

Задание 1 (5 баллов). Упростить

$$\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } x = 4(a-1), 1 < a < 2.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое, выделив квадрат суммы в подкоренном выражении первого слагаемого и квадрат разности в подкоренном выражении второго слагаемого:

$$\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}}} = \frac{1}{\sqrt{(a-1) + 2\sqrt{a-1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a-1} + 1},$$

$$\left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}} = \frac{1}{\sqrt{(a-1) - 2\sqrt{a-1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1} - 1)^2}} = \frac{1}{|\sqrt{a-1} - 1|}.$$

Так как $1 < a < 2$, то $\frac{1}{|\sqrt{a-1} - 1|} = \frac{1}{1 - \sqrt{a-1}}.$

Тогда получим: $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{a-1}} + \frac{1}{1 - \sqrt{a-1}} = \frac{2}{2-a}.$

Ответ. $\frac{2}{2-a}.$

Задание 2 (10 баллов). Вероятность того, что новый насос для добывающей скважины выйдет из строя в течение года после установки, равна 0,3. Если насос проработал несколько лет, то вероятность выхода его из строя в течение следующего года такая же (вероятность его поломки не растёт со временем). Найти вероятность, что насос прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Решение. Случайные события $A = \{\text{насос проработал 1 год}\}$ и $B = \{\text{насос проработал 2 года}\}$ являются не совместными. Тогда:

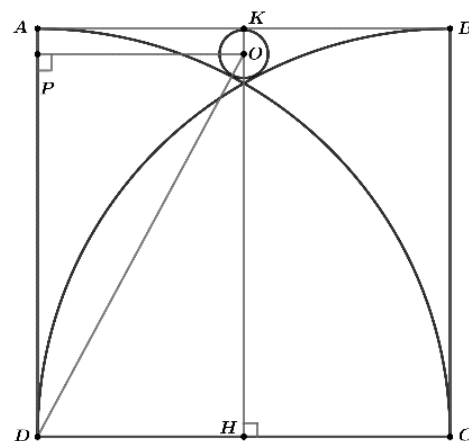
$$P(A) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21, \quad P(B) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147.$$

Случайное событие $C = \{\text{насос проработал больше года, но не больше трех лет}\}$ имеет вероятность: $P(C) = P(A) + P(B) = 0,21 + 0,147 = 0,357$, так как события A и B – несовместны.

Ответ. 0,357.

Задание 3 (15 баллов). Для изготовления круглых изделий используется пресс-форма, имеющая форму квадрата со стороной 8 м. Определить радиус круглого изделия, касающегося одной из сторон пресс-формы и внешним образом металлических дуг радиуса 8 м с центрами в соседних вершинах формы.

Решение. Пусть r – радиус круглого изделия, O – его центр. Из условия внешнего касания $OD = OC = 8 + r$. В равнобедренном треугольнике COD проведем высоту $OH \perp DC$. Тогда $DH = HC = 4$, $OH \parallel AD$. Обозначим точку $K = OH \cap AB$. Так как $AB \parallel CD$, $KH \parallel AD$, то $AK = DH = 4$ и $KH \perp AB$. Таким образом, $OK \perp AB \Rightarrow K$ – точка касания круглого изделия с центром в точке O и стороны AB , то есть $OK = r$.



Проведем $OP \perp AD$. Четырехугольник $AKOP$ – прямоугольник, $AP = OK = r$, $PO = AK = 4$. Тогда имеем $PD = 8 - r$. Из прямоугольного треугольника OPD получим $OD^2 = PD^2 + PO^2$, $(8+r)^2 = (8-r)^2 + 16 \Rightarrow r = 0,5$.

Ответ. 0,5.

Задание 4 (20 баллов). Для проведения ремонтных работ на технологическом оборудовании было выполнено постепенное снижение давления газа путем стравливания газа через свечу сброса. Изменение давления x (кПа) по времени t (сек.) определяется в виде последовательности $\{x_t\}$, считая время $t \in \mathbb{N}$ через натуральное значение, со следующими условиями: $x_1 = 1200$ кПа, $x_2 = 600$ кПа, где $x_{t+2} = x_t - \frac{40000}{x_{t+1}}$. Найти время t снижения давления газа до 0 кПа.

Решение.

Преобразуем исходное выражение $x_{t+2} = x_t - \frac{40000}{x_{t+1}} \Rightarrow x_{t+2} \cdot x_{t+1} = x_{t+1} \cdot x_t - 40000$.

