

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{5\sqrt{5} - 15a + 3\sqrt{5}a^2 - a^3}{(\sqrt{5} - a)^2} \text{ при } a = \sqrt{5} - 8.$$

Задание 2 (10 баллов). Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P , окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается стороны AC в точке E ($AE=8$). Найти радиус этой окружности, если $AP=10$.

Задание 3 (15 баллов). Гарри Поттер вышел из Хогвартса вслед за Роном Уизли спустя 1 час. Скорость Гарри 5 км/ч, а скорость Рона 4 км/ч. В Хогсмид они прибыли одновременно. Сова Букля вылетает в одно время с Гарри и летит к Рону, догнав его, возвращается к Гарри. Далее продолжает летать между мальчиками, скорость Букли 6 км/ч. Сколько километров пролетела Букля?

Задание 4 (20 баллов). Из точки A , лежащей вне окружности, проведены две секущие к точкам C и B , где CB - диаметр этой окружности. Секущие AC и BC так же пересекают окружность в точках K и M соответственно. Известно, что площади треугольников AKM и ABC относятся как 3:4. Найти угол KBM .

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y}; \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x}. \end{cases}$$

Задача 6 (30 баллов). Для проверки правильного функционирования отремонтированного прибора отправлены два специалиста из разных населенных пунктов. Они должны выполнить свою работу между 18 и 19 часами. Каждому специалисту требуется ровно 20 минут на проверку прибора. Сразу после окончания своей работы специалист уезжает. Какова вероятность того, что специалисты встретятся?

Задание 1 (5 баллов). Вычислить:

$$\frac{x^2 - 100}{x^2 + xy - 10x - 10y} : \frac{x^2 + xy + 10x + 10y}{x^2 + 2xy + y^2} \text{ при } x = \frac{2024}{2023}, y = 5.1.$$

Задание 2 (10 баллов). Дан треугольник VPN , известны длины сторон 4, 5, 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны PN в точке Q , стороны VP в точке T , стороны VN в точке R . Чему равна сумма отрезков VR , PT и NQ .

Задание 3 (15 баллов). Самолет летит по маршруту Санкт-Петербург – Сочи – Санкт-Петербург. Скорость самолета 450 км/ч. На сколько процентов изменится длительность полета по этому маршруту при наличии ветра по сравнению с полетом в безветренную погоду, если ветер на участке Санкт-Петербург – Сочи увеличивает скорость самолета на 50 км/ч, а на участке Сочи – Санкт-Петербург уменьшает скорость самолета на 50 км/ч.?

Задание 4 (20 баллов). Около трапеции $ABCD$ можно описать окружность и вписать окружность в нее. Найти радиус окружности вписанной в трапецию $ABCD$, если периметр трапеции 100 см, а площадь $250\sqrt{6}$ см².

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 - 3xy = 44; \\ (x + y)^2 - 3xy - y^2 = 28. \end{cases}$$

В ответе укажите произведение xy .

Задание 6 (30 баллов). Секретарь начальника цеха добычи нефти и газа после утренней планёрки решила сделать перерыв на кофе. По правилам Компании, такой перерыв должен занимать не более 10 минут, о чем она оставила объявление на своем рабочем месте и ушла. Когда Мастер цеха добычи нефти и газа вспомнил, что не подписал у секретаря лист ознакомления с новыми правилами безопасности, и вернулся, перед ним было уже три желающих подписать бумаги. Какой будет вероятность того, что секретарь вернется не позже, чем через 4 минуты после прихода Мастера?

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2} \text{ при } x=7.$$

Задание 2 (10 баллов). Заготовка, имеющая форму окружности, вложена в матрицу, имеющую форму прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ и касается гипотенузы AB в точке E , катетов AC и CB в точках K и F соответственно. Найти площадь матрицы, если $AE=6$, $BE=9$.

Задание 3 (15 баллов). На нефтяном промысле нефть со скважин сначала поступает на автоматическую групповую замерную установку (АГЗУ), где попадает в сепаратор (емкость для разделения нефти и воды). Если флюид поступает только с первой скважины, то заполнение сепаратора происходит на 5 часов медленнее чем, если бы он поступал только со второй. За какое время сепаратор заполнится при поступлении флюида только с первой скважины, если его заполнение с двух скважин одновременно занимает 6 часов?

Задание 4 (20 баллов). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB=CD=3$ и $BC=DE=4$. Требуется: а) доказать, что $AC=CE$; б) найти длину диагонали BE , если $AD=6$.

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=30; \\ x^2+y^2=325. \end{cases}$$

Задание 6 (30 баллов). АЗС для заполнения резервуаров с топливом закрылась для клиентов на перерыв. Заполнение резервуаров должно занимать не более 15 минут, о чем вывешено объявление. Когда автомобилист подъехал к заправке, перед ним была очередь из трех автомобилей. Какова вероятность того, что АЗС откроется не позже, чем через 6 минут после прибытия четвертого автомобилиста?

Задание 1 (5 баллов). Вычислить

$$\frac{4}{1+a^4} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} \text{ при } a = \frac{1}{2}.$$

Задание 2 (10 баллов). Дан треугольник ABC , в который вписана окружность (с центром O). Точка касания E стороны AC делит ее на отрезки 4 и 3. Прямая OE пересекает сторону AB в точке N , $AN = 8$. Найти радиус вписанной окружности.

Задание 3 (15 баллов). От двух кусков сплава с различным процентным содержанием кобальта отрезали по куску равной массы, а каждую из отрезанных частей сплавляли с остатками другого куска. В новых сплавах содержание кобальта стало одинаковым. Найти массу каждого из отрезанных кусков, если масса первого сплава – 2 кг, второго – 3 кг.

Задание 4 (20 баллов). В матрицу, имеющую форму равнобедренной трапеции, вставлена заготовка, имеющая форму окружности так, что она касается боковых сторон AB и CD в точках E и F , а сторон основания BC и AD в точках P и Q соответственно. Найти EF , PQ , если $AD=9$, $BC=4$.

Задание 5 (20 баллов). Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = 45; \\ xy - 3y + 4x = 12. \end{cases}$$

Задание 6 (30 баллов). Первый член числовой последовательности целых чисел равен «1». Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{5}{7}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p = \frac{2}{7}$ меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен «-1»?