

**Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по астрономии,**

заключительный этап, 2022/23 учебный год

**10-11 класс**

*Краткие решения*

**1. Самый эффективный способ выработки энергии во Вселенной – трансформация гравитационной энергии падающего на компактный релятивистский объект (например, чёрную дыру (ЧД)) тела в другие виды энергии (тепловую, кинетическую, энергию излучения и т. п.). При этом высвобождение энергии приводит к уменьшению массы покоя падающего на ЧД тела, в соответствии с формулой эквивалентности массы и энергии. А падающее по спирали вещество образует аккреционный диск, внутренний радиус которого равен радиусу последней устойчивой орбиты. Расчёты показывают, что он равен  $3R_s$ , где  $R_s$  - радиус Шварцшильда (горизонт событий ЧД).**

**Какую максимальную энергию (в долях исходной массы покоя падающего тела) можно получить в этом процессе? Релятивистскими эффектами при падении вещества на ЧД пренебречь. Падение вещества считать начинающимся с бесконечно большого расстояния. (25 баллов)**

*Решение. Проанализируем, какой энергией обладало вещество в начале своего движения. Так как по условию оно находилось на бесконечно большом расстоянии, то потенциальная энергия*

$$E_p = -\frac{GMm}{R} \quad (1) \quad (2 \text{ балла})$$

*стремится к нулю (2 балла), а так как скорость вещества относительно ЧД крайне мала, то и кинетическая энергия также стремится к нулю (2 балла), и, следовательно, полная энергия вещества в начале движения равна нулю (2 балла). Теперь рассмотрим полную энергию вещества, когда она окажется на расстоянии  $3R_s$  от центра ЧД. Рассмотрим её движение по окружности радиуса  $3R_s$ , так как это самая низкая устойчивая орбита.*

*В таком случае, приобретя скорость, равную первой космической для данной системы, вещество обрело кинетическую энергию*

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (2) \quad (2 \text{ балла})$$

*так же вещество обрело потенциальную энергию*

$$E_p = -\frac{GMm}{3R_s} \quad (3) \quad (2 \text{ балла})$$

*Разница их суммы и начальной полной энергии и есть та энергию  $\Delta E$ , которую вещество рассеивает, чтобы перейти на самую низкую устойчивую орбиту (круговую). Формально это запишется как*

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{3R_s} + \Delta E = 0 \quad (4) \quad (4 \text{ балла})$$

*Теперь обратимся к определению радиуса Шварцшильда: вторая космическая скорость на расстоянии  $R_s$  равна скорости света (4 балла).*

*В итоге для  $R_s$  у нас получается значение*

$$R_s = 2GM/c^2 \quad (5)$$

*Далее выражаем скорость света, для неё получается:*

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} \quad (6)$$

*Запишем уравнение для первой космической скорости на орбите  $3R_s$  (используем формулу круговой скорости, так как орбита с полуосью  $3R_s$  является самой низкой устойчивой круговой)*

$$v = \sqrt{\frac{GM}{3R_s}} \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) получаем:

$$v^2 = \frac{c^2}{6} \quad (8)$$

Преобразовав (6), получаем:

$$\frac{GM}{R_S} = \frac{c^2}{2} \quad (9)$$

(8) и (9) подставляем в (4):

$$\frac{mc^2}{12} - \frac{mc^2}{6} + \Delta E = 0 \quad (10)$$

$$\Delta E = \frac{mc^2}{12} \quad (5 \text{ баллов})$$

или в долях исходной массы покоя

$$\frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1}{12} m$$

Ответ:  $\Delta E = \frac{mc^2}{12}$  или  $\frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1}{12} m$ .

