5 — 6 КЛАССЫ

Задача 1. Все обитатели планеты N имеют либо три, либо четыре глаза. Трехглазые на любой вопрос отвечают правдиво, четырехглазые всегда лгут. Высадившийся на планете экипаж два раза задал трехглазому жителю планеты N один и тот же вопрос. Могло ли так получиться, что экипаж получил два разных ответа? Если могло, то приведите пример вопроса. Если нет, то объясните почему.

Ответ. Да, такое возможно. Например: «Мы в первый раз задаем тебе вопрос?».

Критерии проверки. 10 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
8 баллов – рассуждение верное, нет примера.
5 баллов – ошибки в рассуждениях, ответ неверный.

Задача 2. На планете N планируется установить высокочастотные (ВД) и низкочастотные (НД) сейсмические датчики. Датчики должны быть установлены так, что на расстоянии ровно 2 км от каждого ВД должны находиться как минимум два НД. Известно, что было установлено четыре НД. Каким могло быть наибольшее количество ВД при таких условиях? Нарисуйте расположения датчиков.

Решение. Фактически, надо так расположить 4 точки на плоскости, чтобы можно было провести как можно больше окружностей радиуса 2, на каждой из которой лежали бы как минимум 2 точки. Обозначим наши точки A, B, C и D. Тогда окружности могли бы пройти через пары AB, AC, AD, BC, BD и CD — максимум двенадцать окружностей (через пару точек на плоскости можно провести максимум две окружности). Для того, чтобы через пару точек проходили две окружности радиуса два необходимо и достаточно, чтобы расстояние между точками было меньше 4 (меньше диаметра окружности). Тогда подойдет такое расположение: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Ответ: Например, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$.

Критерии проверки. 20 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
7 баллов – предложен не оптимальный вариант расстановки датчиков.

Задача 3. В коллекции учащегося Школы юного исследователя космоса есть открытки с датами 10 различных пусков с космодрома «Восточный» (на каждой открытке ровно одна дата). Если случайно выбрать 10 открыток, то среди них найдутся 5 открыток с различными датами. Какое наибольшее количество открыток может быть в коллекции?

Решение. Пусть в коллекции ровно n_1 открыток с первой датой, ровно n_2 — со второй, и так далее (по условию, все эти числа отличны от нуля). Для удобства занумеруем даты так, что $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{10}$. Заметим, что $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 < 10$. Действительно, если $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 10$, то взяв именно эти 10 открыток, получили бы набор из 10 открыток с 4 различными датами, что противоречит условию. Отсюда, в частности, следует, что $n_4 < 3$. Иначе бы получили $n_1 \geq n_4 \geq 3$, аналогично $n_2 \geq 3$, $n_3 \geq 3$ и тогда

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 12$. Для $n_4 = 2$ можно предложить либо $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$, либо $n_1 = 3$, а $n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Поскольку нам надо составить наибольшую по числу открыток коллекцию, то выбираем второй вариант. Из тех же соображений возьмем тогда $n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = n_{10}$ максимально возможными, т.е. равными 2.

Ответ. Максимально возможное число открыток в коллекции 21 — девять видов в двух экземплярах и один в трех.

Критерии проверки. 15 баллов – ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов – есть разумные идеи, ответ неверный.
5 баллов –грубые ошибки в рассуждениях, ответ неверный.
2 балла – есть попытка решения, ответ не получен.

Задача 4. Клетки таблицы 5 на 5 должны быть раскрашены в разные цвета так, что:
а) клеток одного цвета должно быть как можно меньше;
б) среди любых трех соседних клеток должны быть хотя бы две клетки одного цвета (под тремя соседними клетками понимаем любой набор из трех клеток, в котором одна из клеток граничит с двумя другими по сторонам, т. е. три клетки, расположенные полоской или уголком).
Каким можно раскрасить таблицу?