Обозначив за $y_t = x_{t+1} \cdot x_t$, получим выражение $y_{t+1} = y_t - 40000$, то есть последовательность $\{y_t\}$ – арифметическая прогрессия с разностью $d = -40000$ и первым членом $y_1 = x_2 \cdot x_1 = 1200 \cdot 600 = 720000$.

Тогда для искомого n : $y_n = 0$.

Следовательно, $y_n = y_1 + d(n-1) = 720000 - 40000(n-1) = 760000 - 40000n = 0$ при $n = \frac{760000}{40000} = 19$, то есть при $t = 19$ будет $y_{19} = 0$.

Вернемся к исходной последовательности: $x_{20} \cdot x_{19} = 0$, откуда $x_{20} = 0$ (если бы $x_{19} = 0$, то x_{20} не существовал, так как по условию задачи $x_{20} = x_{18} - \frac{40000}{x_{19}}$). Итак, получим время снижения давления газа до 0 кПа – 20 сек.

Ответ. 20 сек.

Задание 5 (20 баллов). Решить неравенство

$$x + \sqrt{\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \operatorname{tg} 2025^\circ} \leq \sqrt{20} - \left(\sqrt{\sqrt{5} + 1} - \sqrt{\sqrt{5} - 1} \right)^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} x + \sqrt{\sqrt{(x+3)^2 - 1}} &\leq \sqrt{20} - \left(\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} + \sqrt{5} - 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + \sqrt{|x+3| - 1} &\leq 2\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{4} + \sqrt{5} - 1) \Rightarrow x + \sqrt{|x+3| - 1} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{|x+3| - 1} \leq 4 - x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x+3-1| \geq 0; \\ 4-x \geq 0; \\ |x+3|-1 \leq (4-x)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3| \geq 1; \\ x \leq 4; \\ |x+3|-1 \leq 16-8x+x^2. \end{cases} \begin{cases} |x+3| \geq 1; \\ x \leq 4; \\ |x+3| \leq 17-8x+x^2. \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad |x+3| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 1; \\ x+3 \leq -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2; \\ x \leq -4. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty).$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x^2 - 8x + 17 - |x + 3| \geq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0; \\ x^2 - 8x + 17 - (x + 3) \geq 0; \\ x + 3 < 0; \\ x^2 - 8x + 17 + (x + 3) \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3; \\ x^2 - 9x + 14 \geq 0; \\ x < -3; \\ x^2 - 7x + 20 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x \geq -3; \\ x \in (-\infty; 2] \cup [7; +\infty); \\ x < -3; \\ x \in R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3; 2] \cup [7; +\infty); \\ x < -3. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [7; +\infty). \\
 \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty); \\ x \leq 4; \\ x \in (-\infty; 2] \cup [7; +\infty). \end{cases} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty); \\ x \leq 4; \\ x \in (-\infty; 2] \cup [7; +\infty). \end{cases} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 2]
 \end{aligned}$$

Ответ. $(-\infty; -4] \cup [-2; 2]$.

Задание 6 (30 баллов). Найти все значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит ровно два целых числа.

Решение.

$$\begin{aligned}
 y &= \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}} = \\
 &= \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3} + \log_x a^5} + a^x \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a} \cdot a^5 - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a}} = \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}} \cdot (x^{\log_x a^5} - x^{\log_x a^x}) + \sqrt[3]{2a}(a^x - a^5)} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}) \cdot (a^5 - a^x)} \\
 &\quad \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})(a^5 - a^x) \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

При $a \in (0; 1)$ последнее неравенство системы эквивалентно неравенству:

$$(x - 2a)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2a] \cup [5; +\infty) \text{ — не удовлетворяет условию задачи.}$$

При $a = 1$ это неравенство верно для $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ — тоже не подходит.

При $a > 1$ $x \in [2a; 5]$ (или $[5; 2a]$, если $2a > 5$)

Область определения будет содержать ровно 2 целых числа, если

$$\begin{cases} 2a \in (3; 4] \\ 2a \in [6; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (1, 5; 2] \\ a \in [3; 3, 5) \end{cases}$$

Ответ: $a \in (1, 5; 2] \cup [3; 3, 5)$.

Задание 1 (5 баллов). Найти минимальное натуральное $k > 2025$, при котором число

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}}$$

является рациональным.

Решение.

