

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{5\sqrt{5} - 15a + 3\sqrt{5}a^2 - a^3}{(\sqrt{5} - a)^2} \text{ при } a = \sqrt{5} - 8.$$

Решение.

$$\frac{5\sqrt{5} - 15a + 3\sqrt{5}a^2 - a^3}{(\sqrt{5} - a)^2} = \frac{(\sqrt{5} - a)^3}{(\sqrt{5} - a)^2} = (\sqrt{5} - a) \Big|_{a=\sqrt{5}-8} = 8.$$

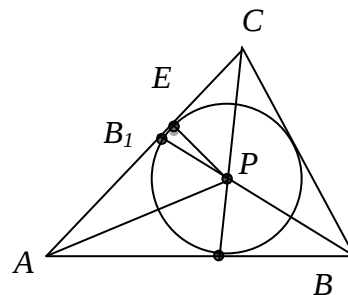
Ответ. 8.

Задание 2 (10 баллов). Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается стороны AC в точке E ($AE=8$). Найти радиус этой окружности, если $AP=10$.

Решение. Изобразим треугольник и вписанную в него окружность. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис. Поэтому AP – часть биссектрисы. E – точка касания, поэтому EP перпендикулярно AC , следовательно, треугольник AEP прямоугольный.

Применим теорему Пифагора:

$$AE^2 + EP^2 = AP^2 \Rightarrow EP = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$



Ответ. 6.

Задание 3 (15 баллов). Гарри Поттер вышел из Хогвартса вслед за Роном Уизли спустя 1 час. Скорость Гарри 5 км/ч, а скорость Рона 4 км/ч. В Хогсмит они прибыли одновременно. Сова Букля вылетает в одно время с Гарри и летит к Рону, догнав его, возвращается к Гарри. Далее продолжает летать между мальчиками, скорость Букли 6 км/ч. Сколько километров пролетела Букля?

Решение.

Так как мальчики пришли одновременно, то Гарри был в пути на 1 час меньше Рона, а прошли они одинаковый путь. Пусть t – время, которое провели в пути Гарри и Букля, тогда:

$$5t = 4(t + 1) \Rightarrow t = 4.$$

В общей сложности Букля летала 4 часа и она пролетела $4 \cdot 6 = 24$ км.

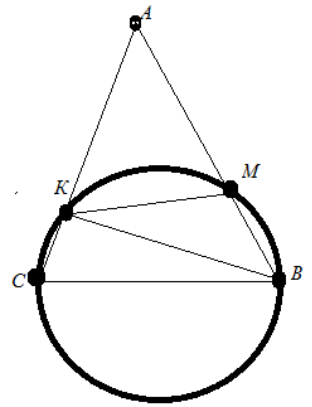
Ответ. 24.

Задание 4 (20 баллов). Из точки A , лежащей вне окружности, проведены две секущие к точкам C и B , где CB – диаметр этой окружности. Секущие AC и AB так же пересекают окружность в точках K и M соответственно. Известно, что площади треугольников AKM и ABC относятся как 3:4. Найти угол KBM .

Решение. Треугольник CKB прямоугольный, так как опирается на диаметр $\angle CKB = 90^\circ$. $\angle AKM = 180^\circ - \angle CKM = \angle CBM$. Следовательно, треугольники AKM и ABC подобны по двум углам ($\angle AKM = \angle CBM$, $\angle A$ – общий).

Отношение площадей этих треугольников 3:4, а коэффициент подобия треугольников ABC и AKM равен: $\frac{AK}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{KM}{CB} = k = \sqrt{3}:2$.

Тогда в прямоугольном треугольнике AKB имеем $\sin \angle ABK = \frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\angle ABK = 60^\circ$.



Ответ. 60.

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y}; \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x}. \end{cases}$$

Решение. Допустимые значения x и y определяется условиями: $\begin{cases} x \neq 0; \\ y \neq 0. \end{cases}$

Перемножим уравнения системы: $(xy + 24)(xy - 6) = x^2 y^2 \Rightarrow xy = 8$. Подставив это выражение в уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 32; \\ \frac{y^3}{x} = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 256; \\ y = \frac{8}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4; \\ x = 4; \\ y = \frac{8}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4; \\ y = -2. \\ x = 4; \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ. $(-4; -2); (4; 2)$.

