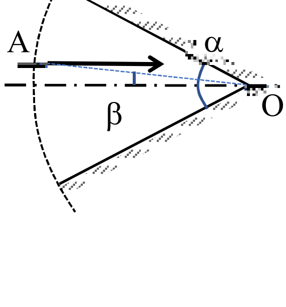
$$-A + A\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$t = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \approx 0,79\pi \approx 0,25\,c$$

Критерии оценивания

0,25	Найдены частоты или периоды для маятников.
0,5	Записаны уравнения колебаний маятников.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

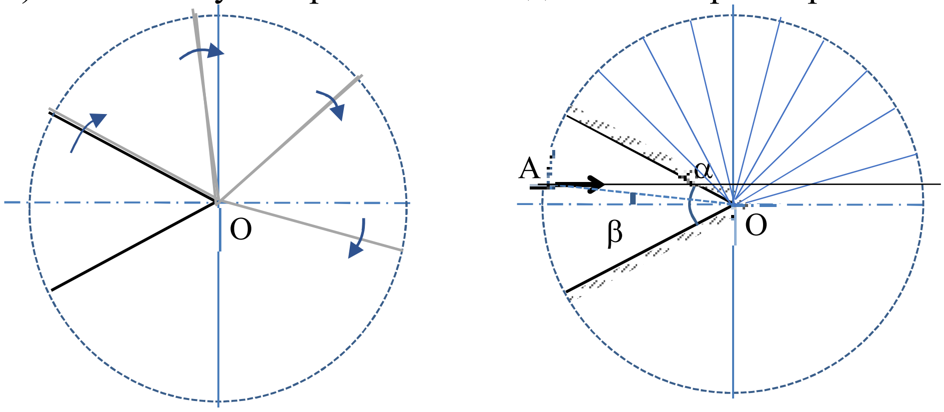
6. Луч света падает на систему из двух одинаковых зеркал, образующих в сечении перпендикулярной плоскостью угол с вершиной в точке О. Угол между зеркалами равен $\alpha = 35^0$. Луч света падает на зеркала параллельно биссектрисе угла через точку А на дуге окружности, для которой этот угол является центральным. Угол между отрезком ОА и биссектрисой угла равен $\beta = 3^0$. Сколько раз луч отразится от поверхности зеркал?



Решение.

Надо построить окружность, для которой угол α является центральным (точка О – центр окружности, а радиус равен длине зеркал в этом сечении) . Отражение зеркал друг в друге приводит к некоторому множеству центральных углов в окружности, полученных, например, поворотом угла α вокруг вершины О. Эти повороты нужно делать до тех пор, пока не произойдёт полное наложение какой-то копии угла на себя. Для целой окружности количество углов должно быть минимальным натуральным числом $n = \frac{360}{\alpha} \cdot m$, где m –натуральный множитель, подбираемый из условия, чтобы n было натуральным числом. Для угла $\alpha = 35^0$ минимальное число $n = 72$ (при $m = 7$).

Т.е. вся окружность должна быть разделена на 72 одинаковые части - малые дуги. Следовательно, каждая из малых дуг опирается на малый центральный угол 5^0. Эти малые углы образованы лучами, являющихся сторонами разных перекрываемых друг с другом больших углов $\alpha = 35^0$. Падающий луч света следует продолжить на всю окружность. Его пересечение с каждым из лучей (сторон) соответствует отражению от одной из сторон зеркального угла.



На дуге окружности $\alpha = 35^0$ укладывается 7 малых дуг, или шесть лучей без учёта самих зеркал. Следовательно, остаётся 66 лучей. Сверху диаметра окружности, являющимся продолжением биссектрисы находится 33 луча.

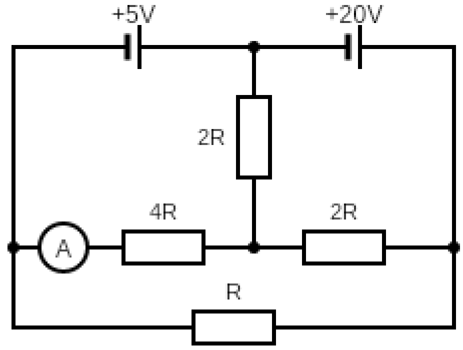
Угол между биссектрисой и ближайшим к ней лучом $\varphi_1 = 2{,}5^0$. Угол между следующим лучом и биссектрисой равен $\varphi_2 = 7{,}5^0$, $\varphi_3 = 12{,}5^0$ и т.д.

Ответ 4.1: Т.к. $\varphi_1 < \beta < \varphi_2$, то луч света пересечёт всего 32 луча (стороны) - всего 32 отражения.

Критерии оценивания

0,25	Описан принцип построения изображений отражающих поверхностей с необходимыми пояснениями.
0,5	Найдено верное количество изображений отражающих поверхностей с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. Определите показания идеального амперметра, считая параметры, указанные на схеме известными. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь. $R = 5$ *Ом*.



Решение:
По правилам обходов и закону Кирхгофа
$\xi_1 = 5$ В
$\xi_2 = 20$ В
Ток I – ток через центральный резистор.

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I \\ \xi_1 - 4I_1R + 2IR = 0 \\ \xi_2 - 2I_2R - 2IR = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I_1 = 0.6A$$

Критерии оценивания

0,25	Записано правило Кирхгофа для токов.
0,5	Применены правила обходов по контуру ли закон Кирхгофа для разностей потенциалов.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. Костя и Маша стоят спинами друг к другу на дворцовой площади Санкт-Петербурга. Костя подпрыгивает вверх на высоту h в своей системе отсчета и приземляется на расстоянии S_0 от Маши. Высота h много меньше радиуса Земли. Как далеко на запад сместилась бы Маша, если бы Костя прыгнул на высоту в три раза большую? Изменением ускорения свободного падения на высоте h пренебречь.

Решение:
v_0 – скорость поверхности Земли
v – скорость Кости на высоте h
ЗСМИ: $mv_0R = mv(R + h)$

$$v = \frac{v_0R}{R + h}$$

Δv – скорость относительного движения девочек вдоль поверхности земли

$$\Delta v = v_0 - v = \frac{v_0h}{R + h} \sim \frac{v_0h}{R}$$

Из кинематики t пропорционально корню из высоты h
Следовательно, расстояние между девочками $S_0 = \Delta vt$ пропорционально корню квадратному из куба высоты.

Получаем, $S=S_0 \cdot 3^{1,5}$
Ответ: $3^{1,5} = 5,196$

Критерии оценивания

0,25	Найдена зависимость расстояния h от t
0,5	Применен ЗСМИ или законы Кеплера
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. В сосуде переменного объёма содержится 2 моль одноатомного идеального газа при давлении $p_1 = 8$ атм и объёме $V_1 = 10$ л. Газ медленно переводят из одного состояния в другое таким образом, что с каждым увеличением объёма на 5 л, давление уменьшается на 1 атм (зависимость давления от объёма линейная). Найдите модуль изменения внутренней энергии за время достижения максимальной температуры.

Решение:

Запишем уравнение процесса: $p = a - bV$

Исходя из данных задачи: $p = 10_{атм} - \frac{2_{атм}}{10_{л}}V = 10_{атм} - \frac{1_{атм}}{5_{л}}V$

Уравнение гиперболы: $p = \frac{\nu RT}{V}$

Найдём пересечение:

$$\frac{\nu RT}{V} = a - bV = 10_{атм} - \frac{1_{атм}}{5_{л}}V \quad \Rightarrow \quad \nu RT = 10_{атм}V - \frac{1_{атм}}{5_{л}}V^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1_{атм}}{5_{л}}V^2 - 10_{атм}V + \nu RT = 0$$

Так как решение только одно, следовательно

$$D = \left(10_{атм}\right)^2 - 4\frac{1_{атм}}{5_{л}}\nu RT = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(10_{атм}\right)^2 = 4\frac{1_{атм}}{5_{л}}\nu RT \quad \Rightarrow$$

$$\nu RT = \frac{\left(10_{атм}\right)^2}{4\frac{1_{атм}}{5_{л}}} = 125_{атм \cdot л}$$

Получим, $$U = \frac{3}{2}\nu R\left(T - T_1\right) = \frac{3}{2}\left(\nu RT - p_1V_1\right) = 6,75кДж$$

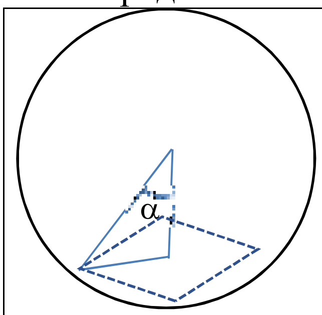
Критерии оценивания

0,25	Записано уравнение для линейной зависимости процесса или уравнение касающейся гиперболы, а также формула изменения внутренней энергии.
0,5	Найдена точка касания изотермы и линейного процесса.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. Тонкостенную диэлектрическую сферу радиуса *R=0,3 м* равномерно зарядили зарядом *Q = 1 мкКл*. После этого в стенке сферы открыли четыре малых отверстия, радиус каждого из которых равен *r = R/50*. Отверстия расположены так, что они образуют вершины квадрата, сторона которого равна *R*. Чему равна величина напряженности электрического поля в центре сферы? Принять $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ Ф/м. Численный ответ округлить до десятых.

Решение:

Внутри равномерно заряженной сферы напряженность поля равна нулю. Наличие отверстий можно представить как результат наложения противоположных по знаку Q зарядов, величина каждого из которых равна $q = \frac{Q}{4\pi R^2}\pi\left(\frac{R}{50}\right)^2 = \frac{Q}{10000}$. Эти заряды можно рассматривать как точечные.