Преобразуем исходное выражение, перемножив каждую дробь на числовое выражение для получения разности кубов в знаменателях дробей:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}^2 + \sqrt[3]{k-1} \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}} = \\ & = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{(k-1) - k} = -(1 - \sqrt[3]{2}) - (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - \dots - (\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}) = \\ & = -1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \dots - \sqrt[3]{k-1} + \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{k} - 1. \end{aligned}$$

Это число будет рациональным, когда k является полным кубом, итак, $k = 13^3 = 2197 > 2025$.

Ответ. 2197.

Задача 2 (10 баллов). Витя и Коля бросают игральную кость до тех пор, пока не выпадет число очков равное 1. У кого выпало 1 очко, тот и победитель. Начинает Коля. Во сколько раз вероятность выигрыша Коли больше вероятности выигрыша Вити?

Решение. Вероятность выпадения 1 очка при бросании игральной кости равна $p = \frac{1}{6}$, а вероятность того, что 1 очко не выпадет, будет равно $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Рассчитаем вероятность того, что Коля выиграет

$P(K) = p + qqr + qqqqr + qqqqqqr + \dots = p + q^2p + (q^2)^2p + (q^2)^3p + \dots$ — это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом p и знаменателем q^2 .

Используя формулу суммы всех членов убывающей геометрической прогрессии, найдем вероятность выигрыша Коли: $P(K) = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{p}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{p}{p(1 + q)} = \frac{1}{1 + q}$.

Тогда вероятность выигрыша Вити равна: $P(B) = 1 - \frac{1}{1 + q} = \frac{1 + q - 1}{1 + q} = \frac{q}{1 + q}$.

Найдем отношение вероятностей: $\frac{P(K)}{P(B)} = \frac{1}{1 + q} : \frac{q}{1 + q} = \frac{1}{q} = \frac{6}{5} = 1,2$.

Ответ. В 1,2 раза.

Задание 3 (15 баллов). В трубопроводе цилиндрической формы установлено скребковое устройство вдоль трубы, предназначенное для очистки внутренней поверхности от парафинистых и смолистых отложений, имеющее форму треугольной призмы. В поперечном сечении трубопровода в виде круглого циферблата с часовой разметкой, вершины треугольника скребкового устройства находятся в точках окружности на часовых отметках «1:30», «4:00» и «5:00». Определить диаметр трубопровода, если площадь сечения скребкового устройства 900 мм^2 .

Решение. Построим сечение трубопровода в виде окружности с часовой разметкой.

Отметим вершины треугольника (сечения скребкового устройства, имеющего форму треугольной призмы) и обозначим их соответственно точками A, B и C . Заметим, что $\triangle ABC$ – вписанный в окружность. Обозначим радиус этой окружности R .

Часовое деление на циферблате соответствует центральному углу 30° . Найдем углы $\triangle ABC$ как вписанные углы в окружность:

$$\angle A = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 75^\circ = 37,5^\circ,$$

$$\text{а } \angle B = \frac{1}{2} \cdot (17 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 255^\circ = 127,5^\circ.$$

Используя формулу для нахождения площади треугольника через радиус описанной окружности и теорему синусов, получим:

$$\begin{cases} S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}, \\ \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R, \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{2R \sin \angle A \cdot 2R \sin \angle B \cdot 2R \sin \angle C}{4R} = 2R^2 \sin 15^\circ \cdot \sin 37,5^\circ \cdot \sin 127,5^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Вычислим: } \sin 127,5^\circ \cdot \sin 37,5^\circ &= \frac{1}{2} \left(\cos(127,5^\circ - 37,5^\circ) - \cos(127,5^\circ + 37,5^\circ) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos 90^\circ - \cos 165^\circ \right) = \frac{1}{2} \left(-\cos(180 - 15^\circ) \right) = \frac{1}{2} \cos 15^\circ. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$S_{\Delta} = 2R^2 \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2} \cos 15^\circ = R^2 \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} R^2, \text{ тогда } \frac{1}{4} R^2 = 900 \Rightarrow R^2 = 3600 \Rightarrow R = 60 \Rightarrow D = 120.$$

Ответ. 120 мм.

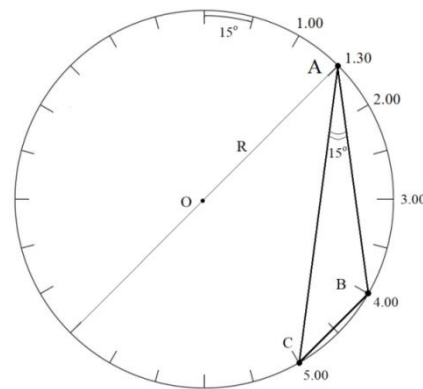
Задание 4 (20 баллов). Группа альпинистов хочет совершить восхождение на айсберг высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья айсберга они могут подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 м/ч, а по навешенной веревке со скоростью 400 м/ч. После отдыха на трассе на айсберге скорость подъема составляет 30 м/ч. За какое минимальное количество дней они смогут достичь вершины, если будут работать на айсберге (включая подъем по навешенной веревке) 6 часов в день?