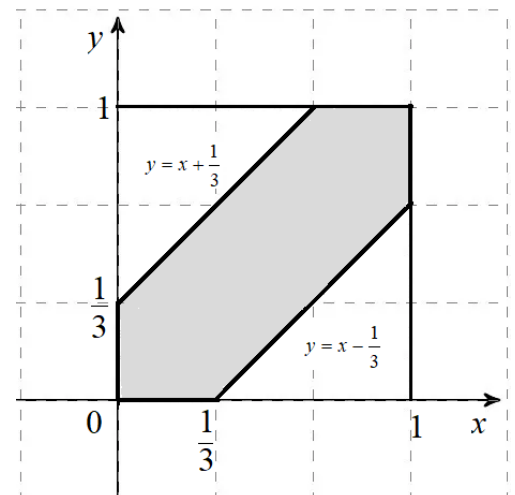
Задача 6 (30 баллов). Для проверки правильного функционирования отремонтированного прибора отправлены два специалиста из разных населенных пунктов. Они должны выполнить свою работу между 18 и 19 часами. Каждому специалисту требуется ровно 20 минут на проверку прибора. Сразу после окончания своей работы специалист уезжает. Какова вероятность того, что специалисты встретятся?

Решение. Будем считать промежуток времени с 18 до 19 часов отрезком $[0;1]$ длиной в 1 час. Пусть x – момент прихода первого специалиста, а y – второго. Тогда $x \in [0;1]$ и $y \in [0;1]$.

Пространством элементарных событий будет множество точек квадрата со стороной 1.

Пусть случайное событие A состоит в том, что встреча состоится. Так как 20 мин = $\frac{1}{3}$ ч, то благоприятствовать событию A будут те точки квадрата, координаты которых отличаются друг от друга не более чем на $\frac{1}{3}$, то есть $|x - y| \leq \frac{1}{3}$.

Так как неравенство $|x - y| \leq \frac{1}{3}$ равносильно неравенству $-\frac{1}{3} \leq x - y \leq \frac{1}{3}$ или $x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}$, то событию A соответству-



ет часть полосы, ограниченной прямыми $y = x - \frac{1}{3}$ и $y = x + \frac{1}{3}$, принадлежащая квадрату (на рисунке она закрашена). Найдем площадь области, соответствующей событию A :

$$S(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Так как площадь квадрата $S = 1 \cdot 1 = 1$, то

$$P(A) = \frac{S(A)}{S} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}.$$

Ответ. $\frac{5}{9}$.

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{x^2 - 100}{x^2 + xy - 10x - 10y} : \frac{x^2 + xy + 10x + 10y}{x^2 + 2xy + y^2} \text{ при } x = \frac{2024}{2023}; y = 5,1.$$

Решение.

$$\frac{(x-10)(x+10)}{x(x+y)-10(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x(x+y)+10(x+y)} = \frac{(x-10)(x+10)}{(x-10)(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x+10)} = 1$$

Ответ. 1.

Задание 2. (10 баллов) Дан треугольник VPN , известны длины сторон 4, 5, 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны PN в точке Q , стороны VP в точке T , стороны VN в точке R . Чему равна сумма отрезков VR , PT и NQ .

Решение. Изобразим треугольник и вписанную окружность.

Пусть $VP = 4$, $PN = 5$ и $VN = 8$.

Обозначим отрезок $VR = x$. Тогда по свойству вписанных окружностей: $VR = VT = x$.

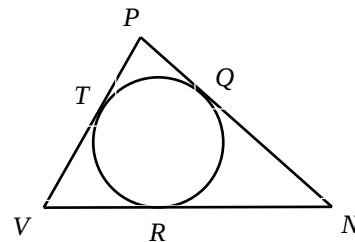
Соответственно, $RN = 8 - x$, $PT = 4 - x$.

По свойству вписанных окружностей имеем, что $QN = RN = 8 - x$ и $PQ = PT = 4 - x$, а $PN = PQ + QN = 8 - x + 4 - x = 12 - 2x = 5$.

Получим $2x = 7$ или $x = 3,5$.

Вычислим отрезки $VR = x = 3,5$; $PT = 4 - x = 4 - 3,5 = 0,5$; $QN = 8 - x = 8 - 3,5 = 4,5$.

Сумма $VR + PT + QN = 3,5 + 0,5 + 4,5 = 8,5$.



Ответ. 8,5.

Задание 3 (15 баллов). Самолет летит по маршруту Санкт-Петербург – Сочи – Санкт-Петербург. Скорость самолета 450 км/ч. На сколько процентов изменится длительность полета по этому маршруту при наличии ветра по сравнению с полетом в безветренную погоду, если ветер на участке Санкт-Петербург-Сочи увеличивает скорость самолета на 50 км/ч, а на участке Сочи-Санкт-Петербург уменьшает скорость самолета на 50 км/ч?

