11 КЛАСС

Задача 1. Найдите наименьшее восьмизначное натуральное число, десятичная запись которого оканчивается на 2024 и которое делится на 17.

Решение. Мы должны рассматривать числа, начиная с 10002024, причем каждое следующее число больше предыдущего на 10000, то есть мы ищем число вида $x = 10^7 + 10000d + 2024$, где d — целое число, $0 \leqslant d \leqslant 8999$ с наименьшим возможным d при котором x делится на 17. Запишем $2024 = 119 \cdot 17 + 1$, $10000 = 588 \cdot 17 + 4$, $10000000 = 588235 \cdot 17 + 5$ и отбросим все слагаемые, которые уже делятся на 17. Получим, что $5 + 4d + 1$ должно делиться на 17, то есть $6 + 4d = 17k$, где $k = 0, 1, \ldots$. Тогда чтобы найти наименьшее подходящее d будем перебирать k с нуля. При $k = 0$ и $k = 1$ получаются нецелые d, а вот при $k = 2$ получаем $d = 7$

Ответ. 10072024.

Критерии проверки. 10 — верное решение;
9 — верное решение с небольшим прбелом в обосновании минимальности найденного числа;
5 — обосновано найдено число, делящееся на 17, но оно не минимально из-за ошибки в рассуждении;
0 — нет продвижений или предложен необоснованный неподходящий под условия ответ.

Задача 2. Алексей находится в пункте A и хочет успеть на электричку, которая отправляется из пункта D через 1 час 50 минут. Расстояние между пунктами A и D по прямой составляет 10 км. Скорость движения Алексея пешком равна 5 км/ч, при этом он может двигаться с этой скоростью в любом направлении, независимо от наличия дороги. Из пункта A в пункт D как раз отправляется попутная машина, которая движется со скоростью 50 км/ч, но только по дороге. Дорога из A в D идет сначала по прямой до пункта C, а затем – по прямой от C до D. Может ли Алексей успеть на электричку, если $AC = 50$ км, а $\angle CAD = 60^o$? Как следует двигаться Алексею, чтобы добраться до станции за минимальное время?

Решение. У Алексея есть три возможности: идти пешком от начала до конца, ехать на машине от начала до конца (варианты с высадкой из машины, движения пешком, а затем снова посадки в машину приводят, очевидно, к тому же времени в пути) или вначале ехать на машине, а потом идти пешком. В первом случае время в пути $T_1 = \frac{AD}{5} = 2$ — Алексей не успевает. Найдем CD по теореме косинусов: $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 60^o} = \sqrt{2100}$. Тогда во втором случае время в пути $T_2 = \frac{AC+CD}{50} = \frac{50+10\sqrt{21}}{50} > 1.9$ часа — вновь не успевает. Проведем высоту DB к стороне AC. Тогда $DB = AD \sin 60^o = 5\sqrt{3}$, а $AB = AD \cos 60^o = 5$. Если доехать на машине до точки B, а затем идти пешком, то получим время $T_3 = \frac{AB}{50} + \frac{BD}{5} = 0.1 + \sqrt{3} < 1.8321$ часа — Алексей успевает за 4,5 секунды до отхода электрички. Последний вариант, однако не является оптимальным. Найдем точку X на стороне AC, в которой надо покинуть машину, чтобы получить оптимальное время. Обозначим $\angle DXB = \alpha$, тогда $DX = \frac{BD}{\sin \alpha}$,

$BX = \frac{BD\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а время в пути

$$T_4 = \frac{AB}{50} - \frac{BX}{50} + \frac{DX}{5} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{50} \cdot \frac{10 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{100} \cdot \frac{11\sin^2\frac{\alpha}{2} + 9\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и видим, что необходимо найти минимум выражения $f(x) = 11x + \frac{9}{x}$. Приравнивая к нулю производную, находим точку минимума $x_0 = \sqrt{\frac{9}{11}}$ и $f(x_0) = 2\sqrt{99}$. Тогда $T_4 = 0.1 + \frac{3\sqrt{33}}{50}$ часа (у Алексея 36 секунд в запасе), $\cos\alpha = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} = 0.1$, $\sin\alpha = \frac{2x_0}{1+x_0^2} = \frac{\sqrt{99}}{10}$,

$$AX = AB - BX = 5 - 5\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = 5 - 5\sqrt{3}\frac{2x_0}{1-x_0^2} = 5 - \frac{5}{\sqrt{33}} \approx 4,13 \text{ км}.$$

Ответ. Алексей может успеть. Чтобы добраться за минимальное время, ему следует проехать на машине $5 - \frac{5}{\sqrt{33}}$ км, а затем идти пешком по прямой к станции.