Решение. Пусть x_n – наибольшая высота, на которую могут подняться альпинисты за n дней ($n=1,2,\dots$). Если к концу какого-то дня они достигли высоты h (м), то на следующий день, при условии ночевки у подножья, они поднимутся на высоту $-h + \left(6 - \frac{h}{400}\right) \cdot 40 = h + 240 - \frac{h}{10}$ (м), а при условии отдыха на айсберге: $h + 6 \cdot 30 = h + 180$ (м). Первый вариант подъема будет выгоднее, если $h + 240 - \frac{h}{10} \geq h + 180 \Rightarrow h \leq 600$ (м), а второй соответственно при $h \geq 600$ (м).

$$\text{Таким образом, получим: } x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 240 - \frac{x_n}{10}, & x_n \leq 600, \\ x_n + 180, & x_n \geq 600. \end{cases}$$

Начиная с $x_0 = 0$, определим последовательно, что $x_4 = 830,4 < 1000$, $x_5 = 1010,4 > 1000$. Следовательно, альпинисты смогут подняться на айсберг к концу 5-го дня, при этом они первые две ночевки проводят внизу, а последние две – на айсберге.

Ответ. 5 дней.



Задача 5 (20 баллов). Решить неравенство

$$\sqrt{3x-7} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geq 3x^2-16x+20.$$

В ответе указать сумму целых решений.

Решение. Сделаем замену $a = \sqrt{3x-7} \geq 0, b = \sqrt{3x^2-13x+13} \geq 0$.

Тогда неравенство примет вид: $a - b \geq b^2 - a^2$ или $(b-a)(b+a+1) \leq 0$.

Так как $b+a+1 > 0$, то неравенство примет вид: $b \leq a$.

$$\sqrt{3x^2-13x+13} \leq \sqrt{3x-7} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-13x+13 \leq 3x-7, \\ 3x^2-13x+13 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-16x+20 \leq 0, \\ 3x^2-13x+13 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [2; 10/3], \\ x \in \left(-\infty; \frac{13-\sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\frac{13+\sqrt{13}}{6}; +\infty\right). \end{cases}$$

Решение неравенства $x \in \left[\frac{13+\sqrt{13}}{6}; \frac{10}{3}\right]$. Целое значение только одно $x = 3$, следовательно,

сумма равна 3.

Ответ. 3.

Задача 6 (30 баллов). Имеется два сплава меди и олова. Первый весит 5 кг и содержит 55 % меди, второй весит 3 кг и содержит 25 % меди. Какого веса надо взять куски этих сплавов, чтобы после их совместной переплавки получить 4 кг сплава, содержащего k % меди?

Решение.

Пусть вес первого сплава x кг, тогда вес второго сплава $(4-x)$ кг. Первый кусок даст в сплав $0,55 \cdot x$ кг меди, а второй кусок даст $0,25 \cdot (4-x)$ кг меди.

В сумме меди окажется $0,55x + 0,25(4-x) = 1 + 0,3x$. Полученная часть должна составлять k % от всего сплава, т. е. $k = \frac{1+0,3x}{4} \cdot 100 = \frac{100+30x}{4}$. Выразим отсюда x : $x = \frac{2k-50}{15}$. Тогда

$$4-x = 4 - \frac{2k-50}{15} = \frac{110-2k}{15}.$$

Используя ограничение по количеству исходных сплавов, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{2k-50}{15} \leq 5, \\ 0 \leq \frac{110-2k}{15} \leq 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 \leq k \leq 62,5, \\ 32,5 \leq k \leq 55. \end{cases} \Rightarrow 32,5 \leq k \leq 55.$$

Таким образом, при $k \in [32,5; 55]$ нужно взять $\frac{2k-50}{15}$ кг первого сплава и $\frac{110-2k}{15}$ кг второго сплава; при $k \in [0; 32,5) \cup (55; 100]$ такой сплав получить невозможно.

Ответ. При $k \in [32,5; 55]$ нужно взять $\frac{2k-50}{15}$ кг первого сплава и $\frac{110-2k}{15}$ кг второго сплава; при $k \in [0; 32,5) \cup (55; 100]$ такой сплав получить невозможно.