Решение: Пусть S км – длина маршрута Сочи-Санкт-Петербург. Тогда время полета туда и обратно в безветренную погоду составит:

$t_1 = \frac{2S}{450}$ ч. Тот же полет при наличии ветра, имеющего постоянную скорость 50 км/ч, займет

$$t_2 = \frac{S}{400} + \frac{S}{500} = \frac{9S}{2000} \text{ ч. Отношение времен получим } \frac{t_2}{t_1} = \frac{9S}{2000} \cdot \frac{450}{2S} = \frac{81}{80}.$$

Поэтому полет при наличии ветра продолжительнее на $\frac{1}{80} \cdot 100\% = 1,25\%$.

Ответ. полет продолжительнее на 1,25%.

Задание 4 (20 баллов). Около трапеции $ABCD$ можно описать окружность и вписать окружность в нее. Найти радиус окружности вписанной в трапецию $ABCD$, если периметр трапеции 100 см, а площадь $250\sqrt{6}$ см².

Решение.

Если в трапецию можно описать окружность, следовательно, трапеция равнобедренная и высота равна диаметру вписанной окружности. Раз можно вписать окружность, следовательно, сумма длин оснований равна половине периметра, то есть 50 см. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, таким образом, высота равна:

$$h = \frac{250\sqrt{6}}{25} = 10\sqrt{6}.$$

Ответ. $5\sqrt{6}$.

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 - 3xy = 44; \\ (x + y)^2 - 3xy - y^2 = 28. \end{cases}$$

В ответе указать значение $x \cdot y$.

Решение.

$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 - 3xy = 44; \\ (x + y)^2 - 3xy - y^2 = 28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2x^2 - 3xy = 44; \\ (x^2 + 2xy + y^2) - 3xy - y^2 = 28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2x^2 - 3xy = 44; \\ x^2 - xy = 28 \end{cases}.$$

Второе уравнение умножим на (-2) и прибавим к первому:

$$\begin{cases} y^2 - xy = -12 \\ x^2 - xy = 28 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} \frac{y(x-y)}{x(x-y)} = \frac{12}{28}; \\ x(x-y) = 28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{7}; \\ x(x-y) = 28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7}x; \\ x(x-y) = 28. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7}x; \\ x(x - \frac{3}{7}x) = 28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{7}x; \\ x^2 = 49. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7}x; \\ x^2 = 49. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7; \\ y = 3; \\ x = -7; \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ. 21.

Задание 6. (30 баллов) Секретарь начальника цеха добычи нефти и газа после утренней планёрки решила сделать перерыв на кофе. По правилам Компании, такой перерыв должен занимать не более 10 минут, о чем она оставила объявление на своем рабочем месте и ушла. Когда Мастер цеха добычи нефти и газа вспомнил, что не подписал у секретаря лист ознакомления с новыми правилами безопасности, и вернулся, перед ним было уже три желающих подписать бумаги. Какой будет вероятность того, что секретарь вернется не позже, чем через 4 минуты после прихода Мастера?

Решение: Отсчет времени начинается от того момента, как ушла на перерыв секретарь. Все моменты времени, когда подходили сотрудники и сам Мастер меньше 10 минут и строго больше нуля. Причем, момент времени, когда подошел Мастер, больше остальных (так как он был позже). t_1, t_2, t_3 - моменты времени, когда подошли коллеги Мастера, а t_4 - момент времени, когда подошёл Мастер. Следовательно, условие $t_1, t_2, t_3 < t_4$ - случайное событие A.

По условию нас интересует событие, когда секретарь вернётся не позже, чем через 4 минуты после прихода Мастера, т. е. $t_4 \geq 6$. Обозначим данное случайное событие B.

Данные события являются независимыми друг от друга. Найдем вероятность противоположного события: Мастер подошел раньше, чем за 4 минуты до возвращения секретаря, но позже коллег:

$$P(\bar{A}|B) = P(\bar{A} \cap B|B) = P(t_1, t_2, t_3, t_4 < 6) = \left(\frac{6}{10}\right)^4 = 0,6^4 = 0,1296$$

Тогда вероятность искомого нами события:

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - 0,1296 = 0,8704.$$

Ответ. 0,8704.