Примечание. Для поиска угла α можно воспользоваться законом Снеллиуса (преломление света при переходе из одной среды в другую), поскольку свет распространяется в точности по тому пути, время движения по которому является наименьшим. В первой «среде» (дорога) скорость движения в 10 раз больше, чем во второй. Луч начинает движение вдоль дороги, т.е. под углом $\gamma = 90^o$ к вертикали. При сходе с дороги луч начинает движение под углом $90^o - \alpha$ к вертикали. Тогда $\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\sin\gamma} = \frac{v_2}{v_1} = 0.1$, откуда $\cos\alpha = 0.1$.

Критерии проверки. 15 — верное решение;
12 — верно найдена точка минимума, но нет обоснования минимальности;
8 — найден некоторый путь, по которому можно успеть, но он не является оптимальным;
5 — показано, что путь «только пешком» и «только на машине» не укладываются в отведенное время.

Задание 3. Равновесная температура космического аппарата, освещенного Солнцем и находящегося на орбите Марса, равна -30 градусов Цельсия. Какова будет равновесная температура того же аппарата на подлете к Меркурию (расстояние от Меркурия до Солнца примите равным $0,39$ а.е., Марса до Солнца – $1,52$ а.е.)?

Решение. Температура аппарата определяется балансом энергии. На орбитах Марса и Меркурия основным источником энергии является солнечный свет, остальные источники излучения пренебрежимо малы. Эта энергия убывает пропорционально квадрату расстояния, так что $E_1^+/E_2^+ = R_2^2/R_1^2$. Нагретый Солнцем аппарат теряет энергию, излучая ее в пространство. По закону Стефана–Больцмана эта энергия пропорциональная четвертой степени абсолютной температуры тела, т.е. $E_1^-/E_2^- = T_1^4/T_2^4$. Приравнивая $E_1^+ = E_1^-$, $E_2^+ = E_2^-$, получаем

$$\frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \iff T_2 = T_1\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Подставляя сюда $T_1 = 273 - 30 = 243$ K, $R_1 = 1,52$ а.е., $R_2 = 0,39$ а.е., получаем $T_2 = 480$ K или 207 градусов Цельсия.

Ответ. 207 градусов Цельсия.

Критерии проверки. 10 — верное решение;
9 — арифметическая ошибка;
5 — есть одна из двух формул для энергии (поглощаемая или излучаемая);
0 — нет продвижений.

Задача 4. Пусть X — некоторое четырехзначное число. Индийский математик Капрекар предложил применить к нему следующее преобразование: он взял наибольшее число, которое можно получить из X перестановкой цифр и вычел из него наименьшее число, которое можно получить перестановкой цифр из X (при этом допускается, чтобы после перестановки число начиналось с нуля, например, запись 0001 будет означать число 1). Например, преобразование Капрекара, примененное к числу $X = 5707$ даст результат $7750 - 0577 = 7173$. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая вычисляет преобразование Капрекара для всех чисел в диапазоне от 1000 до 9999 и выводит количество разных ответов (например, в диапазоне от 1000 до 1005 получим

$$1000 - 0001 = 999, \quad 1100 - 0011 = 1089, \quad 2100 - 0012 = 2088,$$
$$3100 - 0013 = 3087, \quad 4100 - 0014 = 4086, \quad 5100 - 0015 = 5085,$$

то есть, всего шесть разных ответов).