**2. В каком диапазоне может изменяться угловое удаление от Солнца для Меркурия в момент наибольшей элонгации при наблюдении с Земли? Орбиту Земли считать круговой. (15 баллов)**

Дано:

$e_3=0$  (орбита круговая)

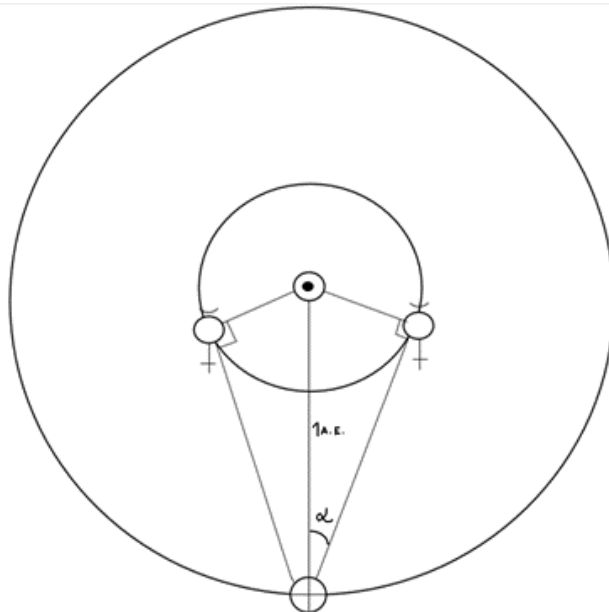
$a_3=1 \text{ а.е.}$

$e_M=0,21$

$a_M=0,38 \text{ а.е.}$

Решение:

Для начала нужно разобраться с расположением Меркурия на орбите, соответствующим наибольшей элонгации.



Элонгация планеты - угол Солнце-Земля-планета. Максимальная элонгация внутренней планеты наблюдается в момент, когда прямая Земля-планета является касательной к орбите планеты, то есть угол Солнце-планета-Земля – прямой. (3 балла)

Мы ищем диапазон углов, потому что Меркурий может находиться в максимальной элонгации, будучи в перигелии или афелии своей орбиты. Для этих двух случаев угол Солнце-Земля-Меркурий будет разным (назовём его  $\alpha$ ). (4 балла)

Так как орбиту Земли считаем круговой, расстояние между Солнцем и Землёй (как радиус орбиты) однозначно – 1 а.е. (1 балл)

Для нахождения данного угла необходимо также знать расстояние от Солнца до Меркурия (перигелийное и афелийное).

Формула для нахождения афелийного расстояния:

$$Q = a(1+e) \quad (1 \text{ балл})$$

$$Q = 0,38 \text{ а.е.}(1+0,21) = 0,46 \text{ (а.е.)} \quad (1 \text{ балл})$$

Формула для нахождения перигелийного расстояния:

$$q = a(1-e) \quad (1 \text{ балл})$$

$$q = 0,38 \text{ а.е.}(1-0,21) = 0,30 \text{ (а.е.)} \quad (1 \text{ балл})$$

Для Меркурия в афелии: посчитаем синус угла разделив афелийное расстояние (катет прямоугольного треугольника) на расстояние от Земли до Солнца (гипотенуза)

$$\sin \alpha = \frac{0,46}{1} \text{ а.е.}$$

$$\sin \alpha = 0,46$$

$$\arcsin(0,46) = 27,39^\circ = 27^\circ 23' \quad (1 \text{ балл})$$

Для Меркурия в перигелии: посчитаем синус угла разделив перигелийное расстояние (катет прямоугольного треугольника) на расстояние от Земли до Солнца (гипотенуза)

$$\sin \alpha = \frac{0,30}{1} \text{ а.е.}$$

$$\sin \alpha = 0,30$$

$$\arcsin(0,30) = 17,46^\circ = 17^\circ 27' \quad (1 \text{ балл})$$

Итак, диапазон изменения углового удаления от Солнца для Меркурия в момент наибольшей элонгации при наблюдении с Земли:

$$17^\circ 27' \leq \alpha \leq 27^\circ 23' \quad (1 \text{ балл})$$

Ответ:  $17^\circ 27' \leq \alpha \leq 27^\circ 23'$ .