Для квадрата

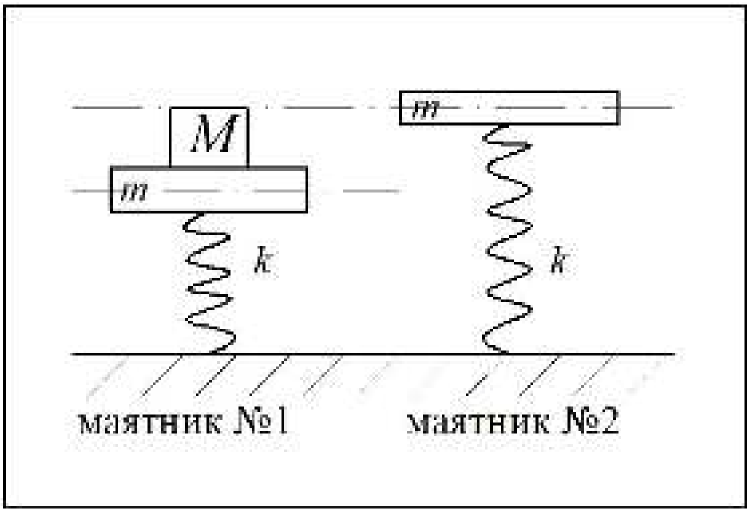
$$E = 4\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{R^2}\cdot\cos\alpha,\quad \cos\alpha = \sqrt{R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}\Big/R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q}{10000}\right)\frac{\sqrt{8}}{R^2}.\ E = 10\sqrt{8} \approx 28{,}3 \text{ В/м}$$

Критерии оценивания

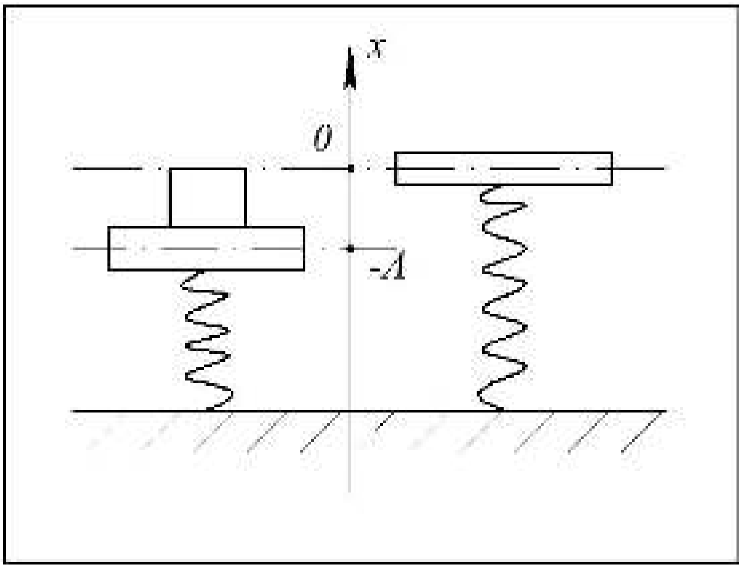
0,25	Введены точечные заряды.
0,5	Найдены их величины и напряженности от каждого из них.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Рассмотрим систему двух одинаковых пружинных вертикальных маятников жёсткостью ***k = 100 Н/м*** и массой ***m = 0,25 кг***, находящихся в равновесии. На первый маятник сверху положили груз массой ***M = 3m***. Через большой промежуток времени, когда колебания прекратились груз перенесли на второй маятник. Считать, что за время переноса груза маятники не успели сместиться. Найдите минимальное время, через которое скорости маятников совпадут по модулю.



Решение:

Найдем циклические частоты маятников:



$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} \end{cases}$$

Решение уравнений колебаний маятников составит:

$$\begin{cases} x_1 = -A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ x_2 = -A + A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}t\right) = -A + A\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{cases} \Rightarrow$$

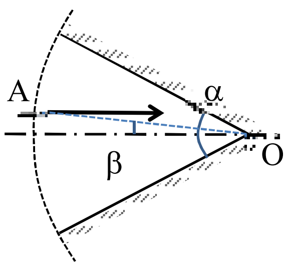
$$\begin{cases} v_1 = A\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ v_2 = -A\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{cases} \Rightarrow \quad A\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) = -A\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$$

$$\Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}18\,c$$

Критерии оценивания

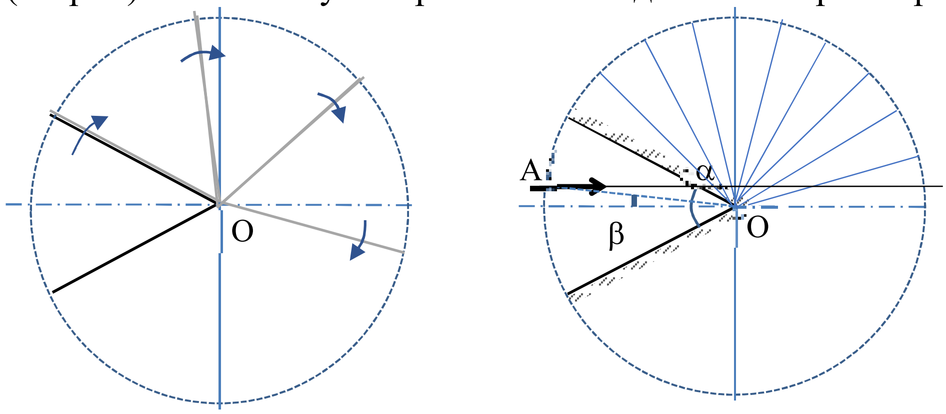
0,25	Найдены частоты или периоды для маятников.
0,5	Записаны уравнения колебаний маятников.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6. Луч света падает на систему из двух одинаковых зеркал, образующих в сечении перпендикулярной плоскостью угол с вершиной в точке O. Угол между зеркалами равен $\alpha = 35^0$. Луч света падает на зеркала параллельно биссектрисе угла через точку A на дуге окружности, для которой этот угол является центральным. Угол между отрезком OA и биссектрисой угла равен $\beta = 8^0$. Сколько раз луч отразится от поверхности зеркал?



Решение. Надо построить окружность, для которой угол α является центральным (точка О – центр окружности, а радиус равен длине зеркал в этом сечении) . Отражение зеркал друг в друге приводит к некоторому множеству центральных углов в окружности, полученных, например, поворотом угла α вокруг вершины О. Эти повороты нужно делать до тех пор, пока не произойдёт полное наложение какой-то копии угла на себя. Для целой окружности количество углов должно быть минимальным натуральным числом $n = \frac{360}{\alpha} \cdot m$, где m –натуральный множитель, подбираемый из условия, чтобы n было натуральным числом. Для угла $\alpha = 35^0$ минимальное число n = 72 (при m = 7).

Т.е. вся окружность должна быть разделена на 72 одинаковые части - малые дуги. Следовательно, каждая из малых дуг опирается на малый центральный угол 5^0. Эти малые углы образованы лучами, являющихся сторонами разных перекрываемых друг с другом больших углов $\alpha = 35^0$. Падающий луч света следует продолжить на всю окружность. Его пересечение с каждым из лучей (сторон) соответствует отражению от одной из сторон зеркального угла.



На дуге окружности $\alpha = 35^0$ укладывается 7 малых дуг, или шесть лучей без учёта самих зеркал. Следовательно, остаётся 66 лучей. Сверху диаметра окружности, являющимся продолжением биссектрисы находится 33 луча.

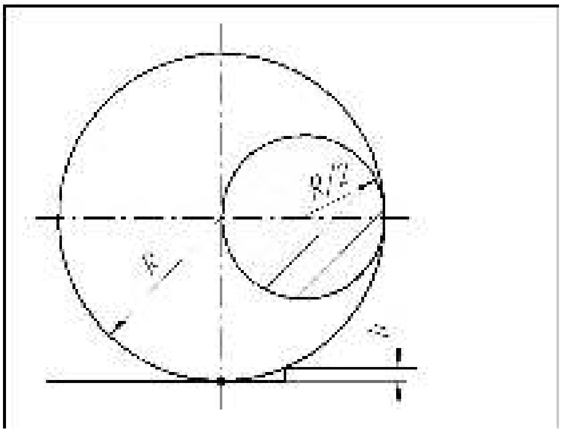
Угол между биссектрисой и ближайшим к ней лучом $\varphi_1 = 2,5^0$. Угол между следующим лучом и биссектрисой равен $\varphi_2 = 7,5^0$, $\varphi_3 = 12,5^0$ и т.д.

Ответ 4.2: Т.к. $\varphi_2 < \beta < \varphi_3$, то луч света пересечёт всего 31 луч (стороны) - всего 31 отражение.

Критерии оценивания

0,25	Описан принцип построения изображений отражающих поверхностей с необходимыми пояснениями.
0,5	Найдено верное количество изображений отражающих поверхностей с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. На горизонтальном столе покоится шар радиуса ***R = 1 м***. С одной стороны шар упирается в ступеньку высотой ***h***. Проскальзывание между шаром и ступенькой отсутствует. Определите максимальную высоту ступеньки, на которую сможет закатиться шар, если из него вырезали полость радиусом ***r = 0,5R*** и заполнили её материалом плотность, которого отличается в ***n = 10*** раз от плотности изначального материала. См. рисунок.