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2} \text{ при } x=7.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2} = \frac{\sqrt{(x-4)-4}\sqrt{x-4}+4+2}{\sqrt{(x-4)+4}\sqrt{x-4}+4-2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+2}{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}-2} = \frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{|\sqrt{x-4}+2|-2}.$$

При $x=7$ получим: $\frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{|\sqrt{x-4}+2|-2} = \frac{|\sqrt{3}-2|+2}{|\sqrt{3}+2|-2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1.$

Ответ. $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1.$

Задание 2 (10 баллов). Заготовка, имеющая форму окружности, вложена в матрицу, имеющую форму прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ и касается гипотенузы AB в точке E , катетов AC и CB в точках K и F соответственно. Найти площадь треугольной матрицы, если $AE=6$, $BE=9$.

Решение. Изобразим треугольник и вписанную окружность.

Площадь треугольника может быть определена по формуле:

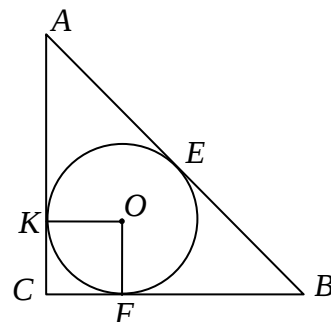
$$S = p \cdot r, \text{ где } p - \text{полупериметр треугольника: } p = \frac{AB + BC + AC}{2},$$

r – радиус вписанной окружности.

Для окружности, вписанной в угол: $AK = AE = 6$, $BF = BE = 9$, $CF = CK = r$, следовательно, $p = 6 + 9 + r = 15 + r$.

По теореме Пифагора: $15^2 = (6+r)^2 + (9+r)^2 \Rightarrow r(r+15) = 54$.

Тогда $S = p \cdot r = (r+15)r = 54$.



Ответ. 54.

Задание 3 (15 баллов). На нефтяном промысле нефть со скважин сначала поступает на автоматическую групповую замерную установку (АГЗУ), где попадает в сепаратор (емкость для разделения нефти и воды). Если флюид поступает только с первой скважины, то заполнение сепаратора происходит на 5 часов медленнее, если бы он поступал только со второй. За какое время сепаратор заполнится при поступлении флюида только с первой скважины, если его заполнение с двух скважин одновременно занимает 6 часов?

Решение.

Заполнение сепаратора описывается формулой: $V = Q \cdot t$, где V – объем сепаратора в м^3 , Q – скорость поступления (дебит) флюида, поступающего с одной или нескольких скважин в $\text{м}^3/\text{ч}$, t – время заполнения сепаратора. Тогда условие задачи можно представить следующим образом:

$$t = \frac{V}{Q_1 + Q_2} = 6.$$

где Q_1 и Q_2 – дебиты первой и второй скважин соответственно.

По условию задачи: $Q_1 = \frac{V}{t_1}$, $Q_2 = \frac{V}{t_2}$, $t_1 - 5 = t_2$, $V = 6 \cdot (\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_1-5}) \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1-5}$.

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числитель к нулю:

$$t_1^2 - 17t_1 + 30 = 0 \Rightarrow (t_1 - 15)(t_1 - 2) = 0.$$

Учитывая, что время t_2 отрицательным быть не может, получим $t_1 = 15$.

Ответ. 15.

Задание 4 (20 баллов). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$ и $BC = DE = 4$. Требуется: а) доказать, что $AC = CE$; б) найти длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Решение.

а) Дуги, стягиваемые равными хордами, равны. Поэтому $\angle BAC = \angle DCE$; $\angle BCA = \angle DEC$ (см. рис. 1). В треугольнике сумма углов равна 180° , значит углы $\angle ABC = \angle CDE$. Тогда треугольники ABC и CDE равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $AC = CE$.

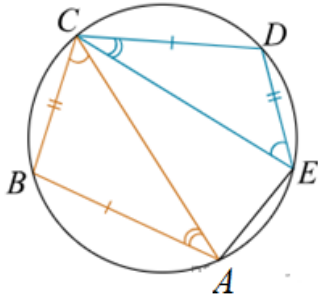


Рисунок 1

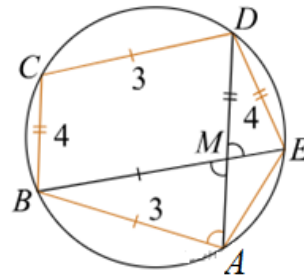


Рисунок 2

б) Пусть AD пересекается с BE в точке M (см. рис. 2). Дуги, стягиваемые равными хордами, равны, поэтому $\angle DCE = \angle BEC$. Следовательно, прямая CD параллельна прямой BE . Аналогично, прямая BC параллельна прямой AD . Значит, $BCDM$ — параллелограмм, отсюда $BC = DM = 4$ и $CD = BM = 3$. По свойству пересекающихся хорд получим:

$$BM \cdot ME = DM \cdot MA \Leftrightarrow BM \cdot ME = DM(AD - DM),$$

откуда $ME = \frac{8}{3}$. Таким образом, $BE = BM + ME = \frac{17}{3}$.