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\left(\left| 3\sqrt{2} - \left| \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| \right| + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \right)^2 + \sqrt{0,5(28 + 7\sqrt{7})} \cdot \sqrt{0,5(28 - 7\sqrt{7})}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \left(\left| 3\sqrt{2} - \left| \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| \right| + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \right)^2 = \left(\left| 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \right)^2 = \\ & = \left(\left| 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \right)^2 = \left(\left| \sqrt{3} + \sqrt{2} \right| + \left| \sqrt{3} - \sqrt{2} \right| \right)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12, \\ & \sqrt{0,5(28 + 7\sqrt{7})} \cdot \sqrt{0,5(28 - 7\sqrt{7})} = 0,5 \cdot 7 \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})} = 0,5 \cdot 7 \cdot \sqrt{16 - 7} = 10,5, \\ & \left(\left| 3\sqrt{2} - \left| \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| \right| + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \right)^2 + \sqrt{0,5(28 + 7\sqrt{7})} \cdot \sqrt{0,5(28 - 7\sqrt{7})} = 12 + 10,5 = 22,5 \end{aligned}$$

Ответ. 22.5.

Задание 2 (10 баллов). В спортивных соревнованиях участвовали 4 сборные команды из вузов Санкт-Петербурга и несколько команд из Ленинградской области. Каждая команда играла только один раз с остальными командами. За победу в игре дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. Команды из Ленинградской области набрали в соревнованиях одинаковое количество очков, а сборные команды Санкт-Петербурга вместе набрали 10 очков. Какое наибольшее количество команд из Ленинградской области могло участвовать в соревнованиях?

Решение. Введем обозначения: x – число команд из Ленинградской области, y – число очков, набранных каждой из команд из Ленинградской области. Тогда число очков, набранных всеми командами, равно $xy + 10$. Оно равно числу спортивных соревнований, так как за одно соревнование дают одно очко.

Число проводимых спортивных соревнований найдем по формуле сочетаний без повторов:

$$C_{x+4}^2 = \frac{(x+3)(x+4)}{2} \Rightarrow \frac{(x+3)(x+4)}{2} = xy + 10.$$

Следовательно, $x(x - 2y + 7) = 8$. Так как $x \in \mathbb{N}$, это могут быть только делители числа 8, то есть значения: $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 8$,

Наибольшее значение из них; $x = 8$.

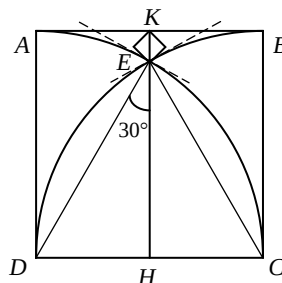
Ответ. 8.

Задание 3 (15 баллов). Для изготовления квадратных изделий используется пресс-форма, имеющая форму квадрата со стороной 8 м. Определить максимальное значение стороны квадратного изделия, одна из вершин которого лежит на стороне пресс-формы, лежащего с внешней стороны от металлических дуг радиуса 8 м с центрами в соседних вершинах формы.

Решение.

Найдем угол между касательными к дугам окружностей в точке их пересечения. Пусть E – точка пересечения дуг, точка H – ее проекция на сторону квадрата CD , точка K – ее проекция на сторону квадрата AB . тогда в $\triangle EDH$ $\angle DEH = 30^\circ$ ($DE = 2DH$). Следовательно, угол между касательными

в точке пересечения дуг окружности составляет 120° . Значит, вершина квадрата, противоположная точке К лежит в точке пересечения дуг – точке Е.
 $HE^2 = DE^2 - DH^2 = 48 \Rightarrow HE = 4\sqrt{3} \Rightarrow KE = 8 - 4\sqrt{3}$ - диагональ квадрата. Тогда сторона квадрата составит $a = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(2 - \sqrt{6})$.



Ответ. $2\sqrt{2}(2 - \sqrt{6})$.

Задание 4 (20 баллов). Найти сумму первых 18 общих членов арифметических прогрессий $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, если $a_{13} = b_{12} = 80$ и $a_{27} = b_{17} = 120$.