Решение. Нам необходимо раскрасить клетки таблицы в несколько различных цветов, соблюдая условие пункта б). При этом, клеток одинакового цвета должно быть как можно меньше: если обозначить число клеток первого цвета n_1, второго — n_2 и т.д., то необходимо добиться как можно меньшего числа m, для которого все $n_j \leq m$. Иными словами, необходимо минимизировать величину $\max\{n_1, n_2, \ldots\}$ (поиск наименьшего возможного числа m в условии задачи не требуется). Пусть вначале число цветов равно двум. Тогда $n_1 + n_2 = 25$, а значит, $\max\{n_1, n_2\} \geq 13$. Равенство достигается, например, для шахматной раскраски. Пусть теперь число цветов равно трем. Тогда $n_1 + n_2 + n_3 = 25$, так что $\max\{n_1, n_2, n_3\} \geq 9$. Равенство достигается например при раскраске, приведенной на рисунке.

1	1	2	2	3
1	2	2	3	3
2	2	3	3	1
2	3	3	1	1
3	3	1	1	2

Можно показать, что дальнейшее увеличение числа цветов не снижает числа m, но это в задачу не входит.

Критерии проверки. 20 баллов – предложен вариант с 9 клетками одного цвета.
12 баллов – предложен вариант с 10 клетками одного цвета.
10 баллов – из двух предложенных вариантов один не оптимальный (более 10 клеток),

другой не удовлетворяет условию.
7 баллов – предложен вариант с более, чем 10 клетками.
5 баллов –неверно понято условие, предложен некоторый вариант.
2 балла – есть попытка решения.

Задача 5. На одной из планет земной группы было решено проложить тоннель под горным хребтом. Для простоты будем считать, что начальная и конечная точки тоннеля находятся на нулевой высоте «над уровнем моря». Строители проложили тоннель по прямой линии, корректируя свои действия с помощью лазерного луча. Однако после окончания работ было замечено, что подземные воды, попадающие в тоннель, скапливаются в его центре.
а). Объясните, почему так произошло.
б). Как следует изменить форму тоннеля, чтобы нейтрализовать этот эффект? Радиус планеты примите равным 3400 км, длина тоннеля —- 2 км.

Решение. а). Проведем сечение планеты, содержащее тоннель и центр планеты. Получим окружность (поверхность планеты) и хорду этой окружности (тоннель). Расстояние от центра планеты до середины хорды меньше, чем до концов — соответственно, вода стекает к центру тоннеля.
б.) Необходимо изменить форму тоннеля, проложив его не по прямой, а по дуге большого круга. Вычислим, какую коррекцию надо провести в центре тоннеля. Обозначим его концы через A и B, середину через C, а центр планеты через O. Тогда $OA = OB = 3400$ км, $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3400^2 - 1} \approx 3399,99985$ км, т. е. коррекция составляет всего 15 см.

Ответ. Достаточно изменить форму дна тоннеля, подняв его в окрестности центра тоннеля на 15 см.

Критерии проверки. 15 баллов – есть верное объяснение явления и предложения по устранению эффекта.
10 баллов – нет удовлетворительного объяснения природы явления, есть предложения по его устранению.
5 баллов – неверно понято условие.
2 балла – только попытка решения.

Задача 6. Таблицу, состоящую из N строк и 8 столбцов, нужно заполнить различными натуральными числами так, чтобы модуль разности чисел, расположенных в соседних ячейках, не превосходил 5. Какое наибольшее количество строк может быть в такой таблице?

Решение. В таблице могут быть пять строк: заполним первую числами 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 (слева направо); заполним вторую строку $2, 7, \ldots, 37$; заполним третью числами от 3 до 38; четвертую — от 4 до 39; пятую — от 5 до 40. Докажем, что более пяти строк в таблице быть не может. Действительно, если строк ≥ 6, то размах чисел в таблице заведомо больше 12. Выберем любое число a такое, что в таблице есть, как минимум, шесть чисел меньших a и, как минимум, шесть чисел больших a. Разделим всю таблицу на две области: числа меньшие a и числа больше либо равные a. Пары ячеек, которые содержат числа из разных областей назовем пограничными. Граница может проходить либо по горизонтали, либо по вертикали и содержит тогда не менее шести пограничных ячеек. Но это невозможно, так как число в пограничной ячейке не может отличаться от a более, чем на 5.

Ответ. Пять строк.

Критерии проверки. 20 баллов – ответ верный, обоснован. 18 баллов – ответ верный, пробелы в обосновании.
15 баллов – приведен верный пример, нет обоснования, что больше нельзя.
7 баллов – приведен неверный пример *или* ответ верный, но нет ни примера, ни доказательства.
2 балла – ответ неверный, решение практически отсутствует.