3. На один кадр снято два изображения Луны вблизи горизонта. Снимок сделан 22 сентября. Вычислите широту места наблюдения и интервал времени между моментами съёмки Луны. (15 баллов)

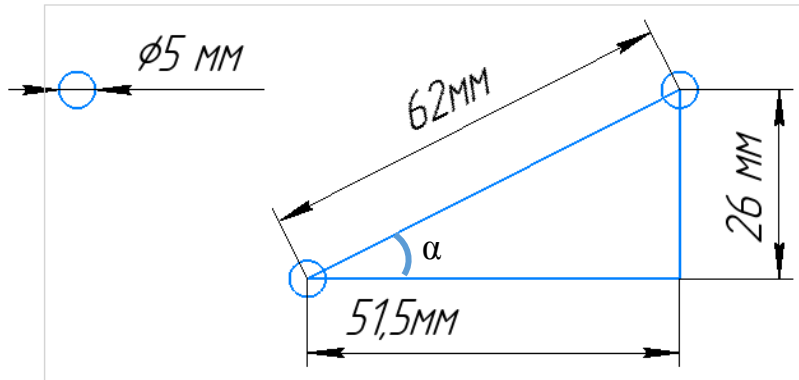


Решение. 22 сентября (осеннее равноденствие) склонение Солнца равно  $0^\circ$ , (1 балл за склонение Солнца и 1 балл за пояснение о равноденствии) т.е. оно движется вблизи плоскости небесного экватора. Орбита Луны наклонена к плоскости эклиптики примерно на  $5^\circ$ , следовательно, её движение по небу в установленную дату также происходит вблизи небесного экватора (2 балла). Это позволяет нам установить широту места наблюдения, вычислив угол между горизонтом и траекторией Луны, параллельной небесному экватору.

$$\varphi = 90^\circ - \alpha \quad (2 \text{ балла})$$

где  $\alpha$  – угол между плоскостями небесного экватора и горизонта.

Для нахождения угла  $\alpha$  сделаем чертёж с сохранением линейных размеров с фото:



Найдём  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{26}{51,5} \Rightarrow \alpha = 26.79^\circ \text{ (1 балл)}$$

Тогда широта местности:

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 26.79^\circ = 63.21^\circ \text{ (1 балл)}$$

В условии задачи не указано полушарие, в котором был сделан снимок, значит возможен также вариант  $\varphi = -63.21^\circ$  для южного полушария. (2 балла)

Найдём временной промежуток между двумя фотографиями. Знаем, что угловой диаметр лунного диска на небе –  $0.5^\circ$  (2 балла), линейный диаметр диска на фото – 0.5 см.

Расстояние между центрами дисков вычисляем:

1. прямыми измерениями: 6.2 см

Находим отношение расстояния к диаметру диска:  $\frac{6,2}{0,5} = 12.4$

и путь, который прошла Луна:  $\Delta S = 12.4 * 0.5^\circ = 6.2^\circ$ .

Луна движется в плоскости небесного экватора, значит её угловая скорость составляет  $\omega = 14.5^\circ/\text{час}$ .

Искомое время:  $\Delta t = 6,2^\circ * \frac{60}{14,5^\circ} = 25.7 \text{ мин.}$

2. косвенно:  $\sqrt{51,5^2 + 26^2} = 5.8 \text{ см}$

Найдём отношение расстояния к диаметру диска:  $\frac{5,8}{0,5} = 11.6$

и путь, который прошла Луна:  $\Delta S = 11.6 * 0.5^\circ = 5.8^\circ$ .

Луна движется в плоскости небесного экватора, значит её угловая скорость составляет  $\omega = 14.5^\circ/\text{час}$ .

Искомое время:  $\Delta t = 5.8^\circ * \frac{60}{14,5^\circ} = 24 \text{ мин. (3 балла за верное решение любым из способов)}$

Ответ даётся с точностью  $24 \pm 2 \text{ мин.}$

4. Некая звезда имеет параллакс  $0.01''$ , а линия водорода в её спектре, имеющая лабораторную длину волны  $4861.3 \text{ \AA}$ , наблюдается с длиной волны  $4861.8 \text{ \AA}$ . При этом видимое перемещение звезды в картинной плоскости (т. е. перпендикулярно лучу зрения) отсутствует. Через сколько лет блеск звезды для наблюдателя на Земле возрастет на  $5^m$ ? 1 Ангстрем ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м.}$ ) (20 баллов)

Решение. Если участник определил, что звезда удаляется, и указал, что ее блеск никогда не возрастет, то задача оценивается в 20 баллов. В противном случае, задача оценивается критериями ниже и итоговый балл делится пополам.