Решение.

$$\left. \begin{matrix} a_{19} = 80 \\ a_{27} = 120 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a_{19} = a_1 + 18d = 80 \\ a_{27} = a_1 + 26d = 120 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a_1 + 18d = 80 \\ 8d = 40 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a_1 = -10 \\ d = 5 \end{matrix} \right\}$$

$$\left. \begin{matrix} b_{12} = 80 \\ b_{17} = 120 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_{12} = b_1 + 11p = 80 \\ b_{17} = b_1 + 16p = 120 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_1 + 11p = 80 \\ 5p = 40 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_1 = -8 \\ p = 8 \end{matrix} \right\}$$

Первый общий член прогрессий равен 0, разность прогрессии 40, тогда получим:

$$S_{18} = \frac{2 \cdot 0 + 40 \cdot 17}{2} \cdot 18 = 6120.$$

Ответ. 6120.

Задание 5 (20 баллов). Решить уравнение

$$2\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2 + \cos^{\frac{1}{3}} x = 0.$$

В ответе указать количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

Решение.

$$2\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2 + \cos^{\frac{1}{3}} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^{\frac{1}{3}} x \left(\cos^{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^{\frac{1}{3}} x = 0 \\ \cos x \geq 0, \\ \cos^{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^{\frac{1}{3}} x = 0: \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} - \text{несовместна} \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

$$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow n \in \{0; 1\} - 2 \text{ корня.}$$

Ответ. 2.

Задание 6 (30 баллов). На время командировки инженеру организация выделила сумму командировочных расходов в размере 7600 рублей. В первые дни командировки его ежедневные расходы совпадали с расчетными (из расчета общей выделенной суммы на количество всех дней), а затем увеличились на 100 рублей в день. Известно, что инженер ежедневно тратил целое количество рублей. В командировке инженер вынужден был задержаться на один день. В результате по отчету инженера командировочные расходы оказались на 1200 рублей больше выделенных. Определить наименьшее возможное количество дней пребывания инженера в командировке.

Решение.

Пусть x – количество дней пребывания инженера в командировке, k – количество первых дней командировки:

$$\begin{cases} x > 1, x \in \mathbb{N}; \\ k > 0, k \in \mathbb{N}; \\ k < x. \end{cases}$$

В соответствии с первоначальным планом количество дней командировки должно было длиться $(x-1)$ дней и ежедневно инженер предполагал тратить $\frac{7600}{x-1}$ рублей. Тогда за первые k дней было израсходовано $\frac{7600}{x-1}k$ руб. В течение остальных $(x-k)$ дней он ежедневно расходовал на 100 рублей в день больше, то есть $\frac{7600}{x-1} + 100 = \frac{7500+100x}{x-1}$ руб. Так как за всю командировку было израсходовано на 1200 руб. больше, чем предполагалось, получим уравнение:

$$\frac{7600}{x-1}k + \frac{7500+100x}{x-1}(x-k) = 8800 \Rightarrow \frac{76}{x-1}k + \frac{75+x}{x-1}(x-k) = 88, \text{ где } x, k \in \mathbb{N}, x > k.$$

Полученное уравнение приведем к квадратному: $x^2 - (k+13)x + k - 88 = 0$, имеющему 2 различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(k+13 \pm \sqrt{k^2 + 22k - 183} \right) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{(k+13) \pm \sqrt{(k+11)^2 - 304}}{2}.$$

Значит, уравнение имеет решение, если $(k+11)^2 > 304 \Rightarrow k \geq 7$.

$$\text{Тогда, получим: } x_{1,2} > \frac{(7+13) - \sqrt{(7+11)^2 - 304}}{2} = 10 - \sqrt{5} \Rightarrow x \geq 8.$$

Чтобы выполнялось условие $x \in \mathbb{N}$, $\sqrt{(k+11)^2 - 304}$ должно быть натуральным числом. Это возможно при $k = 12$. Следовательно, $x_{1,2} = \frac{(12+13) \pm \sqrt{(12+11)^2 - 304}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = 5; 20$.

Корень $x = 5$ не удовлетворяет условию $k < x$. Значит, $x = 20$.

Проверим условие, что ежедневные расходы инженера являются целым количеством рублей:
 $\frac{7600}{x-1} = \frac{7600}{19} = 400$ руб.

Итак, $x = 20$ – наименьшее количество дней пребывания инженера в командировке.

Ответ. 20.

Задание 1 (5 баллов). Упростить выражение

$$\frac{27(1-a^{27})}{a^{27}(1+a^{27}+a^{54})} + \frac{9(1-a^9)}{a^{36}(1+a^9+a^{18})} + \frac{3(1-a^3)}{a^{39}(1+a^3+a^6)} + \frac{1-a}{a^{40}(1+a+a^2)} - \frac{1}{a^{40}(1-a)}$$

и найти его значение при $a = \sqrt[108]{100}$.