Решение:

Уравнение моментов, относительно точки опоры о ступеньку:

$$Mgx = mg\left(\frac{R}{2} - x\right)$$

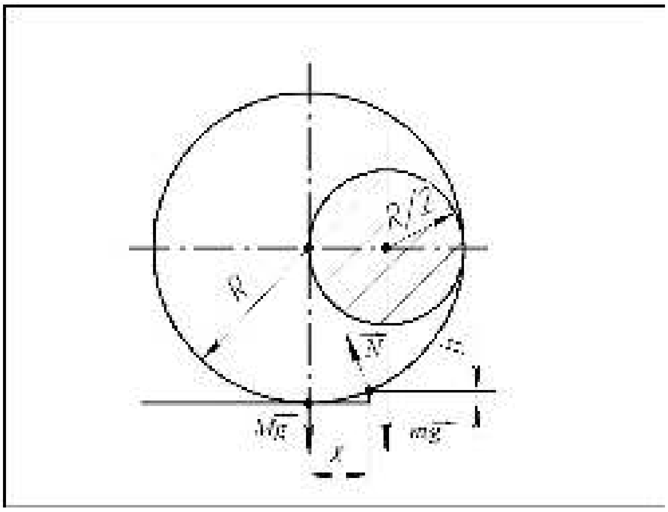
Масса ***до***полнения:

$$m = \frac{n-1}{8}M$$

Получаем:

$$\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \frac{n-1}{n+7}\cdot\frac{R}{2}$$

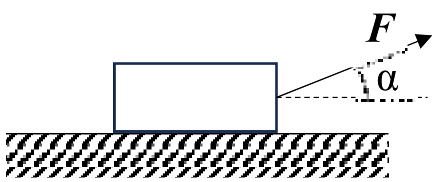
Следовательно, ***h*** = 3,6 см



Критерии оценивания

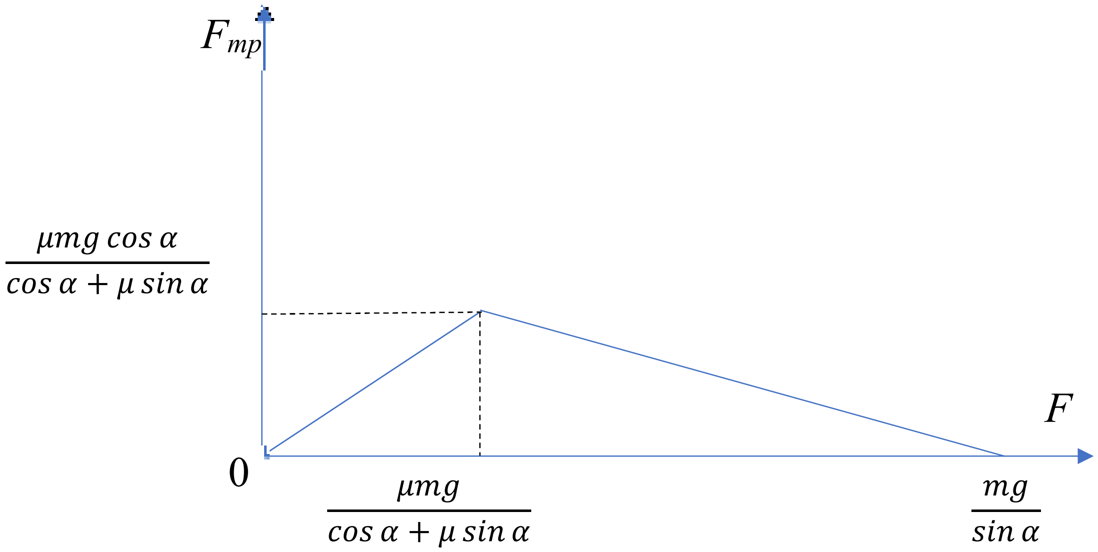
0,25	Найден смещенный центр масс или/и найдена масса ДОполнения.
0,5	Записано уравнение моментов для системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. На горизонтальной шероховатой поверхности покоится небольшой брусок, массой *m*. К нему прикладывают силу $F=\beta mgt$, направленную под углом α (см. рисунок). Найдите скорость бруска в момент, когда тело оторвётся от земли.

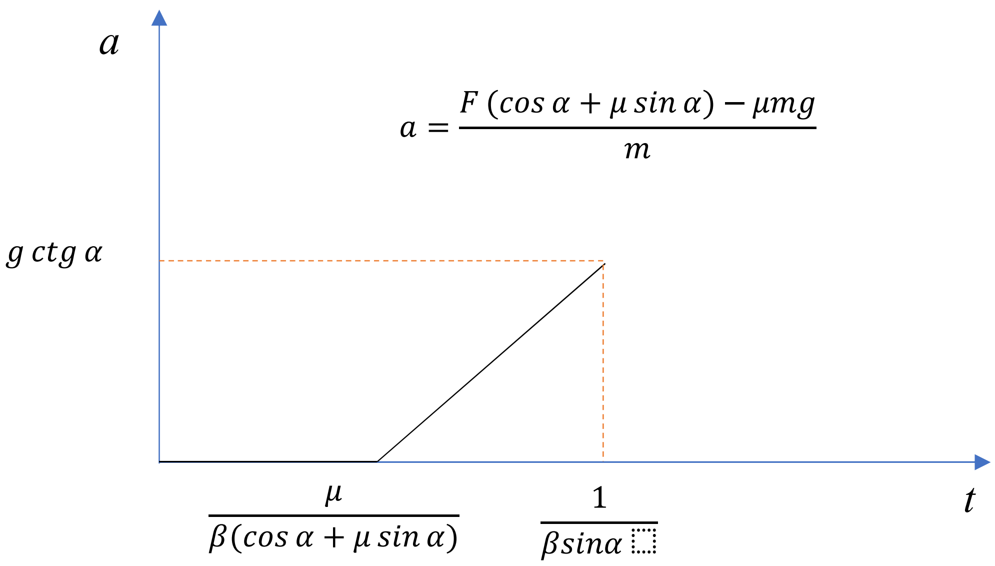


Решение:

Построим график зависимости силы трения $F_{тр}$ от приложенной силы F.



Построим график ускорения тела от времени.



Получаем $v=\frac{g\,ctg^2\,\alpha}{2\beta(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$

Критерии оценивания

0,25	Описан момент времени перехода силы трения покоя в силу трения скольжения.
0,5	Записаны уравнения для момента отрыва тела от поверхности.
0,75	Построен график ускорения от времени для определения скорости. Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. При проведении оптического эксперимента с тонкой собирающей линзой пошел дождь. Капли дождя падают вертикально. Найдите расстояние между каплями на одной горизонтали, скорости изображения которых одинаковы в любой момент времени и составляют две скорости действительных капель. Фокусное расстояние линзы ***F = 50 см***. Рассмотреть только полупространство с одной из сторон линзы. Считать линзу вертикальной.

   Решение:

   Одна из таких капель (1) находится в промежутке от 0 до F, а вторая (2) от F до 2F.

   Для первой:

   $$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{H_1}{h}=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{d_1-F} \Rightarrow H_1=\frac{Fh}{d_1-F}$$

   Ее скорость $u_1=\frac{dH_1}{dt}=\frac{Fv}{d_1-F}=2v \Rightarrow d_1=\frac{3}{2}F$

   Для второй:

   $$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{H_2}{h}=\frac{f_2}{d_2}=\frac{F}{F-d_2} \Rightarrow H_2=\frac{Fh}{F-d_2}$$

   Ее скорость $u_2=\frac{dH_2}{dt}=\frac{Fv}{F-d_2}=2v \Rightarrow d_2=\frac{1}{2}F$

   Следовательно расстояние между ними:

   $$S=d_2-d_1=F=50\,см$$

Критерии оценивания

0,25	Записаны формулы тонкой линзы для двух случаев.
0,5	Составлено уравнение для нахождения скорости изображения капель.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. В разреженном воздушном пространстве начинает подниматься тонкий двухслойный горизонтальный лист из алюминиевой фольги. Найдите температуру воздуха, если температура нижней поверхности листа 125^0С; температура верхней поверхности - 0^0С; давление воздуха 0,5 Па; масса диска 0,5 мг; площадь поверхности диска 1 см^2.

Решение:

ЗИИ: $F=\frac{Nm_0(v_{н\,у}-v_{в\,у})}{\Delta t}=\frac{1}{6}\frac{Nm_0(v_н-v_в)}{\Delta t}$

N – число молекул ударяющихся о поверхность листа;

m_0 – масса одной молекулы воздуха;

m – масса листа;

μ – молярная масса воздуха;
Δt – время взаимодействия;
S – площадь листа.
Среднеквадратичные скорости молекул, отскакивающих от нижней и верхней граней листа $v_в$ и $v_н$;
Среднеквадратичная скорость налетающих молекул v:

$$\begin{cases} v_в = \sqrt{\dfrac{3RT_в}{\mu}} \\ v_н = \sqrt{\dfrac{3RT_н}{\mu}} \\ v = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} \end{cases}$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона для воздуха:

$$pV = pSy = pSv_y \Delta t = \frac{Nm_0}{\mu} RT$$

Условие равновесия:

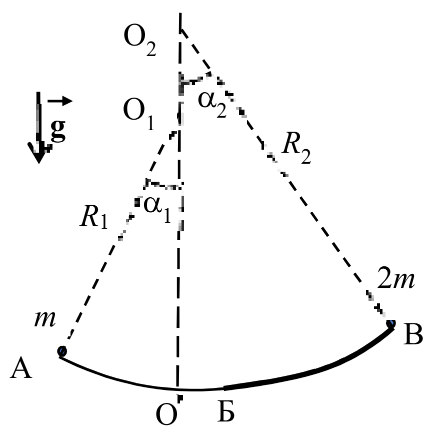
$$F = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}\frac{Nm_0(v_н - v_в)}{\Delta t} = \frac{1}{6} pS\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}\left(\sqrt{\frac{3RT_н}{\mu}} - \sqrt{\frac{3RT_в}{\mu}}\right) = mg \quad \Rightarrow$$

$$T = \left(\frac{1}{2} pS \frac{\sqrt{T_н} - \sqrt{T_в}}{mg}\right)^2 = 293,65\,K$$

Критерии оценивания

0,25	Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для воздуха, условие равновесия для диска (листа).
0,5	Записан ЗИИ импульса для молекул воздуха и диска, введены средние-квадратичные скорости молекул.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Два точечных тела, массы которых m и $2m$ одновременно начинают движение из точек А и В, соответственно, навстречу друг другу по двум гладким цилиндрическим склонам и упруго соударяются в точке Б. Траектории точек в вертикальном сечении – это дуги окружностей АБ и ВБ, радиусы которых R_1 и R_2. Известно, что центры этих окружностей лежат на одной вертикальной линии. Начальные положения точечных тел заданы углами α_1 и α_2. Найдите время движения каждого из тел до точки Б. Принять $g \approx \pi^2$ м/с^2, $R_2 = 4R_1 = 16$ м, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.05$ рад, длина дуги АБ больше длины дуги АО. Ответ указать в секундах, округлив до десятых.



Решение

Движение точки по дуге окружности аналогично движению математического маятника.