$r$  – расстояние от звезды до Солнца.

$$r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0,01''} = 100 \text{ пк}$$

(3 балла (2 балла формула и 1 балл численный ответ))

Первый способ нахождения  $r'$ :

$M$  – абсолютная звездная величина, она является постоянной для конкретной звезды.

$$M = m + 5 - 5 \lg(r) = m' + 5 - 5 \lg(r') \quad (3 \text{ балла})$$

$$m' - m = 5 \lg\left(\frac{r'}{r}\right) \quad (3 \text{ балла})$$

По условию звезда приближается, значит звездная величина должна уменьшиться на  $5^m$

$$m' - m = -5^m \quad (3 \text{ балла})$$

$$-5 = 5 \lg\left(\frac{r'}{r}\right)$$

$$\lg\left(\frac{r'}{r}\right) = -1$$

$$r' = \frac{r}{10} = 10 \text{ пк (конечное расстояние от Солнца до звезды)}$$

(3 балла (2 балла за формулу и ее обоснование и 1 балл за численный ответ))

Второй способ нахождения  $r'$ :

$\Delta m = 5 \Rightarrow$  яркость звезды изменилась в 100 раз. (3 балла)

Т.к. звезда приближается, то ее яркость увеличилась. (2 балла)

По закону обратных квадратов:

$$\frac{E}{E'} = \frac{r'^2}{r^2} = \frac{1}{100} \quad (4 \text{ балла})$$

$$r' = 0,1r = 10 \text{ пк} \quad (3 \text{ балла})$$

Оба способа нахождения расстояния оцениваются в одинаковое количество баллов

$$\Delta r = r - r' = 100 - 10 = 90 \text{ пк} \quad (1 \text{ балл})$$

Т.к. перемещение звезды в картинной плоскости отсутствует, лучевая скорость звезды равна ее полной скорости.

По эффекту Доплера:

$$v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} c = \frac{4861,3 - 4861,8}{4861,3} * 299792 = -30,8 \text{ км/с} \quad (2 \text{ балла})$$

Отрицательная скорость показывает, что звезда движется по направлению к Солнцу, поэтому в расчетах берем модуль полученной скорости

$$T = \frac{\Delta r}{v} = \frac{90 * 206265 * 1,496 * 10^8}{30,8} = 9 * 10^{13} \text{ с} = 2,87 * 10^6 \text{ земных лет}$$

(2 балла (1 балл за формулу + 1 балл за численный ответ))

Ответ:  $2,87 * 10^6$  земных лет.

**5. На фото, сделанном в декабре 2022 года в Турецкой национальной обсерватории ТЮБИТАК (широта  $\varphi = 37^\circ$ ), где расположен телескоп КФУ РГТ-150 с диаметром зеркала 1,5 метра, снято зимнее небо и его отражение в стеклянной поверхности, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту. Съёмка ведётся на сверхширокоугольный объектив с полем зрения  $170^\circ$  («фишай»). Оптическая ось камеры параллельна плоскости отражающей поверхности. Перпендикуляр к плоскости зеркала лежит в плоскости небесного меридиана. Определите  $\alpha$  - угол наклона зеркальной отражающей поверхности к горизонту. (25 баллов)**

*Решение.*

Из условия следует, что перпендикуляр к плоскости зеркала лежит в плоскости небесного меридиана, следовательно, искомым углом будет отсчитываться от направления на север или на юг. Рассмотрим четыре случая взаимного расположения наблюдателя и отражающей поверхности (см рисунок). Направление на небесный экватор будем отождествлять с верхней звездой пояса Ориона (Минтака, или  $\delta Ori$ ), которая имеет почти нулевое склонение и одновременно недалеко

отстоит от небесного меридиана (сам он проходит между Ригелем и Сириусом). При этом кадре проекция небесного меридиана есть вертикальный диаметр.