Решение. Вариант программы на C++

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <set>
#include <vector>

using namespace std;

int Kaprekar(int k){
    vector<int> v = {k/1000, k/100 % 10, k%100 / 10, k% 10};
    int k_max = 0, k_min = 0, i;
    sort(v.begin(), v.end());
    for (i=0; i<4; i++){
        k_min = k_min*10 + v[i];
        k_max = k_max*10 + v[3-i];
    }
    return k_max - k_min;
}

int main()
{
```

```
    set<int> s;
    int i;
    for (i = 1000; i <= 9999; ++i)
    s.insert(Kaprekar(i));
    cout << s.size();

    return 0;
}
```

Вариант программы на Python

```
s = set()
for i in range(1000, 10000):
    l = list(str(i))
    l.sort()
    x1 = l.pop()
    x2 = l.pop()
    x3 = l.pop()
    x4 = l.pop()
    x_max = x1*1000 + x2*100 + x3*10 + x4
    x_min = x4*1000 + x3*100 + x2*10 + x1
    s.add(x_max - x_min)
print(len(s))
```

Критерии проверки. 20 баллов — верное решение, рабочая программа;
18–19 баллов — решено верно, есть некоторые синтаксические ошибки/опечатки *или* дополнительно выводится лишняя информация;
13–17 баллов — решено в целом верно, есть одно–два неправильных действия или выводится не количество различных значений преобразования, а сами преобразования;
10–12 баллов — программа некорректная синтаксически и выводится не количество различных значений преобразования, а сами преобразования;
8–10 баллов — решение как псевдокод верное;
4–7 баллов — нет описания алгоритма, приведены общие соображения;
2–3 балла — есть лишь примеры вычисления преобразования Капрекара для отдельных чисел.

Задача 5. Некоторый спутник обращается вокруг Земли с эксцентриситетом орбиты $e = 0,6$ и большой полуосью $a = 4R_З$, где $R_З$ — радиус Земли. Для безошибочной передачи информации на Землю высота спутника над поверхностью планеты должна быть не больше, чем $3R_З$. Выясните, какую часть периода обращения спутник будет корректно передавать информацию на Землю.

Решение. Орбита является эллипсом с фокальным расстоянием $2c$, где $c = ae = 0,6a$ и малой полуосью $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0,8a$. По свойству эллипса сумма расстояний от спутника до фокусов постоянна и равна $2a$. В точке орбиты, когда спутник удаляется на высоту $h = 3R_3$ от поверхности Земли, расстояние от него до центра Земли (одного из фокусов эллипса, обозначим его O) равно $h + R_3 = 4R_3 = a$. Тогда и расстояние до второго фокуса равно a, т. е. данные точки (их две, обозначим их X и Y) лежат на малой полуоси эллипса. По закону Кеплера, время T_0 прохождения спутником той дуги XY, которая ближе к Земле, относится к периоду обращения спутника T так же, как относится площадь сектора OXY, заметаемого радиус–вектором спутника с началом в т. O (центре Земли), к площади всего эллипса. Заметим, что сектор OXY есть половина эллипса с вырезанным треугольником OXY. Площадь эллипса равна $\pi ab = 0.8\pi a^2$, а площадь треугольника OXY равна $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = 0.48a^2$. Тогда

$$\frac{T_0}{T} = \frac{0.4\pi a^2 - 0.48a^2}{0.8\pi a^2} = 0.5 - \frac{0.6}{\pi} \approx 0.31,$$

т. е. искомая часть времени составляет 0.31 от периода обращения.

Ответ. 0.31

Критерии проверки. 20 — верное решение;
10 — есть закон Кеплера и есть неверные попытки найти площадь нужной части эллипса при верной модели задачи;
8 — есть неверные попытки найти площадь нужной части эллипса при в целом верной модели задачи, отсутствует закон Кеплера;
4 — найдены какие-то характеристики эллипса (оси, фокус), других продвижений нет, либо неверная модель задачи.

Задача 6. Земляне отправили экспедицию к Сириусу. Космический аппарат вблизи Земли набрал скорость, равную половине скорости света. Как изменится вид звездного неба в иллюминаторах (предположим, что с корабля можно смотреть в любую точку небесной сферы, а корабль не вращается)? Подтвердите свои соображения расчетами.

Решение. Будут наблюдаться несколько эффектов: аберрация, доплеровское смещение света, видимое изменение яркости звезд.

Аберрация. Направим ось Ox неподвижной системы координат K вдоль вектора скорости корабля, а оси Oy и Oz произвольно, так чтобы получился орторепер. Теперь рассмотрим подвижную систему K' (связанную с кораблем) и выбранную так, чтобы в начальный момент времени $O' = O$ (по условию, скорость движения K' относительно K равна $V = c/2$). Тогда координаты связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

Таким же преобразованием будут связаны приращения координат dx, dy, dz и времени dt. Рассмотрим в системе K луч света некоторой звезды, который движется со скоростью