Угловые координаты тел $\alpha_A = \alpha_1 cos(\omega_1 t)$, $\alpha_B = \alpha_2 cos(\omega_2 t)$, $\omega_1 = \sqrt{g/R_1}$, $\omega_2 = \sqrt{g/R_2}$.

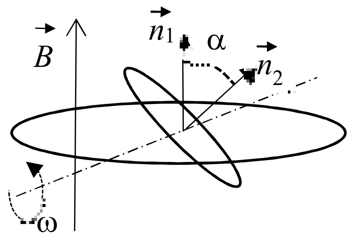
Положение точки Б задаём углом $\alpha_Б$, тогда в момент встречи тел $\alpha_A = -\alpha_Б$, $\alpha_B = \alpha_2 - \alpha_Б$,

т.е. $-\alpha_Б = \alpha_1 cos(\omega_1 t)$, $\alpha_2 - \alpha_Б = \alpha_2 cos(\omega_2 t)$, откуда $\alpha_2 + \alpha_1 cos(\omega_1 t) = \alpha_2 cos(\omega_2 t)$, и т.к. $\omega_1 = 2\omega_2$, то $1 + cos(2\omega_2 t) = cos(\omega_2 t)$ или $1 + 2cos^2(\omega_2 t) - 1 = cos(\omega_2 t)$. Поэтому $2cos^2(\omega_2 t) = cos(\omega_2 t)$ и $cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{R_2}{g}}$

Ответ: $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{R_2}{g}}$

Критерии оценивания

0,25	Записаны циклические частоты колебаний тел с необходимыми пояснениями.
0,5	Записаны уравнения движения точек с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.



6. Два проводника имеющие форму плоских колец, радиусы которых $R > r$, соединены последовательно. Центры колец совпадают. Кольца вращаются в однородном магнитном поле с постоянной одинаковой угловой скоростью вокруг общей оси, лежащей в плоскости колец и проходящей через их центры. Угол между нормалями к плоскостям колец равен α. Отношение радиусов колец равно $R/r = 2$. Найдите отношение максимальной суммарной ЭДС индукции в проводниках для значения угла $\alpha_1 = \pi/3$ к максимальной суммарной ЭДС индукции в проводниках для значения угла $\alpha_2 = 2\pi/3$. Взаимным влиянием токов колец и излучением пренебречь. Численный ответ округлить до десятых.

Решение:

Магнитные потоки через площадку каждого из колец $\Phi_1 = BS_1 cos(\omega t)$, $\Phi_2 = BS_2 cos(\omega t + \alpha)$

ЭДС индукции в каждом из проводников $E_1 = \omega BS_1 sin(\omega t)$, $E_2 = \omega BS_2 sin(\omega t + \alpha)$.

Суммарная ЭДС для последовательно соединенных проводников

$$E = E_1 + E_2 = \omega BS_1 sin(\omega t) + \omega BS_2 sin(\omega t + \alpha) = \omega B\left(S_1 sin(\omega t) + S_2 sin(\omega t) cos(\alpha) + S_2 cos(\omega t) sin(\alpha)\right)$$

С другой стороны $E = E_{max} sin(\omega t + \varphi) = E_{max} sin(\omega t) cos(\varphi) + E_{max} cos(\omega t) sin(\varphi)$

поэтому получаем соотношения $E_{max}\, cos(\varphi)=\omega B\left(S_1+S_2\, cos(\alpha)\right)$, $E_{max}\, sin(\varphi)=\omega B S_2\, sin(\alpha)$.

Амплитуда суммарной ЭДС

$$E_{max}=\omega B\sqrt{\left(S_1+S_2\, cos(\alpha)\right)^2+\left(S_2\, sin(\alpha)\right)^2}=\omega B\sqrt{S_1{}^2+2S_1S_2\, cos(\alpha)+S_2{}^2},$$

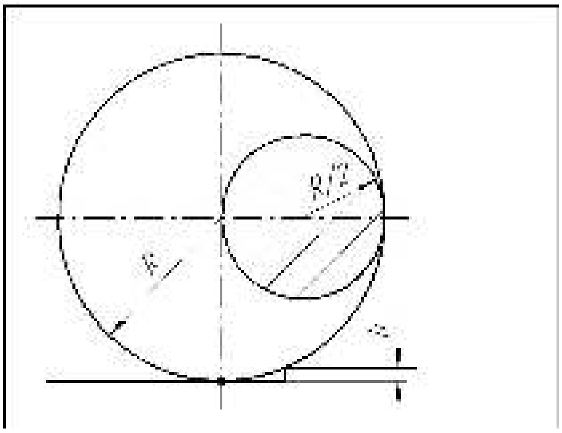
$$\frac{E_{max\_1}}{E_{max\_2}}=\frac{\sqrt{S_1{}^2+2S_1S_2\, cos(\alpha_1)+S_2{}^2}}{\sqrt{S_1{}^2+2S_1S_2\, cos(\alpha_2)+S_2{}^2}}.$$

$$\frac{E_{max\_1}}{E_{max\_2}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2+2\frac{R}{r}cos(\alpha_1)+1}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2+2\frac{R}{r}cos(\alpha_2)+1}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\approx 1.5,$$

Критерии оценивания

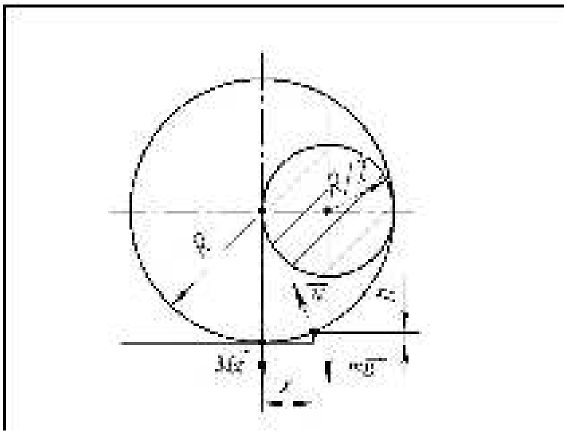
0,25	Получены выражения для магнитных потоков и ЭДС в каждом из проводников.
0,5	Получено выражение амплитуды суммарной ЭДС.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. На горизонтальном столе покоится шар радиуса ***R = 1 м***. С одной стороны шар упирается в ступеньку высотой ***h = 0,01R***. Проскальзывание между шаром и ступенькой отсутствует. Из него вырезали полость радиусом ***r = 0,5R*** и заполнили её материалом плотность, которого отличается в ***n*** раз от плотности изначального материала (см. рисунок). Найдите минимальное значение ***n***, при котором шар сможет закатиться на ступеньку.



Решение:

Уравнение моментов, относительно точки опоры о ступеньку:



$$Mgx = mg\left(\frac{R}{2} - x\right)$$

Масса ***до***полнения:

$$m = \frac{n-1}{8}M$$

Получаем:

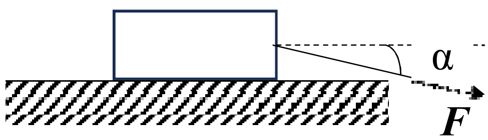
$$\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \frac{n-1}{n+7}\cdot\frac{R}{2}$$

Следовательно, ***n*** = 4,14

Критерии оценивания

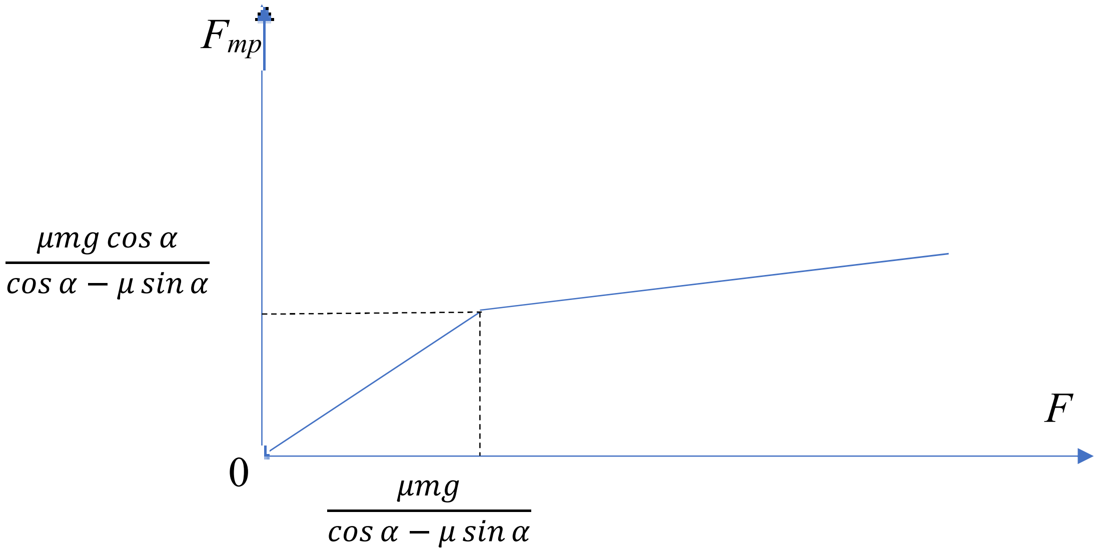
0,25	Найден смещенный центр масс или/и найдена масса ДОполнения.
0,5	Записано уравнение моментов для системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. На горизонтальной шероховатой поверхности покоится небольшой брусок, массой m. К нему прикладывают силу $F=\beta mgt$, направленную под углом α (см. рисунок). Найдите скорость бруска в момент, когда ускорение тела станет равно ускорению свободного падения.