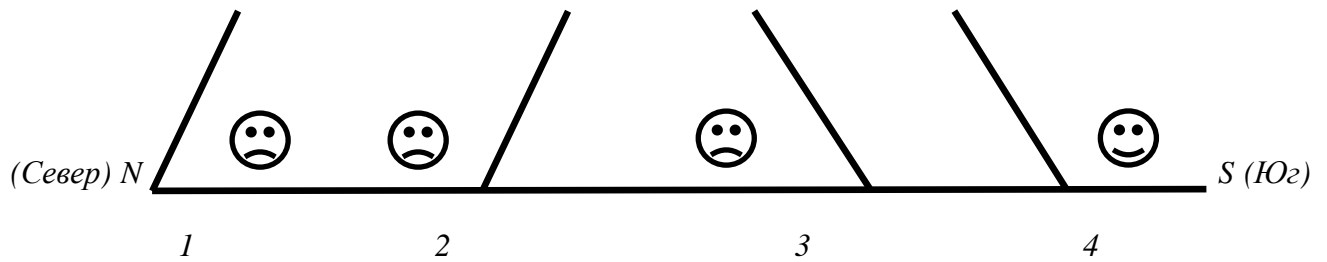


Рис. 1. Четыре случая взаимного расположения наблюдателя (на схеме - смайлик) и отражающей поверхности.

1. Угол отсчитывается от направления на юг, наблюдатель находится к югу от зеркала. В таком случае небесный экватор либо не будет виден вовсе, либо будет отстоять от плоскости зеркала на угол, не превышающий  $\varphi$  (предельный случай, когда искомый угол равен  $90^\circ$ ), что не соотносится с оценками, которые можно сделать, опираясь на карту отождествления.
2. Угол отсчитывается от направления на юг, наблюдатель находится к северу от зеркала. Тогда мы не будем наблюдать южную часть неба, что противоречит изображению на фото. Иными словами, Орион на указанной широте не бывает к северу от зенита.
3. Угол отсчитывается от направления на север, наблюдатель находится к северу от зеркала. Аналогично предыдущему пункту, наблюдатель не сможет запечатлеть южную часть неба.
4. Угол отсчитывается от направления на север, наблюдатель находится к югу от зеркала. Наблюдатель свободно обозревает южную часть неба, притом созвездия, ей принадлежащие, наблюдаются «вверх ногами», что можно дополнительно проверить по расположению характерных конфигураций Ориона и Большого Пса.

Ситуация, описанная в пункте 4, единственная удовлетворяет требованиям изображения, потому будем рассматривать именно её.

Построим схему установки (т.е. более подробно изобразим рис 1.4), вид с запада, плоскость рисунка – небесный меридиан.

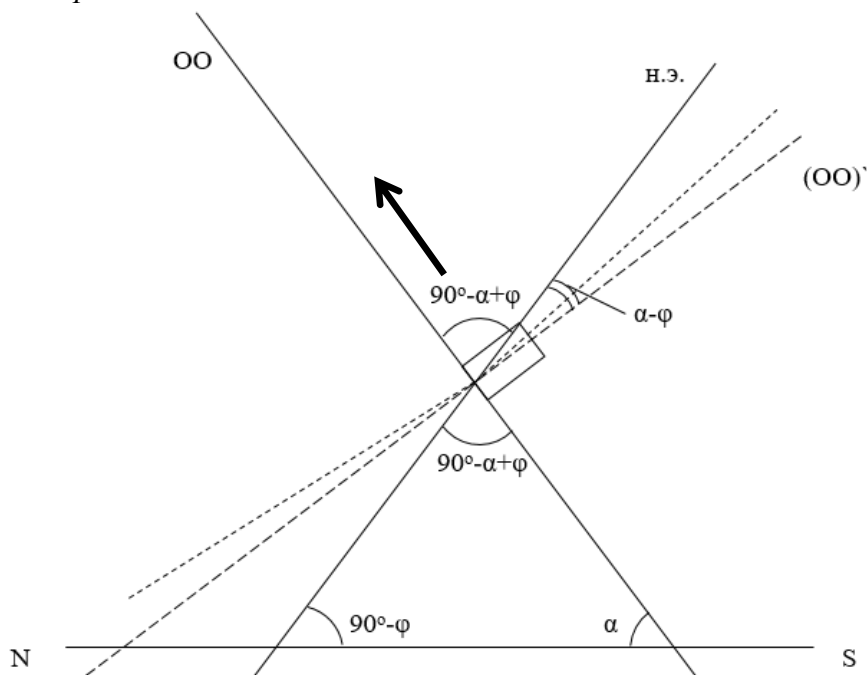


Рис. 2. Схема расположения отражающей поверхности, основных углов и линий. Стрелкой показано направление на центр кадра. На рисунке обозначены:

*OO* – оптическая ось,  
*(OO)'* – перпендикуляр к оптической оси,  
*н.э.* – плоскость небесного экватора,  
*NS* – плоскость математического горизонта,  
 Короткий унктир ограничивает область зрения камеры.