Ответ. б) $\frac{17}{3}$.

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 30; \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$$

Решение: Введем замену: $t = \sqrt{x + y}$ при условии, что $x + y \geq 0$; $t \geq 0$.

Тогда первое уравнение системы примет вид: $t^2 + t - 30 = 0 \Rightarrow (t - 5)(t + 6) = 0$.

После обратной замены и исходная система примет вид:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x + y} = 5; \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y = 25; \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 - y; \\ (25 - y)^2 + y^2 = 325. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 - y; \\ y^2 - 25y + 150 = 0. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 25 - y; \\ (y - 15)(y - 10). \end{cases} \\ \begin{cases} x = 25 - y; \\ y_1 = 10; \\ y_2 = 15. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 15; \\ y = 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 10; \\ y = 15. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. (10;15), (15;10).

Задание 6 (30 баллов). АЗС для заполнения резервуаров с топливом закрылась для клиентов на перерыв. Заполнение резервуаров должно занимать не более 15 минут, о чем вывешено объявление. Когда автомобилист подъехал к заправке, перед ним была очередь из трех автомобилей. Какова вероятность того, что АЗС откроется не позже, чем через 6 минут после прибытия четвертого автомобилиста?

Решение. Отсчет времени необходимо начать с момента, когда АЗС закрылась. Все моменты времени, когда приезжали автомобили, удовлетворяют условиям $0 < t_1, t_2, t_3 < t_4 < 15$.

Обозначим условие $t_1, t_2, t_3 < t_4$ – событием A .

По условию нас интересует событие, когда АЗС откроется не позже, чем через 6 минут после прибытия четвертого автомобилиста, то есть $t_4 \geq 9$. Обозначим данное событие B .

Данные события являются независимыми друг от друга. Найдем вероятность противоположного события: четвертый автомобилист приехал раньше, чем за 4 минуты до открытия заправки, но позже других автомобилистов:

$$P(\bar{A}|B) = P(\bar{A} \cap B|B) = P(t_1, t_2, t_3, t_4 < 9) = \left(\frac{9}{15}\right)^4 = 0,6^4 = 0,1296.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) = 1 - 0,1296 = 0,8704.$$

Ответ. 0,8704.

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{4}{1+a^4} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} \text{ при } a = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} &= \frac{2}{1-a^2} \Rightarrow \frac{2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2}{1-a^2} = \frac{4}{1-a^4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{4}{1+a^4} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} = \frac{4}{1+a^4} + \frac{4}{1-a^4} = \frac{8}{1-a^8}. \end{aligned}$$

$$\frac{8}{1-a^8} = \frac{8}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8} = \frac{8 \cdot 2^8}{2^8-1} = \frac{8 \cdot 256}{256-1} = \frac{2048}{255}.$$

Ответ. $\frac{2048}{255}$.

Задание 2 (10 баллов). Дан треугольник ABC , в который вписана окружность (с центром O). Точка касания E стороны AC делит ее на отрезки 4 и 3. Прямая OE пересекает сторону AB в точке N , $AN = 8$. Найти радиус вписанной окружности.

Решение.

По свойству окружности, вписанной в угол: $AE = AD = 4$. В $\triangle ANE$ $OE \perp AC$ как радиус к касательной, значит, он прямоугольный. Т.к. его гипотенуза AN вдвое больше катета AE , $\angle ANE = 30^\circ$.

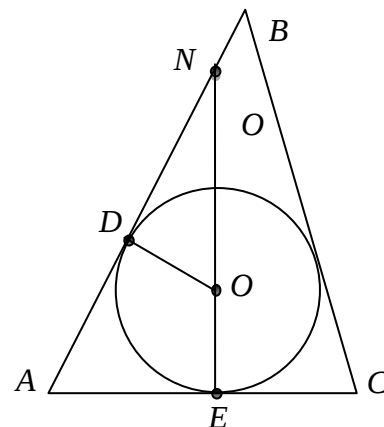
Следовательно, в $\triangle NOD$ $DO = r$, $NO = 2r$.