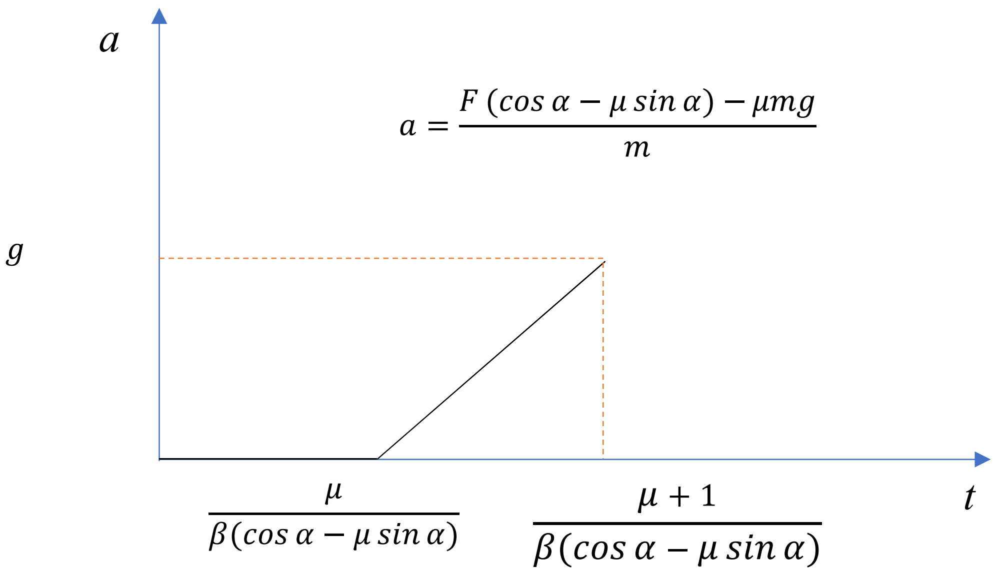


Решение:

Построим график зависимости силы трения $F_{тр}$ от приложенной силы F.



Построим график ускорения тела от времени.



Получаем $v=\frac{g}{2\beta(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}$

Критерии оценивания

0,25	Описан момент времени перехода силы трения покоя в силу трения скольжения.
0,5	Записаны уравнения для момента отрыва тела от поверхности.
0,75	Построен график ускорения от времени для определения скорости. Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. При проведении оптического эксперимента с тонкой собирающей линзой пошел дождь. Капли дождя падают вертикально. Найдите расстояние между каплями на

одной горизонтали, скорости изображения которых одинаковы в любой момент времени и составляют три скорости действительных капель. Фокусное расстояние линзы ***F = 60 см***. Рассмотреть только полупространство с одной из сторон линзы. Считать линзу вертикальной.

Решение:

Одна из таких капель (1) находится в промежутке от 0 до F, а вторая (2) от F до 2F.

Для первой:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_1}{h}=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{d_1-F} \quad \Rightarrow \quad H_1=\frac{Fh}{d_1-F}$$

Ее скорость $u_1=\frac{dH_1}{dt}=\frac{Fv}{d_1-F}=3v \quad \Rightarrow \quad d_1=\frac{4}{3}F$

Для второй:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_2}{h}=\frac{f_2}{d_2}=\frac{F}{F-d_2} \quad \Rightarrow \quad H_2=\frac{Fh}{F-d_2}$$

Ее скорость $u_2=\frac{dH_2}{dt}=\frac{Fv}{F-d_2}=3v \quad \Rightarrow \quad d_2=\frac{2}{3}F$

Следовательно расстояние между ними:

$$S=d_2-d_1=\frac{2}{3}F=40\ см$$

Критерии оценивания

0,25	Записаны формулы тонкой линзы для двух случаев.
0,5	Составлено уравнение для нахождения скорости изображения капель.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. В разреженном воздушном пространстве начинает подниматься тонкий двухслойный горизонтальный лист из алюминиевой фольги. Найдите массу листа, если температура нижней поверхности листа 125^0C; температура верхней поверхности 0^0C; температура окружающего воздуха 25^0C; давление воздуха 0,5 Па; площадь поверхности диска 1 см^2.

Решение:

ЗИИ: $F=\frac{Nm_0(v_{н\,y}-v_{в\,y})}{\Delta t}=\frac{1}{6}\frac{Nm_0(v_н-v_в)}{\Delta t}$

N – число молекул ударяющихся о поверхность листа;

m_0 – масса одной молекулы воздуха;

m – масса листа;

μ – молярная масса воздуха;

Δt – время взаимодействия;

S – площадь листа.

Среднеквадратичные скорости молекул, отскакивающих от нижней и верхней граней листа $v_в$ и $v_н$;

Среднеквадратичная скорость налетающих молекул v:

$$\begin{cases} v_в = \sqrt{\dfrac{3RT_в}{\mu}} \\ v_н = \sqrt{\dfrac{3RT_н}{\mu}} \\ v = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} \end{cases}$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона для воздуха:

$$pV = pSy = pSv_y \Delta t = \frac{Nm_0}{\mu} RT$$

Условие равновесия:

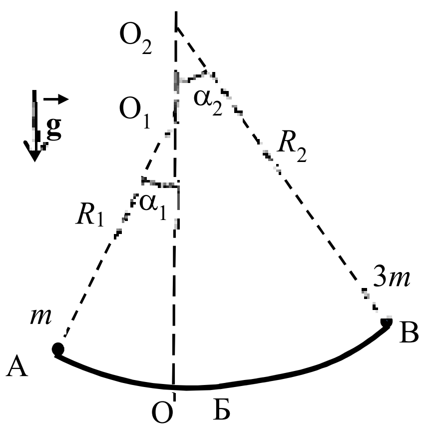
$$F = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}\frac{Nm_0(v_н - v_в)}{\Delta t} = \frac{1}{6} pS\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}\left(\sqrt{\frac{3RT_н}{\mu}} - \sqrt{\frac{3RT_в}{\mu}}\right) = mg \quad \Rightarrow$$

$$m = \frac{1}{2} pS \frac{\sqrt{T_н} - \sqrt{T_в}}{g\sqrt{T}} = 0,496\, г$$

Критерии оценивания

0,25	Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для воздуха, условие равновесия для диска (листа).
0,5	Записан ЗИИ импульса для молекул воздуха и диска, введены средние-квадратичные скорости молекул.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Два точечных тела, массы которых m и $3m$ одновременно начинают движение из точек А и В, соответственно, навстречу друг другу по двум гладким цилиндрическим склонам и упруго соударяются в точке Б. Траектории точек в вертикальном сечении – это дуги окружностей АБ и ВБ, радиусы которых R_1 и R_2. Известно, что центры этих окружностей лежат на одной вертикальной линии. Начальные положения точечных тел заданы углами α_1 и α_2. Найдите время движения каждого из тел до точки Б. Принять $g \approx \pi^2$ м/с^2, $R_2 = 4R_1 = 64$ м, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.05$ рад, длина дуги АБ больше длины дуги АО. Ответ указать в секундах, округлив до десятых.



Решение Движение точки по дуге окружности аналогично движению математического маятника.

Угловые координаты тел $\alpha_A = \alpha_1 cos(\omega_1 t)$, $\alpha_B = \alpha_2 cos(\omega_2 t)$, $\omega_1 = \sqrt{g/R_1}$, $\omega_2 = \sqrt{g/R_2}$.

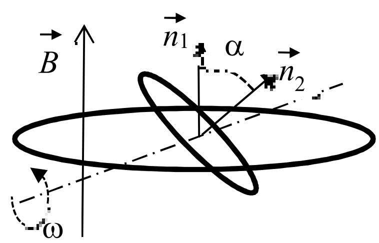
Положение точки Б задаём углом $\alpha_Б$, тогда в момент встречи тел $\alpha_A = -\alpha_Б$, $\alpha_B = \alpha_2 - \alpha_Б$, т.е. $-\alpha_Б = \alpha_1 \cos(\omega_1 t)$, $\alpha_2 - \alpha_Б = \alpha_2 \cos(\omega_2 t)$, откуда $\alpha_2 + \alpha_1 \cos(\omega_1 t) = \alpha_2 \cos(\omega_2 t)$, и т.к. $\omega_1 = 2\omega_2$, то $1 + \cos(2\omega_2 t) = \cos(\omega_2 t)$ или $1 + 2\cos^2(\omega_2 t) - 1 = \cos(\omega_2 t)$. Поэтому $2\cos^2(\omega_2 t) = \cos(\omega_2 t)$ и $\cos(\omega_2 t) = \dfrac{1}{2}$, $t = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{R_2}{g}}$

Ответ: $t = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{R_2}{g}}$

Критерии оценивания

0,25	Записаны циклические частоты колебаний тел с необходимыми пояснениями.
0,5	Записаны уравнения движения точек с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6. Два проводника, имеющие форму плоских колец, радиусы которых $R > r$, соединены последовательно. Центры колец совпадают. Кольца вращаются в однородном магнитном поле с постоянной одинаковой угловой скоростью вокруг общей оси, лежащей в плоскости колец и проходящей через их центры. Угол между нормалями к плоскостям колец равен α. Отношение радиусов колец равно $R/r = 3$. Найдите отношение максимальной суммарной ЭДС индукции в проводниках для значения угла $\alpha_1 = \pi/4$ к максимальной суммарной ЭДС индукции в проводниках для значения угла $\alpha_2 = 3\pi/4$. Взаимным влиянием токов колец и излучением пренебречь. Численный ответ округлить до десятых.



Решение:

Магнитные потоки через площадку каждого из колец $\Phi_1 = BS_1 \cos(\omega t)$,
$\Phi_2 = BS_2 \cos(\omega t + \alpha)$

ЭДС индукции в каждом из проводников $\mathcal{E}_1 = \omega BS_1 \sin(\omega t)$, $\mathcal{E}_2 = \omega BS_2 \sin(\omega t + \alpha)$.

Суммарная ЭДС для последовательно соединенных проводников
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \omega BS_1 \sin(\omega t) + \omega BS_2 \sin(\omega t + \alpha) = \omega B\left(S_1 \sin(\omega t) + S_2 \sin(\omega t)\cos(\alpha) + S_2 \cos(\omega t)\sin(\alpha)\right)$$

С другой стороны $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_{max} \sin(\omega t)\cos(\varphi) + \mathcal{E}_{max} \cos(\omega t)\sin(\varphi)$

поэтому получаем соотношения $\mathcal{E}_{max} \cos(\varphi) = \omega B\left(S_1 + S_2 \cos(\alpha)\right)$, $\mathcal{E}_{max} \sin(\varphi) = \omega BS_2 \sin(\alpha)$.