Отметим углы  $90^\circ - \varphi$  (между *н.э.* и *NS*) и  $\alpha$  (между *OO* и *NS*). Из треугольника, стороны которого лежат на прямых *OO*, *NS* и *н.э.*, найдём угол между *OO* и *н.э.*, равный  $90^\circ - \alpha + \varphi$ , и вертикальный к нему. Углы между *OO* и *н.э.* и между *н.э.* и *(OO)'* в сумме дают  $90^\circ$ , т.к. *OO* перпендикулярна к *(OO)'*, тогда угол между *н.э.* и *(OO)'* составляет  $\alpha - \varphi$ . (максимум 10 баллов за словесное и/или схематичное описание установки)

С этого момента возможно два равноценных пути решения.

Способ первый:

С другой стороны, угол между *н.э.* и неким направлением, отсчитываемый в плоскости небесного меридиана (по усл.), есть склонение объекта, находящегося в этом направлении. В нашем случае в направлении *(OO)'* находились бы граничные объекты на кадре, но т.к. поле зрения составляет  $170^\circ$ , т.е. по  $85^\circ$  ниже и выше *OO*, получаем следующее выражение

$$\alpha - \varphi - 5^\circ = \delta \text{ (10 баллов)}$$

где  $\delta = 20^\circ$  (значение устанавливаем с помощью карты отождествления, ориентируясь на узнаваемую фигуру Ориона и положение Сириуса ( $\alpha$  СМа) на краю кадра; значение склонения для рассматриваемых объектов отрицательно, однако берём его по модулю, т.к. в решении рассматриваем положительные углы, образуемые определёнными нами условными прямыми) (3 балла). Тогда

$$\alpha = \delta + \varphi + 5^\circ = 20^\circ + 37^\circ + 5^\circ = 62^\circ \text{ (2 балла)}$$

Способ второй:

Склонение находящейся в центре кадра звезды отличается от  $\varphi$  на столько же, на сколько наклонена к вертикали отражающая поверхность, т.е. на угол  $\alpha$ . Поясним это подробнее.

Заметим, что склонением объекта на небесной сфере также является угол между  $OO$  и н.э. По той же карте отождествления можно установить склонение направления  $OO$  (при этом важно использовать объекты вблизи небесного меридиана). **(6 баллов)** Для этого возьмём в рассмотрение  $\beta$  Тау и  $\alpha$  Аир, сравнивая угловое расстояние между ними. Сделать это можно двумя путями: непосредственно устанавливая склонение по ближайшим ярким звёздам (сложность состоит в том, что ближайшая  $\alpha$  Аир находится на небе довольно далеко от стеклянной поверхности) и сравнивая угловые размеры через линейные расстояния между объектами на кадре (данный способ даёт большую ошибку из-за непостоянства радиального масштаба в данном типе объектива). **(6 баллов)**