$v = (v_x, v_y, v_z)$, $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c$. Поскольку $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, то можем выразить

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - (V/c^2) dx} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

— известная формула релятивистского сложения скоростей. Аналогично,

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - (V/c^2) dx} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},$$
$$v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - (V/c^2) dx} = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}.$$

Из основного постулата релятивистской механики следует, что $|v'| = c$ (это впрочем можно проверить непосредственно). Видим, что $\frac{v_{x'}}{v_{y'}} = \frac{v_x}{v_y}$, т. е. в плоскости, перпендикулярной движению корабля, направление «на звезду» не меняется. Однако угол вектора v с осью Ox отличен от угла вектора v' с той же осью. Действительно, $\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} = \frac{v_x}{c}$, а

$$\cos\alpha' = \frac{v_{x'}}{|v'|} = \frac{v_{x'}}{c} = \frac{v_x/c - V/c}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = \frac{\cos\alpha - V/c}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha} < \cos\alpha$$

(если $\alpha = 0$ или π, то неравенство обращается в равенство). Видим, что в движущейся системе K' угол вектора скорости луча света, идущего от звезды, с осью Ox увеличивается. Соответственно, направление «на звезду» (вектор $-v$) наоборот сближается с осью Ox (направление полета). Значит, с точки зрения космонавта, находящегося на борту корабля, звезды, находящиеся сбоку по отношению к направлению полета корабля, сдвинутся в направлении «передней сферы». На этой сфере плотность звезд будет больше, а на «задней сфере», соответственно, звезд станет меньше. Не сдвинутся только звезды, находящиеся строго по курсу полета (например, Сириус) и строго против курса (например, Солнце).

Доплеровский эффект. Рассмотрим упрощенно испускание звездой электромагнитных волн как испускание фотонов с равными промежутками времени. Пусть промежуток между двумя выпущенными фотонами равен Δt в системе K. Тогда в системе K' этот промежуток равен

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{V v_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тогда длина волны λ в системе K и длина λ' в системе K' связаны соотношением

$$\lambda' = c\Delta t' = \lambda \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для звезд по ходу движения аппарата имеем $\cos\alpha = 1$ и $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} < \lambda$ — видимый свет сдвигается в сторону синего. Для звезд за аппаратом имеем $\cos\alpha = -1$ и $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} = \lambda\sqrt{3} > \lambda$ — видимый свет сдвигается в сторону красного. Для звезд по бокам аппарата $\cos\alpha = 0$ и $\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} > \lambda$ — сдвиг в сторону красного. Итак, звезды поменяют свой цвет — по ходу движения сдвиг в сторону синего, сзади и по бокам — сдвиг в сторону красного. Синие звезды по ходу движения и красные звезды сзади станут не видны невооруженным глазом.

Изменение яркости звезд. Рассмотрим одинокую звезду, находящуюся по ходу движения аппарата. Количество фотонов, испускаемых этой звездой в единицу времени dt в заданный телесный угол $d\Omega$ равна $dN = J_0 d\Omega\, dt$ (все переменные взяты в системе K, J_0 — интенсивность потока фотонов, равная константе в силу изотропности пространства). Для наблюдателя в системе K' видимая интенсивность потока будет равна

$$J' = \frac{dN}{d\Omega'\, dt'} = J_0 \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega'} \cdot \frac{dt}{dt'}.$$

Мы уже видели, что для звезд по ходу движения $dt/dt' > 1$. Кроме того, мы знаем, что с точки зрения наблюдателя на борту телесный угол $d\Omega'$ является искаженным (сжатым) телесным углом $d\Omega$, т.е. $d\Omega > d\Omega'$, а значит $J' > J$. Вывод: яркость звезд по ходу движения аппарата увеличивается. Аналогично, яркость звезд за кормой аппарата уменьшается.

Что не будет наблюдаться. Не будет наблюдаться видимое глазом движение звезд по небу, превращения звезд в линии и т.п.

Критерии проверки. по 10 баллов за верное описание и обоснование первого и второго эффекта, 5 баллов — для третьего эффекта.
Снижение на 2–3 балла при отсутствии математического обоснования эффекта (для каждого из трех) или при неполном обосновании (например появляется формула для угла смещения звезд, но нет ее вывода из преобразований Лоренца).
Снижение на 2–3 балла при описании нерелятивистского эффекта Допплера, при ошибке в направлении смещения цвета.