Решение. Упростим разность двух последних дробей $\frac{1-a}{a^{40}(1+a+a^2)} - \frac{1}{a^{40}(1-a)} = -\frac{3}{a^{39}(1-a^3)}$.

Затем полученную дробь сложим с третьим слагаемым $\frac{3(1-a^3)}{a^{39}(1+a^3+a^6)} - \frac{3}{a^{39}(1-a^3)} = -\frac{9}{a^{36}(1-a^9)}$ и т.д. ^

$$\frac{9(1-a^9)}{a^{36}(1+a^9+a^{18})} - \frac{9}{a^{36}(1-a^9)} = -\frac{27}{a^{27}(1-a^{27})} \Rightarrow \frac{27(1-a^{27})}{a^{27}(1+a^{27}+a^{54})} - \frac{27}{a^{27}(1-a^{27})} = -\frac{81}{1-a^{54}}$$

Подставив вместо a значение $\sqrt[108]{100}$, получим $-\frac{81}{1-\sqrt[108]{100}^{54}} = -\frac{81}{1-10} = 9$.

Ответ. 9.

Задание 2 (10 баллов). Манометр – прибор, который используется для контроля и измерения давления в различных средах. Он предназначен для работы с воздушными и газовыми смесями, способен измерять давление пара, жидкостей. Вероятность того, что при считывании показаний манометра не будет допущена ошибка, равна 0,96. Найти минимальное количество измерений, которое необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше 0,999 можно было ожидать, что хотя бы один результат окажется безошибочным.

Решение. Пусть n – искомое количество измерений. Случайное событие $A = \{\text{хотя бы один результат окажется верным}\}$. Противоположное событие $\bar{A} = \{\text{все результаты неверные}\}$. Тогда имеем:

$$P(\bar{A}) = (1 - 0,96)^n = 0,04^n, \text{ тогда } P(A) = 1 - 0,04^n.$$

По условию задачи $P(A) > 0,999$, следовательно, задача сводится к нахождению минимального целого решения неравенства: $1 - 0,04^n > 0,999$.

$$0,04^n < 0,001 \Rightarrow 0,04^2 = 0,0016 > 0,001; \text{ а } 0,04^3 = 0,000064 < 0,001 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,000064 < 0,001 < 0,0016 \Rightarrow 3 > n > 2.$$

В итоге, минимальное целое решение неравенства $n = 3$.

Ответ. 3.

Задание 3 (15 баллов). В защитном стекле компаса с круговой шкалой в 360° образовался скол в виде треугольника таким образом, что его вершины находятся в отметках в « 0° », « 45° » и « 135° ». Определите диаметр защитного стекла, если известна площадь треугольного скола в 450 мм^2 .

Решение. Рассмотрим защитное стекло компаса в виде окружности со шкалой в 360° . Отметим вершины треугольника (образованного скола треугольной формы) на защитном стекле в отметках « 0° », « 45° » и « 135° », обозначим соответственно буквами A , B и C . Заметим, что получим $\triangle ABC$, вписанный в окружность, пусть радиуса R .

Найдем углы $\triangle ABC$, как вписанные углы окружности:

$$\angle A = \frac{1}{2} \cdot (45^\circ - 0^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cdot (135^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$$

а $\angle B = 180^\circ - 22,5^\circ - 45^\circ = 112,5^\circ$.

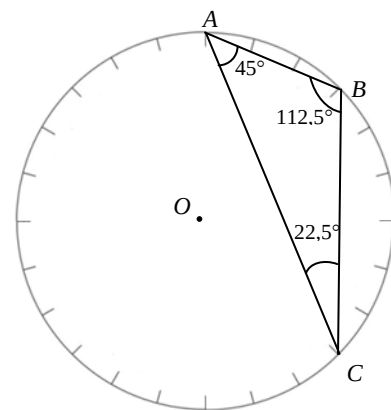
Используя формулу для нахождения площади треугольника через радиус описанной окружности и теорему синусов, получим:

$$\begin{cases} S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}, \\ \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R, \end{cases}$$

$$S_{\triangle} = \frac{2R \sin \angle A \cdot 2R \sin \angle B \cdot 2R \sin \angle C}{4R} = 2R^2 \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 112,5^\circ$$

Вычислив значение $\sin 22,5^\circ \cdot \sin 112,5^\circ = \frac{1}{2} (\cos(112,5^\circ - 22,5^\circ) - \cos(112,5^\circ + 22,5^\circ)) = \frac{1}{2} \sin 45^\circ$,

получим, что: $S_{\triangle} = 2R^2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{R^2}{2}$, тогда $\frac{R^2}{2} = 450 \Rightarrow R^2 = 900 \Rightarrow R = 30 \Rightarrow D = 60$.