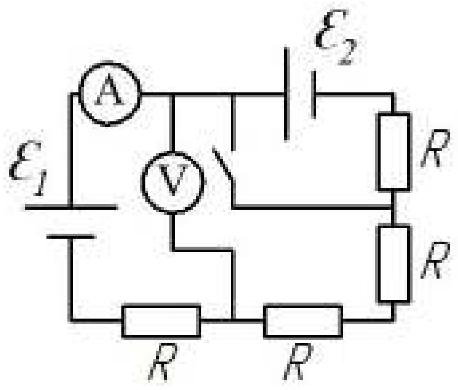
Амплитуда суммарной ЭДС
$$\mathcal{E}_{max} = \omega B\sqrt{\left(S_1 + S_2 \cos(\alpha)\right)^2 + \left(S_2 \sin(\alpha)\right)^2} = \omega B\sqrt{S_1^2 + 2S_1 S_2 \cos(\alpha) + S_2^2}$$

$$\frac{E_{max\_1}}{E_{max\_2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\frac{R}{r}cos(\alpha_1) + 1}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\frac{R}{r}cos(\alpha_2) + 1}} = \frac{\sqrt{10+3\sqrt{2}}}{\sqrt{10-3\sqrt{2}}} \approx 1.6$$

Критерии оценивания

0,25	Получены выражения для магнитных потоков и ЭДС в каждом из проводников.
0,5	Получено выражение амплитуды суммарной ЭДС.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. Определить показания приборов (считать идеальными) при замкнутом и разомкнутом положении выключателя. Если $\varepsilon_1 = 90$ В, $\varepsilon_2 = 50$ В, $R = 10$ Ом, внутренним сопротивлением источников пренебречь.



Решение:

1) Ключ разомкнут

Показания амперметра: $I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4R} = \frac{90-50}{4 \cdot 10} = 1$ А

Показания вольтметра: $U = \varepsilon_1 - IR = 90 - 10 \cdot 1 = 80$ В

2) Ключ замкнут

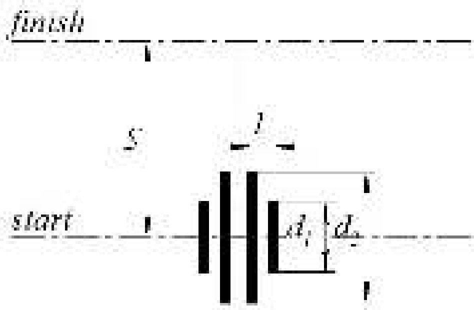
Показания амперметра: $I = \frac{\varepsilon_1}{3R} = \frac{90}{3 \cdot 10} = 3$ А

Показания вольтметра: $U = \varepsilon_1 - IR = 90 - 10 \cdot 3 = 60$ В

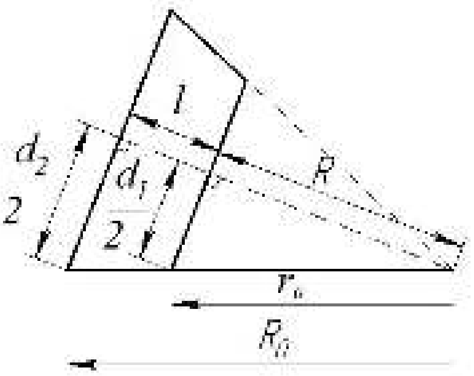
Критерии оценивания

0,25	Найдены показания амперметров при разомкнутом и замкнутом ключе.
0,5	Найдены показания вольтметров при разомкнутом и замкнутом ключе.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. У двух друзей был один игрушечный трактор на двоих. Они его разобрали и запчасти поделили поровну, собрав идентичные модели. Свои модели запустили перпендикулярно линии старта и увидели, что они разъехались в разные стороны. Найдите расстояние между моделями в момент, когда они поравнялись с линией финиша. Известно, что колеса трактора были тонкие и разных диаметров ***d_1 = 10 см*** и ***d_2 = 12 см***. Ребята использовали для соединения колёс жесткие оси ***l = 3 см***. Расстояние от линии старта до линии финиша ***S = 10 см***. Поверхность, по которой друзья запускали модели принять горизонтальной, а линии старта и финиша параллельными. Движение колёс без проскальзывания.



Решение:



В отсутствии проскальзывания, движение системы колес можно рассматривать, как движение конуса вокруг его вершины.

Пусть угловая скорость вращения ω, тогда линейные скорости вращения колес различны:

$v_1 = \omega \dfrac{d_1}{2}$

$v_2 = \omega \dfrac{d_2}{2}$

Пусть радиус поворота R, тогда:

$v_1 = \Omega R$

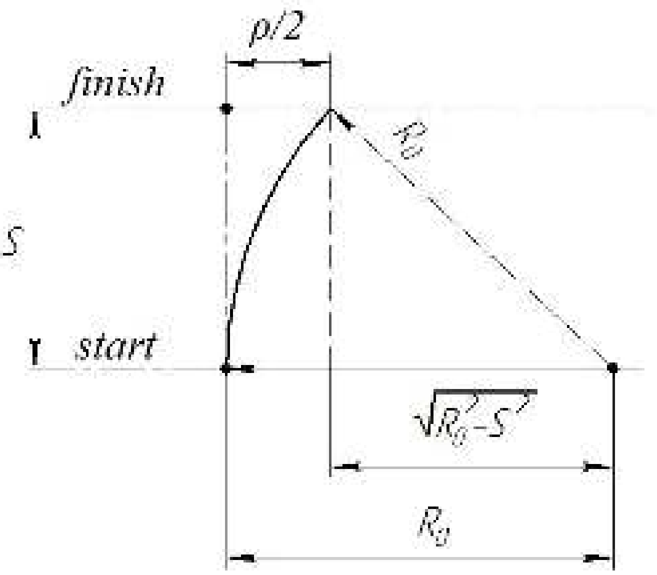
$v_2 = \Omega (R + l)$

Получается $R = \frac{l\, d_1}{d_2 - d_1}$ = 15 см и $R + l = \frac{l\, d_1}{d_2 - d_1} + l$ = 18 см

Следовательно,

$$R_0 = \sqrt{\left(R+l\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 6\sqrt{10}\ см$$

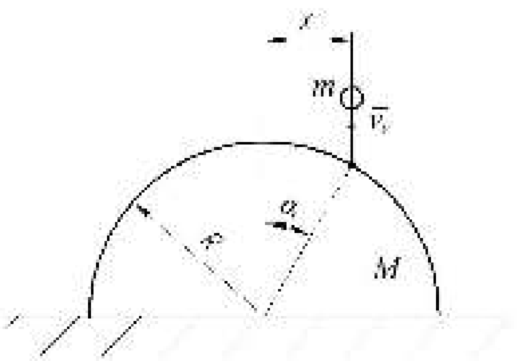
$$\rho = 2\left(R_0 - \sqrt{R_0^2 - S^2}\right) \approx 2 \cdot 2{,}84915\ см = 5{,}7\ см$$



Критерии оценивания

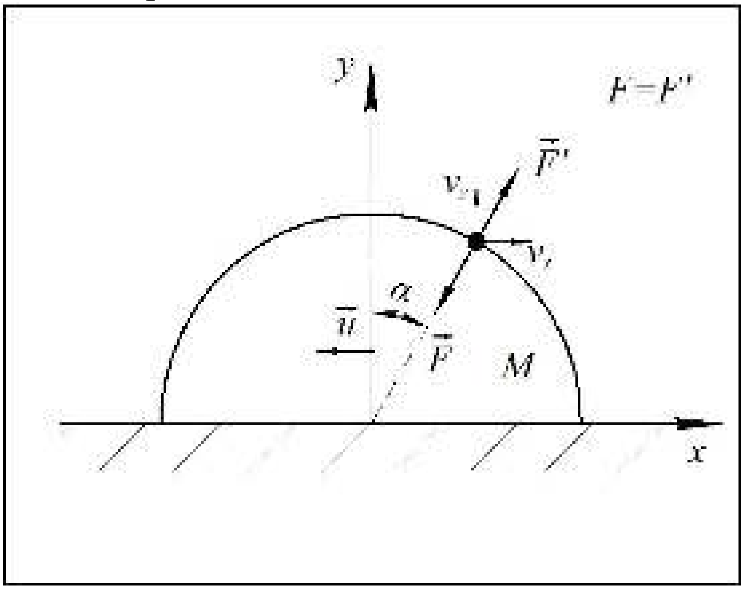
0,25	Записаны связи линейных и угловых скоростей.
0,5	Найден радиус кривизны траектории системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. Маленький шарик, массой ***m*** падает вертикально на гладкую незакреплённую полусферу массой ***M*** и радиуса ***R***. Место удара показано на рисунке смещением x от вертикальной оси. Удар абсолютно упругий. Определите скорость полусферы после удара. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна $\boldsymbol{v_0}$. Трением между полусферой и горизонтальной поверхностью пренебречь.



Решение:

Запишем законы сохранения импульса и энергии.



v – скорость шарика после удара

u - скорость полусферы после удара

F и F' – силы взаимодействия

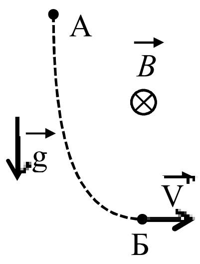
$$\begin{cases} mv_y + mv_0 = F' \cos\alpha \triangle t \\ mv_x = F' \sin\alpha \triangle t \\ Mu = F \sin\alpha \triangle t \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \dfrac{Mu^2}{2} \\ F' = F \end{cases} \Rightarrow \quad u$$

$$= \frac{v_0 \sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2\alpha} = \frac{v_0 x\sqrt{R^2 - x^2}}{\frac{M}{m} R^2 + x^2}$$

Критерии оценивания

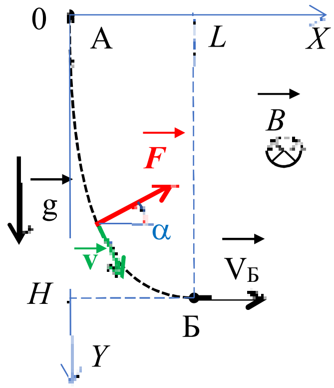
0,25	Записан ЗИИ для шарика и полусферы.
0,5	Записан ЗСЭ для системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. Частица массы ***m*** с электрическим зарядом ***q*** начала двигаться вниз из состояния покоя (точка А) под действием силы тяжести в однородном горизонтальном магнитном поле индукции ***B***. Сместившись вниз и по горизонтали, она оказалась в точке Б, где вектор её скорости в первый раз стал направлен горизонтально. На какое расстояние по вертикали сместилась частица, оказавшись точке Б? Излучением пренебречь.