Оба пути дают нам значение склонения около  $64^\circ$ , тогда

$$90^\circ - \alpha + \varphi = \delta \text{ (2 балла)}$$

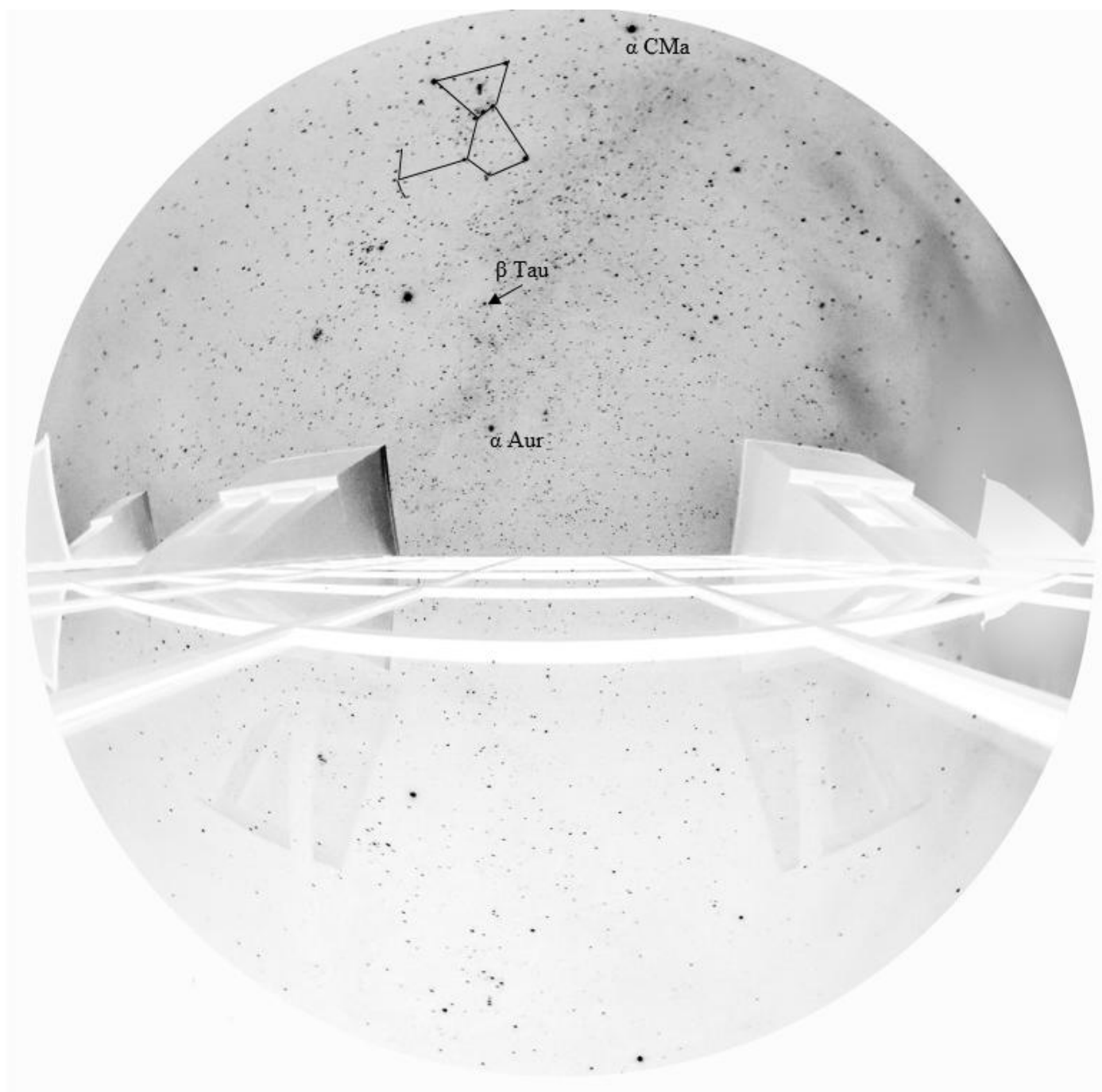
$$\alpha = 90^\circ - \delta + \varphi = 90^\circ - 64^\circ + 37^\circ = 63^\circ \text{ (1 балл)}$$

Значение близко к полученному в первом случае.