Ответ. 60 мм.

Задание 4 (20 баллов). Площадь квадратной заготовки в 100 раз меньше суммы всех трехзначных натуральных чисел, кратных 5 и не кратных 6. Найти наибольшее целое значение стороны квадрата, который можно вырезать из этой заготовки.

Решение. Чтобы найти сторону квадрата с целым значением нужно решить неравенство:

$$n^2 < \frac{S}{100} \Rightarrow 100 \cdot n^2 < S,$$

где S – сумма всех трехзначных натуральных чисел, кратных 5 и не кратных 6.

Трехзначные числа кратные 5 составляют арифметическую прогрессию: 100, 105, 110, 115, 120, ..., 995, включающую $\frac{995-100}{5} + 1 = 180$ членов, и имеющую сумму. $\frac{995+100}{2} \cdot 180 = 98550$.

Трехзначные числа кратные 5 и 6 одновременно так же арифметическая прогрессия: 120, 150, 180, ..., 990, включающую $\frac{990-120}{30} + 1 = 30$ членов, и имеющую сумму. $\frac{990+120}{2} \cdot 30 = 16650$.

Следовательно, $S = 98550 - 16650 = 81900$.

Тогда получим: $100 \cdot n^2 < 81900 \Rightarrow n^2 < 819 \Rightarrow 27 < n < 29 \Rightarrow n = 28$.

Ответ. 28.

Задание 5 (20 баллов). Решить уравнение

$$2(\sqrt[3]{\sin x})^2 + \sin^{\frac{1}{3}} x = 0.$$

В ответе указать количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

Решение.

$$2(\sqrt[3]{\sin x})^2 + \sin^{\frac{1}{3}} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^{\frac{1}{3}} x \left(\sin^{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{\frac{1}{3}} x = 0 \\ \sin x \geq 0, \\ \sin^{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^{\frac{1}{3}} x = 0: \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos^{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} - \text{несовместна} \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow n \in \{0; 1\}$ – 2 корня.

$$\begin{cases} \sin^{\frac{1}{3}} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \sin x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} - \text{несовместна} \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow n \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow 3$

.Ответ. 3.

Задание 6 (30 баллов). Из угольного разреза на обогатительную фабрику, находящуюся на расстоянии 240 км от разреза, выезжает БЕЛАЗ со скоростью 40 км/ч. Одновременно с ним с обогатительной фабрики на угольный разрез с постоянной скоростью v км/ч выезжает автомобиль с инженерной бригадой. Через 0,5 часа после встречи автомобиль, не доезжая до угольного разреза, поворачивает обратно на обогатительную фабрику, двигаясь с прежней скоростью. Определить все значения v , при которых автомобиль вернется на обогатительную фабрику раньше, чем туда прибудет БЕЛАЗ.

Решение. Пусть t (ч) – время движения автомобиля до встречи с БЕЛАЗом. Так как автомобиль с инженерной бригадой и БЕЛАЗ выехали одновременно, то справедливо равенство $40t + vt = 240$ (1). Автомобиль повернул обратно на обогатительную фабрику через $t + \frac{1}{2}$ (ч) и, следовательно, вернулся обратно через $2t + 1$ (ч).

БЕЛАЗ после встречи с автомобилем проехал vt (км) за $\frac{vt}{40}$ (ч). Таким образом, БЕЛАЗу на весь путь от угольного разреза до обогатительной фабрики потребовалось $t + \frac{vt}{40}$ (ч). Для того, чтобы ремонтная бригада вернулась на фабрику раньше БЕЛАЗа, необходимо выполнение неравенства:

$$2t + 1 < t + \frac{vt}{40} \quad (2).$$

По условию, автомобиль повернул обратно, не доехав до угольного разреза, следовательно, учитывая, что путь до встречи с БЕЛАЗом равен vt (км) и после встречи был пройден путь $v \frac{1}{2}$ (км), получим неравенство:

$$\frac{v}{2} < 40t \quad (3).$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 40t + vt = 240, \\ 2t + 1 < t + \frac{vt}{40}, \\ \frac{v}{2} < 40t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{240}{v + 40}, \\ 40 + \frac{40}{t} < v, \\ v < 80t. \end{cases} \Rightarrow 56 < v < 120.$$

Ответ: $56 < v < 120$.