Решение:

На частицу действуют две силы: сила тяжести *mg* и магнитная сила Лоренца $F_M = qvB$.



Второй закон Ньютона в проекции на координатные оси в какой-то момент времени $ma_X = qvB \cdot cos\alpha$, $ma_Y = mg - qvB \cdot sin\alpha$, но вектор скорости частицы в проекциях на координатные оси можно записать в виде $v_X = v \cdot sin\alpha$, $v_Y = v \cdot cos\alpha$. Поэтому $ma_X = qBv_Y$ или, для любого малого промежутка времени, $m\frac{\Delta V_X}{\Delta t} = qB\frac{\Delta Y}{\Delta t}$. После сокращения на Δt, получаем равенство, которое выполняется для любого промежутка времени $m \cdot \Delta V_X = qB \cdot \Delta Y$.

В точке Б: $\Delta V_X = V$, $\Delta Y = H$, поэтому $mV = qBH$, но работу совершает только сила тяжести, т.е. $\frac{mV^2}{2} = mgH$, откуда

$$H = 2g\left(\frac{m}{qB}\right)^2,$$

Критерии оценивания

0,25	Получены выражения второго закона Ньютона вдоль координатных осей.
0,5	Получены выражения связи скорости и расстояния из уравнения движения и работы силы тяжести.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Небольшой предмет высоты ***h*** расположен на главной оптической оси, движущейся со скоростью ***v*** собирающей линзы с фокусным расстоянием ***F***. В некоторый момент времени ***t = 0*** высота действительного изображения предмета начала увеличиваться. Найти скорость изменения высоты изображения в момент, когда высота изображения увеличится на треть.

Решение:

Перейдем в СО, связанную с линзой. Тогда предмет удаляется от линзы со скоростью ***v***. Получим: $d = 2F - vt$

По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$

Отношение высот изображения и предмета: $\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$

Скорость изменения высоты изображения: $u=\frac{dH}{dt}$

Следовательно, получим:

$$u=\frac{dH}{dt}=\frac{hFv}{\left(F-vt\right)^2}$$

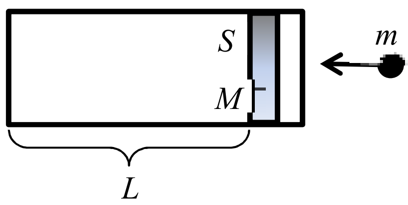
Определим момент времени: $\frac{hF}{F-vt}=\frac{4h}{3} \quad \Rightarrow \quad vt=\frac{F}{4}$

Ответ: $u=\frac{hFv}{\left(F-\frac{F}{4}\right)^2}=\frac{16hv}{9F}$

Критерии оценивания

0,25	Записаны формулы тонкой линзы и увеличения.
0,5	Получено выражения для скорости изображения.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6. Горизонтально расположенный сосуд в форме цилиндра заполнен идеальным газом. С одной стороны сосуд закрыт стенкой, а с другой – подвижным поршнем массы M = 0,9 кг. Площадь сечения сосуда S = 0,1 м^2. Расстояние от поршня до стенки равно L = 1 м. С внешней стороны на поршень налетает со скоростью v_0 = 1 м/с шарик массы m = 0,1 кг и при центральном ударе прилипает к поршню. Найдите амплитуду малых колебаний поршня. Поршень плотно прилегаем к стенкам сосуда. Трения нет. При колебаниях температуру T = 298 К и внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па считать постоянными. Колебания рассматривать как незатухающие. Ответ указать в мм округлив до десятых.



Решение:

В равновесном состоянии поршень неподвижен, поэтому давление газа внутри сосуда равно внешнему давлению p_0. При абсолютно неупругом ударе шарика о поршень сохраняется импульс $mv_0=\left(m+M\right)v_1$. После удара поршень начнёт смещаться внутрь цилиндра. Пусть x - величина смешения поршня, Δp – изменение давления газа внутри цилиндра, тогда для изотермического процесса $\nu RT=p_0LS=\left(p_0+\Delta p\right)\left(L-x\right)S$

Откуда $p_0+\Delta p=\frac{p_0L}{L-x}=\frac{1}{L}\frac{p_0L}{\left(1-x/L\right)}\approx p_0\left(1+x/L\right)$

Второй закон Ньютона в проекции на направление смещения поршня

$(m+M)a_x = p_0S - (p_0 + \Delta p)S$, поэтому $a_x = -\dfrac{p_0Sx}{(m+M)L}$ - уравнение свободных незатухающих колебаний. Циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{p_0S}{(m+M)L}}$.

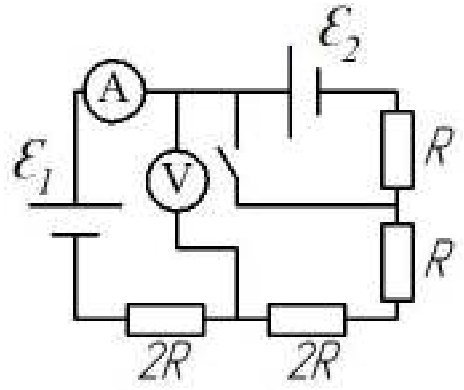
Начальная скорость поршня $v_1 = \dfrac{mv_0}{(m+M)} = \omega_0 A$. Откуда амплитуда колебаний $A = mv_0\sqrt{\dfrac{L}{(m+M)p_0S}}$.

Ответ: A = 1.0 мм.

Критерии оценивания

0,25	Записано уравнение движения поршня с необходимыми пояснениями. Записан закон сохранения импульса.
0,5	Получено уравнений колебаний с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

1. Определить показания приборов (считать идеальными) при замкнутом и разомкнутом положении выключателя. Если $\varepsilon_1 = 210$ В, $\varepsilon_2 = 30$ В, $R = 10$ Ом, внутренним сопротивлением источников пренебречь.



Решение:

1) Ключ разомкнут

Показания амперметра: $I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{6R} = \frac{210-30}{6 \cdot 10} = 3$ А

Показания вольтметра: $U = \varepsilon_1 - IR = 210 - 3 \cdot 2 \cdot 10 = 150$ В

2) Ключ замкнут

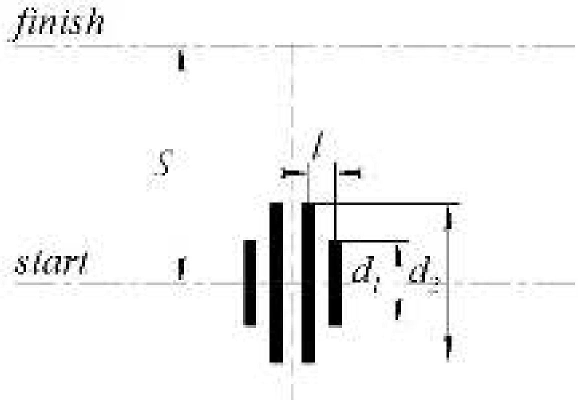
Показания амперметра: $I = \frac{\varepsilon_1}{5R} = \frac{210}{5 \cdot 10} = 4{,}2$ А

Показания вольтметра: $U = \varepsilon_1 - IR = 210 - 4{,}2 \cdot 2 \cdot 10 = 126$ В

Критерии оценивания

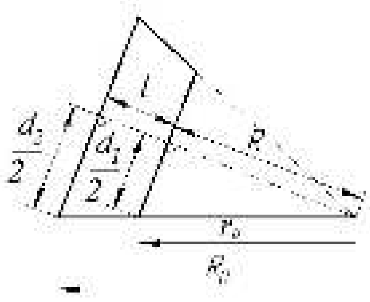
0,25	Найдены показания амперметров при разомкнутом и замкнутом ключе.
0,5	Найдены показания вольтметров при разомкнутом и замкнутом ключе.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

2. У двух друзей был один игрушечный трактор на двоих. Они его разобрали и запчасти поделили поровну, собрав идентичные модели. Свои модели запустили перпендикулярно линии старта и увидели, что они разъехались в разные стороны. Найдите расстояние от линии старта до линии финиша, если расстояние между моделями в момент, когда они поравнялись с линией финиша рано $\boldsymbol{\rho = 3}$ ***см***. Известно, что колеса трактора были тонкие и разных диаметров $\boldsymbol{d_1 = 10}$ ***см*** и $\boldsymbol{d_2 = 12}$ ***см***. Ребята использовали для соединения колёс жесткие оси $\boldsymbol{l = 3}$ ***см***. Поверхность, по которой друзья запускали модели принять горизонтальной, а линии старта и финиша параллельными. Движение колёс без проскальзывания.



