

Задание 1 (5 баллов). Упростить выражение

$$\frac{27(1-a^{27})}{a^{27}(1+a^{27}+a^{54})} + \frac{9(1-a^9)}{a^{36}(1+a^9+a^{18})} + \frac{3(1-a^3)}{a^{39}(1+a^3+a^6)} + \frac{1-a}{a^{40}(1+a+a^2)} - \frac{1}{a^{40}(1-a)}$$

и найти его значение при $a = \sqrt[108]{100}$.

Задание 2 (10 баллов). В спортивных соревнованиях участвовали 4 сборные команды из вузов Санкт-Петербурга и несколько команд из Ленинградской области. Каждая команда играла только один раз с остальными командами. За победу в игре дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. Команды из Ленинградской области набрали в соревнованиях одинаковое количество очков, а сборные команды Санкт-Петербурга вместе набрали 10 очков. Какое наибольшее количество команд из Ленинградской области могли участвовать в соревнованиях?

Задание 3 (15 баллов). В трубопроводе цилиндрической формы установлено скребковое устройство вдоль трубы, предназначенное для очистки внутренней поверхности от парафинистых и смолистых отложений, имеющее форму треугольной призмы. В поперечном сечении трубопровода в виде круглого циферблата с часовой разметкой, вершины треугольника скребкового устройства находятся в точках окружности на часовых отметках «1:30», «4:00» и «5:00». Определить диаметр трубопровода, если площадь сечения скребкового устройства 900 мм^2 .

Задание 4 (20 баллов). Площадь квадратной заготовки в 100 раз меньше суммы всех трехзначных натуральных чисел, кратных 5 и не кратных 6. Найти наибольшее целое значение стороны квадрата, который можно вырезать из этой заготовки.

Задача 5 (20 баллов). Решить неравенство

$$\sqrt{3x-7} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geq 3x^2-16x+20.$$

В ответе указать сумму целых решений неравенства.

Задача 6 (30 баллов). Имеется два сплава меди и олова. Первый весит 5 кг и содержит 55 % меди, второй весит 3 кг и содержит 25 % меди. Какого веса надо взять куски этих сплавов, чтобы после их совместной переплавки получить 4 кг сплава, содержащего k % меди?

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\left(\left| 3\sqrt{2} - \left| \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right| \right| + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \right)^2 + \sqrt{0,5(28 + 7\sqrt{7})} \cdot \sqrt{0,5(28 - 7\sqrt{7})}.$$

Задача 2 (10 баллов). Витя и Коля бросают игральную кость до тех пор, пока не выпадет число очков, равное 1. У кого выпало 1 очко, тот и победитель. Начинает Коля. Во сколько раз вероятность выигрыша Коли больше вероятности выигрыша Вити?

Задание 3 (15 баллов). Для изготовления круглых изделий используется пресс-форма, имеющая форму квадрата со стороной 8 м. Определить радиус круглого изделия, касающегося одной из сторон пресс-формы и внешним образом металлических дуг радиуса 8 м с центрами в соседних вершинах формы.

Задание 4 (20 баллов). Для проведения ремонтных работ на технологическом оборудовании было выполнено постепенное снижение давления газа путем стравливания газа через свечу сброса. Изменение давления x (кПа) по времени t (сек.) определяется в виде последовательности $\{x_t\}$, считая время $t \in \mathbb{N}$ через натуральное значение, со следующими условиями: $x_1 = 1200$ кПа, $x_2 = 600$ кПа, где $x_{t+2} = x_t - \frac{40000}{x_{t+1}}$. Найти время t снижения давления газа до 0 кПа.