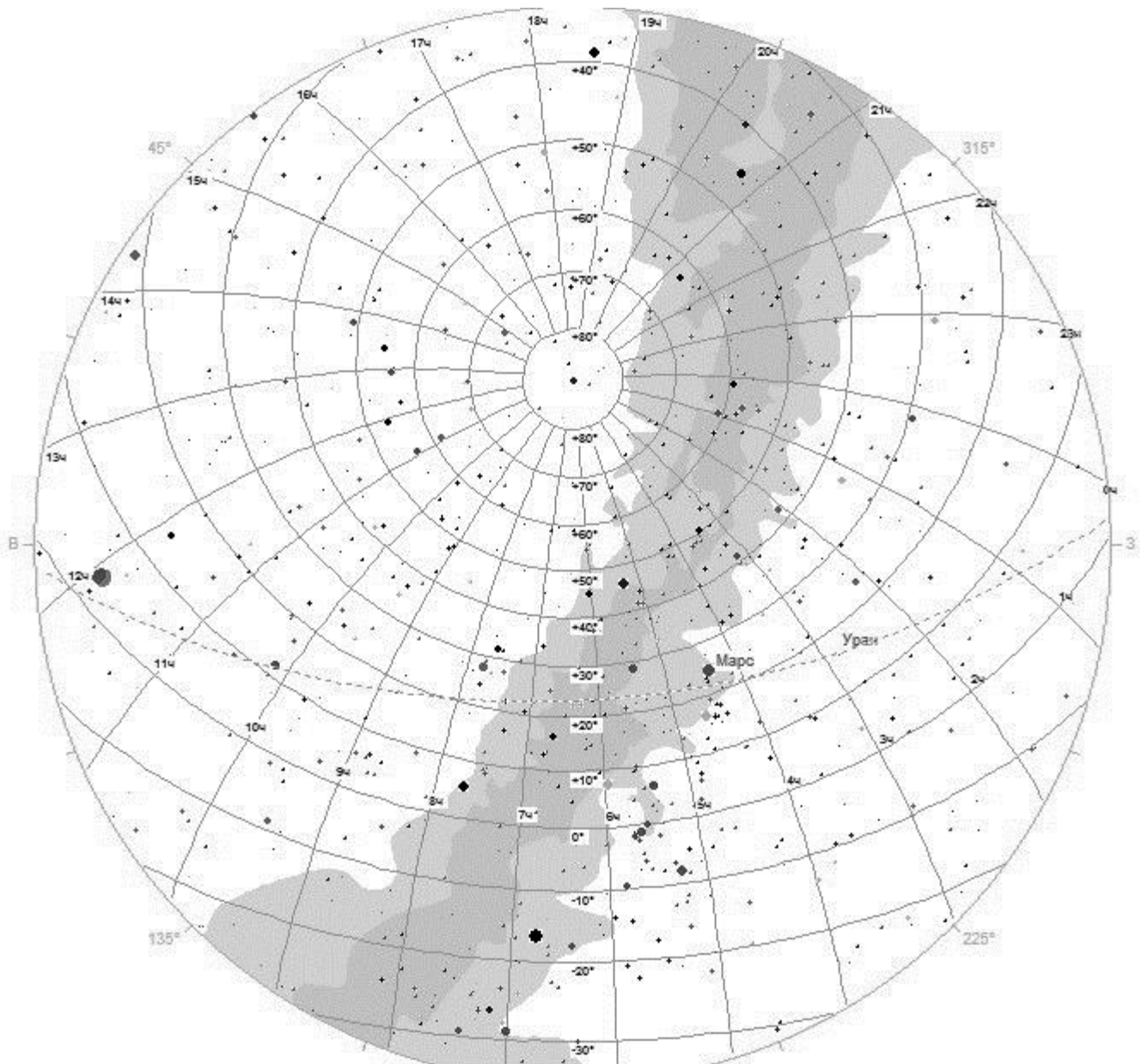
Ответ:  $62^\circ \pm 1^\circ$ .



Фото для задачи 5 (негатив)



## Карта отождествления для задачи 5 (негатив)



### Справочные данные:

1 а.е. =  $1.496 \cdot 10^8$  км; 1пк = 206265 а. е.

скорость света в вакууме  $c = 299792$  км/с; гравитационная постоянная  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/кг·с<sup>2</sup>

продолжительность тропического года  $T = 365.2422$  суток

длительность синодического периода обращения Луны 29.5 дня, сидерического – 27.3 дня

наклонение экватора Земли к плоскости эклиптики  $\varepsilon = 23^{\circ}26'$

масса Солнца –  $2 \cdot 10^{30}$  кг, радиус Солнца –  $6.96 \cdot 10^5$  км

масса Земли –  $6 \cdot 10^{27}$  г, радиус Земли – 6371 км

радиус Луны – 1737 км, большая полуось орбиты Луны 385 000 км

большая полуось орбиты Меркурия 0.38 а.е., эксцентриситет орбиты Меркурия 0.21

большая полуось орбиты Весты 2.36 а.е., эксцентриситет орбиты Весты 0.09