Решение:

Пусть угловая скорость вращения каждой модели ω, тогда линейные скорости вращения колес различны:



$v_1 = \omega\frac{d_1}{2}$

$v_2 = \omega\frac{d_2}{2}$

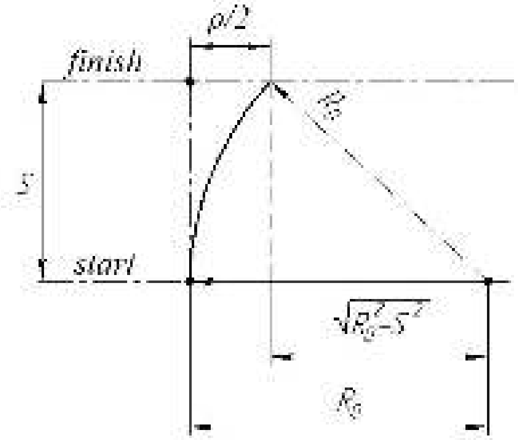
Пусть радиус поворота R, тогда:

$v_1 = \Omega R$

$v_2 = \Omega(R + l)$

Получается $R = \frac{l\,d_1}{d_2 - d_1}$ = 15 см и $R + l = \frac{l\,d_1}{d_2 - d_1} + l$ = 18 см

Следовательно,



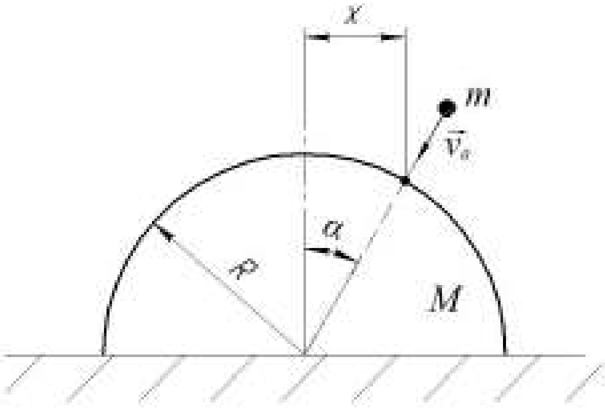
$$R_0 = \sqrt{(R+l)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 6\sqrt{10}\ см$$

$$\rho = R_0 - \sqrt{R_0^2 - S^2} \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{R_0^2 - \left(R_0 - \frac{\rho}{2}\right)^2} \approx 7.39\ см$$

Критерии оценивания

0,25	Записаны связи линейных и угловых скоростей.
0,5	Найден радиус кривизны траектории системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

3. Маленький шарик, массой m налетает на гладкую незакреплённую полусферу массой ***M*** и радиуса ***R***. Место удара показано на рисунке смещением ***x*** от вертикальной оси. Удар абсолютно упругий. Определите скорость полусферы после удара. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна ***v₀***. Трением между полусферой и горизонтальной поверхностью пренебречь.



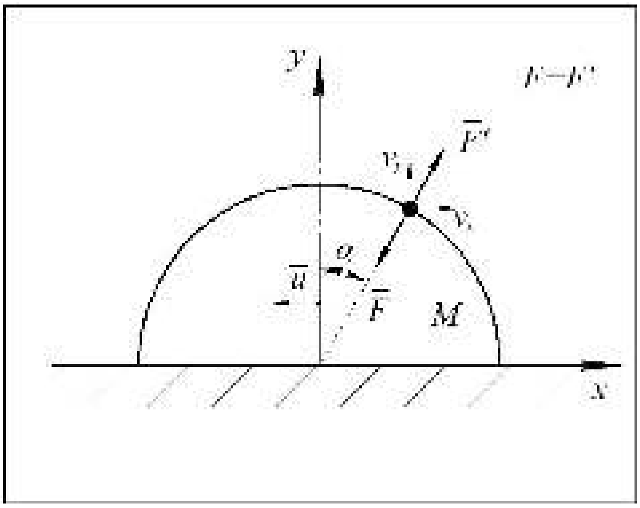
Решение:

Запишем законы сохранения импульса и энергии.

v – скорость шарика после удара

u - скорость полусферы после удара

F и F’ – силы взаимодействия

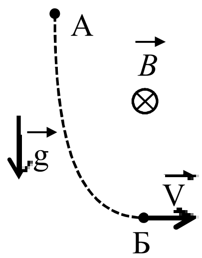


$$
\begin{cases}
mv_y + mv_0 \cos\alpha = F' \cos\alpha \Delta t \\
mv_x + mv_0 \sin\alpha = F' \sin\alpha \Delta t \\
\quad Mu = F \sin\alpha \Delta t \\
\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \dfrac{Mu^2}{2} \\
F' = F
\end{cases}
\Rightarrow \quad u = \frac{2v_0 \sin\alpha}{\dfrac{M}{m\sin^2\alpha} + 1} = \frac{2v_0 x}{\dfrac{MR^3}{mx^2} + 1}
$$

Критерии оценивания

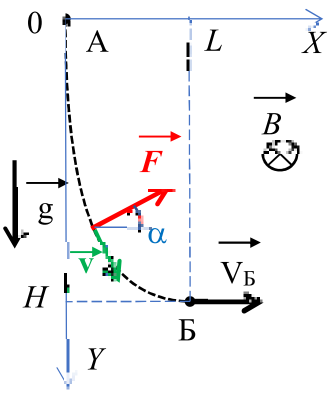
0,25	Записан ЗИИ для шарика и полусферы.
0,5	Записан ЗСЭ для системы.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

4. Частица массы ***m*** с электрическим зарядом ***q*** начала двигаться вниз из состояния покоя (точка А) под действием силы тяжести в однородном горизонтальном магнитном поле. Сместившись на величину ***H*** вниз и на некоторое расстояние по горизонтали она оказалась в точке Б, где вектор её скорости в первый раз стал направлен горизонтально. Чему равна величина индукции магнитного поля ***B***? Излучением пренебречь.



Решение

На частицу действуют две силы: сила тяжести mg и магнитная сила Лоренца $F_M = qvB$.



Второй закон Ньютона в проекции на координатные оси в какой-то момент времени $ma_X = qvB \cdot \cos\alpha$, $ma_Y = mg - qvB \cdot \sin\alpha$, но вектор скорости частицы в проекциях на координатные оси можно записать в виде $v_X = v \cdot \sin\alpha$, $v_Y = v \cdot \cos\alpha$. Поэтому $ma_X = qBv_Y$ или, для любого малого промежутка времени, $m\frac{\Delta V_X}{\Delta t} = qB\frac{\Delta Y}{\Delta t}$.

После сокращения на Δt, получаем равенство, которое выполняется для любого промежутка времени $m \cdot \Delta V_X = qB \cdot \Delta Y$.

В точке Б: $\Delta V_X = V$, $\Delta Y = H$, поэтому $mV = qBH$, но работу совершает только сила тяжести, т.е. $\frac{mV^2}{2} = mgH$, откуда

$$B = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2g}{H}}.$$

Критерии оценивания

0,25	Получены выражения второго закона Ньютона вдоль координатных осей.
0,5	Получены выражения связи скорости и расстояния из уравнения движения и работы силы тяжести.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

5. Небольшой предмет высоты ***h*** расположен на главной оптической оси, движущейся со скоростью ***v*** собирающей линзы с фокусным расстоянием ***F***. В некоторый момент времени ***t = 0*** высота действительного изображения предмета начала уменьшаться. Найти скорость изменения высоты изображения в момент, когда высота изображения уменьшится в два раза.

Решение:

Перейдем в СО, связанную с линзой. Тогда предмет удаляется от линзы со скоростью ***v***. Получим: $d = 2F + vt$

По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$

Отношение высот изображения и предмета: $\frac{H}{h} = \frac{f}{d}$

Скорость изменения высоты изображения: $u = \frac{dH}{dt}$

Следовательно, получим:

$$u = \frac{dH}{dt} = \frac{-hFv}{(F + vt)^2}$$

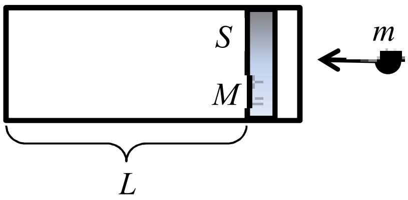
Определим момент времени: $\frac{hF}{F + vt} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad vt = F$

Ответ: $u=\frac{-hFv}{\left(F+F\right)^2}=\frac{-hv}{4F}$

Критерии оценивания

0,25	Записаны формулы тонкой линзы и увеличения.
0,5	Получено выражения для скорости изображения.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу.
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.

6. Горизонтально расположенный сосуд в форме цилиндра заполнен идеальным газом. С одной стороны сосуд закрыт стенкой, а с другой – подвижным поршнем массы M = 0,8 кг. Площадь сечения сосуда S = 0,1 м^2. Расстояние от поршня до стенки равно $L = 1$ м. С внешней стороны на поршень налетает со скоростью $v_0 = 1$ м/с шарик массы m = 0,2 кг и при центральном ударе прилипает к поршню. Найдите амплитуду малых колебаний поршня. Поршень плотно прилегаем к стенкам сосуда. Трения нет. При колебаниях температуру Т = 293 К и внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па считать постоянными. Колебания рассматривать как незатухающие. Ответ указать в мм округлив до десятых.



Решение.

В равновесном состоянии поршень неподвижен, поэтому давление газа внутри сосуда равно внешнему давлению p_0. При абсолютно неупругом ударе шарика о поршень сохраняется импульс $mv_0=\left(m+M\right)v_1$. После удара поршень начнёт смещаться внутрь цилиндра. Пусть x - величина смешения поршня, Δp – изменение давления газа внутри цилиндра, тогда для изотермического процесса $\nu RT=p_0LS=\left(p_0+\Delta p\right)\left(L-x\right)S$

Откуда $p_0+\Delta p=\frac{p_0L}{L-x}=\frac{1}{L}\frac{p_0L}{\left(1-x/L\right)}\approx p_0\left(1+x/L\right)$

Второй закон Ньютона в проекции на направление смещения поршня $\left(m+M\right)a_x=p_0S-\left(p_0+\Delta p\right)S$, поэтому $a_x=-\frac{p_0Sx}{\left(m+M\right)L}$ - уравнение свободных незатухающих колебаний. Циклическая частота колебаний $\omega_0=\sqrt{\frac{p_0S}{\left(m+M\right)L}}$.

Начальная скорость поршня $v_1=\frac{mv_0}{\left(m+M\right)}=\omega_0A$. Откуда амплитуда колебаний

$A=mv_0\sqrt{\frac{L}{\left(m+M\right)p_0S}}$.

Ответ: A = 2.0 мм.

Критерии оценивания

0,25	Записано уравнение движения поршня с необходимыми пояснениями.

	Записан закон сохранения импульса.
0,5	Получено уравнений колебаний с необходимыми пояснениями.
0,75	Приведено решение с необходимыми пояснениями, но при решении допущены ошибки, приводящие к неправильному ответу
1,0	Приведено правильное решение с необходимыми пояснениями.