Задание 5 (20 баллов). Решить уравнение

$$2\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2 + \cos^{\frac{1}{3}} x = 0.$$

В ответе указать количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

Задание 6 (30 баллов). Из угольного разреза на обогатительную фабрику, находящуюся на расстоянии 240 км от разреза, выезжает БЕЛАЗ со скоростью 40 км/ч. Одновременно с ним с обогатительной фабрики на угольный разрез с постоянной скоростью v км/ч выезжает автомобиль с инженерной бригадой. Через 0,5 часа после встречи автомобиль, не доезжая до угольного разреза, поворачивает обратно на обогатительную фабрику, двигаясь с прежней скоростью. Определить все значения v , при которых автомобиль вернется на обогатительную фабрику раньше, чем туда прибудет БЕЛАЗ.

Задача 1 (5 баллов). Определить, какое из чисел больше

$$\frac{24^{2023}+1}{24^{2024}+1} \quad \text{или} \quad \frac{24^{2024}+1}{24^{2025}+1}?$$

Задание 2 (10 баллов). Манометр – прибор, который используется для контроля и измерения давления в различных средах. Он предназначен для работы с воздушными и газовыми смесями, способен измерять давление пара, жидкостей. Вероятность того, что при считывании показаний манометра не будет допущена ошибка, равна 0,96. Найти минимальное количество измерений, которое необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше 0,999 можно было ожидать, что хотя бы один результат окажется безошибочным.

Задание 3 (15 баллов). В защитном стекле компаса с круговой шкалой в 360° образовался скол в виде треугольника таким образом, что его вершины находятся в отметках в « 0° », « 45° » и « 135° ». Определить диаметр защитного стекла, если известна площадь треугольного скола в 450 мм^2 .

Задание 4 (20 баллов). Группа альпинистов хочет совершить восхождение на айсберг высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья айсберга они могут подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 м/ч, а по навешенной веревке со скоростью 400 м/ч. После отдыха на трассе на айсберге скорость подъема составляет 30 м/ч. За какое минимальное количество дней они смогут достичь вершины, если будут работать на айсберге (включая подъем по навешенной веревке) 6 часов в день?

Задание 5 (20 баллов). Решить неравенство

$$x + \sqrt{\sqrt{x^2 + 6x + 9} - \operatorname{tg} 2025^\circ} \leq \sqrt{20} - \left(\sqrt{\sqrt{5} + 1} - \sqrt{\sqrt{5} - 1} \right)^2.$$

Задание 6 (30 баллов). Найти все значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{a} \right)^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит ровно два целых числа.

Задание 1 (5 баллов). Упростить

$$\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } x = 4(a-1), 1 < a < 2.$$

Задание 2 (10 баллов). Вероятность того, что новый насос для добывающей скважины выйдет из строя в течение года после установки, равна 0,3. Если насос проработал несколько лет, то вероятность выхода его из строя в течение следующего года такая же (вероятность его поломки не растёт со временем). Найти вероятность, что насос прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Задание 3 (15 баллов). Для изготовления квадратных изделий используется пресс-форма, имеющая форму квадрата со стороной 8 м. Определите максимальное значение стороны квадратного изделия, одна из вершин которого лежит на стороне пресс-формы, лежащего с внешней стороны от металлических дуг радиуса 8 м с центрами в соседних вершинах формы.

Задание 4 (20 баллов). В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не все члены равны между собой. Для всех членов с номером $n \geq 2$ выполняется соотношение:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 98x_n + x_{n-1}}{100}. \text{ Найти } \sqrt{\frac{x_{2025} - x_1}{2024} \cdot \frac{2023}{x_{2025} - x_2}} + 1.$$

Задание 5. (20 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{10 - 6 \cos x} = \sqrt{10 - 6 \cos 2x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Задание 6 (30 баллов). На время командировки инженеру организация выделила сумму командировочных расходов в размере 7600 рублей. В первые дни командировки его ежедневные расходы совпадали с расчетными (из расчета общей выделенной суммы на количество всех дней), а затем увеличились на 100 рублей в день. Известно, что инженер ежедневно тратил целое количество рублей. В командировке инженер вынужден был задержаться на один день. В результате по отчету инженера командировочные расходы оказались на 1200 рублей больше выделенных. Определить наименьшее возможное количество дней пребывания инженера в командировке.