По теореме Пифагора

находим:

$$ND = \sqrt{NO^2 - DO^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3} = 4.$$

$$\text{Следовательно: } r = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



Ответ. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Задание 3 (15 баллов). От двух кусков сплава с различным процентным содержанием кобальта отрезали по куску равной массы, а каждую из отрезанных частей сплавляли с остатками другого куска. В новых сплавах содержание кобальта стало одинаковым. Найти массу каждого из отрезанных кусков, если масса первого сплава – 2 кг, второго – 3 кг.

Решение. Пусть A – первый сплав, B – второй. Для полученных сплавов: первый содержит $(2-x)$ кг сплава A и x кг сплава B ; а второй – x кг сплава A и $(3-x)$ кг сплава B . По условию задачи процентное содержание кобальта в обоих новых сплавах одинаково. Это возможно если в двух слитках массы сплава A и сплава B пропорциональны, т.е.:

$$\frac{2-x}{x} = \frac{x}{3-x} \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ кг.}$$

Ответ. 1,2 кг.

Задание 4 (20 баллов). В матрицу, имеющую форму равнобедренной трапеции, вставлена заготовка, имеющая форму окружности так, что она касается боковых сторон AB и CD в точках E и F , а сторон основания BC и AD в точках P и Q соответственно. Найти EF , PQ , если $AD=9$, $BC=4$.

Решение. Если в трапецию можно вписать окружность, следовательно, сумма длин оснований равна половине ее периметра. По свойству окружности, вписанной в угол:

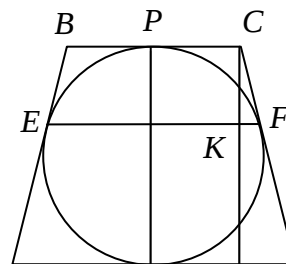
$$BE = BP = \frac{BC}{2} = 2, \quad AE = AQ = \frac{AD}{2} = 4,5.$$

Из треугольника $\triangle CDM$:

$$\frac{KF}{MD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{2+4,5} = \frac{4}{13} \Rightarrow KF = \frac{4}{13} \cdot \frac{AD-BC}{2} = \frac{5}{13}.$$

$$EF = BC + 2KF = 4 + \frac{5}{13} = \frac{57}{13}.$$

По теореме Пифагора находим: $PQ = CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{36} = 6.$



Ответ. $EF = \frac{57}{13}; PQ = 6.$

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = 45; \\ xy - 3y + 4x = 12. \end{cases}$$

Решение.

Во втором уравнении сгруппируем слагаемые и разложим его на множители:

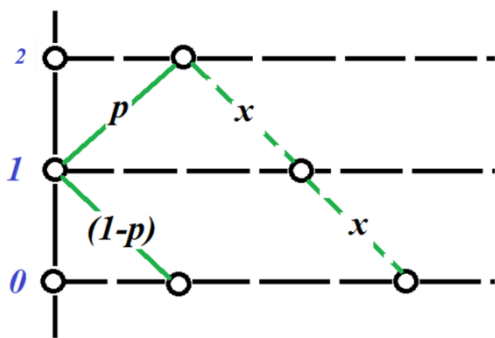
$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = 45; \\ (x-3)(y+4) = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = 45; \\ x = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2 - 3y - 36 = 0; \\ x = 3. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = 45; \\ y = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0; \\ y = -4. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3(y-4)(y+3) = 0; \\ x = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4; \\ y = -3; \\ x = 3. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3) = 0; \\ y = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1; \\ x = -3; \\ y = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $(-3; -4); (-1; -4); (3; -3); (3; 4).$

Задание 6 (30 баллов). Первый член числовой последовательности целых чисел равен «1». Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{5}{7}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p = \frac{2}{7}$ меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен «-1»?

Решение.

Пусть x - вероятность того, что для какого-то члена последовательности мы можем прийти к следующему члену, которое на 1 меньше рассматриваемого. В частности, из «1» придем к «0», таким образом, x^2 – искомая вероятность. Введенная вероятность x равна сумме вероятностей несовместных событий (см. рис.).



$$x = (1 - p) + p \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$p \cdot x^2 - x + (1 - p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1 + 2p - 1}{2p} = 1, \\ x = \frac{1 - 2p + 1}{2p} = \frac{1 - p}{p}. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1 - p}{p} \\ p = \frac{5}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1 - \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{5} = 0.4 \\ x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow x = 0.2 \left(\text{т.к. } p = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} \right)$$

Искомая величина $x^2 = 0,16$.

Ответ. 0,16.