

## 7 – 8 КЛАССЫ

**Задача 1.** Известно, что числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  все отличны от нуля и таковы, что прямые  $y = ax + bc$ ,  $y = bx + ac$  и  $y = cx + ab$  имеют общую точку. Докажите, что по крайней мере две из этих трех прямых совпадают.

**Решение.** Общая точка (пусть ее координаты равны  $(x, y)$ ) должна лежать на всех трех прямых, т. е. удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} y = ax + bc, \\ y = bx + ac, \\ y = cx + ab. \end{cases}$$

Вычитая из второго первое, получим  $(b - a)x + (a - b)c = 0$ , откуда либо  $b = a$ , либо  $x = c$ . Вычитая из третьего второе, получим  $(c - b)x + (b - c)a = 0$ , откуда либо  $c = b$ , либо  $x = a$ . Итак, либо  $a = b$  (совпадают первые две прямые), либо  $b = c$  (совпадают вторая и третья), либо  $x = c = a$  (совпадают первая и третья).

**Критерии проверки.** 10 баллов — верное решение;  
7 баллов — неполное обоснование;  
4 балла — есть разумные продвижения *или* все прямые совпали;  
2 балла — есть только попытка решения.

---

**Задача 2.** На одной из планет земной группы было решено проложить тоннель под горным хребтом. Для простоты будем считать, что начальная и конечная точки тоннеля находятся на нулевой высоте «над уровнем моря». Строители проложили тоннель по прямой линии, корректируя свои действия с помощью лазерного луча. Однако после окончания работ было замечено, что подземные воды, попадающие в тоннель, скапливаются в его центре.

а). Объясните, почему так произошло.

б). Как следует изменить форму тоннеля, чтобы нейтрализовать этот эффект? Радиус планеты примите равным 3400 км, длина тоннеля — 2 км.

**Решение.** а). Проведем сечение планеты, содержащее тоннель и центр планеты. Получим окружность (поверхность планеты) и хорду этой окружности (тоннель). Расстояние от центра планеты до середины хорды меньше, чем до концов — соответственно, вода стекает к центру тоннеля.

б.) Необходимо изменить форму тоннеля, проложив его не по прямой, а по дуге большого круга. Вычислим, какую коррекцию надо провести в центре тоннеля. Обозначим его концы через  $A$  и  $B$ , середину через  $C$ , а центр планеты через  $O$ . Тогда  $OA = OB = 3400$  км,  $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3400^2 - 1} \approx 3399,99985$  км, т. е. коррекция составляет всего 15 см.

**Ответ.** Достаточно изменить форму дна тоннеля, подняв его в окрестности центра тоннеля на 15 см.

**Критерии проверки.** 15 баллов — полное решение;  
12 баллов — близкое, но неверное число в пункте б);

- 10 баллов — только качественные объяснения без подсчетов;  
7 баллов — не вполне верное объяснение в пункте а) и нет подсчетов;  
5 баллов — решен только пункт а);  
2 балла — есть только попытка решения.
- 

**Задача 3.** Планета, обнаруженная космической экспедицией, полностью покрыта водой, а сверху — слоем льда. Однако в сплошном слое льда встречаются полыньи. Для нужд экспедиции сверху был спущен контейнер, представляющий собой стальной полый куб с ребром 4 метра и толщиной стенок 4 см. Внутри куба помещен полезный груз массой 34 тонны. Из-за ошибки оператора груз приземлился не на сплошной массив льда, а на отдельно плавающую льдину. Льдина представляет собой круглый диск радиусом 8 метров и толщиной 5 метров. Утонет ли контейнер, если он приземлится точно в центре льдины? Не в центре? Плотности веществ примите равными: сталь —  $7900 \text{ кг/м}^3$ , лед —  $900 \text{ кг/м}^3$ , вода —  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** Объем контейнера  $V = 4^3 = 64 \text{ м}^3$ . Масса контейнера равна 34000 кг плюс масса стенок. Чтобы найти массу стенок, найдем вначале объем внутренней части контейнера. Учитывая, толщину стенок, получим куб размера  $4 - 2 \cdot 0,04 = 3,92 \text{ м}$ . Тогда  $V_0 = 3,92^3 = 60,236288 \text{ м}^3$ . Тогда масса стенок равна  $m = \rho(V - V_0) = 7900 \cdot 3,763712 \approx 29733,3 \text{ кг}$ . Итого, общая масса контейнера с грузом равна  $M = 63733,3 \text{ кг}$ . Средняя плотность контейнера с грузом равна  $\rho = M/V = 995,83 \text{ кг/м}^3$ .

Если бы контейнер попал в воду (т. е. льдины бы просто не было), то он бы не утонул — его средняя плотность меньше плотности воды. Тем более, он не утонет, если окажется на льдине, так как плотность льда еще меньше. Если контейнер приземлился точно в центр льдины, то он притопит эту льдину в воду, но не утонет. Если контейнер окажется не в центре льдины, то льдина накренится, контейнер, скорее всего, по ней соскользнет в воду, но, опять же не утонет. Правда, при соскальзывании, он скорее всего, перевернет льдину, которая накроет плавающий в воде контейнер, как крышка.

**Ответ.** Контейнер в любом случае не утонет.

- Критерии проверки.** 15 баллов — полное решение;  
12 баллов — пункт а) решен, а в пункте б) только идея;  
10 баллов — неверный обсчет стенок *или* арифметические ошибки;  
8 баллов — неверный обсчет стенок *и* арифметические ошибки;  
6 баллов — множественные ошибки;  
5 баллов — неверная физика *или* не доведено до ответа;  
2 балла — есть только попытка решения.
- 

**Задача 4.** Номер билетика на прогулку на луноходе состоит из шести цифр. Назовем

билетик «очень счастливым», если сумма цифр, стоящих на четных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечетных местах. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, проверяющую, является ли данный билетик «очень счастливым». Программа должна выводить YES, если это так, и NO в противном случае.

Пример.

Ввод:

123475

Вывод:

YES

**Решение.** Вариант программы на Python

```
a=int(input())
b=(a % 10) + (a % 1000 // 100) + (a % 100000 // 10000)
c=(a % 100 // 10) + (a % 10000 // 1000) + (a // 100000)
if (b==c): print("Yes")
else: print("No")
```

**Критерии проверки.** 20 баллов — верное решение;

15 баллов — небольшие синтаксические ошибки;

10 баллов — верная идея, синтаксические ошибки;

5 баллов — верная идея, грубые синтаксические ошибки;

2 балла — верная идея, нет программы.

**Задача 5.** На планете  $N$  планируется установить высокочастотные (ВД) и низкочастотные (НД) сейсмические датчики. Датчики должны быть установлены так, что на расстоянии ровно 2 км от каждого ВД должны находиться как минимум два НД. Известно, что было установлено четыре НД. Каким могло быть наибольшее количество ВД при таких условиях? Нарисуйте расположения датчиков.

**Решение.** Фактически, надо так расположить 4 точки на плоскости, чтобы можно было провести как можно больше окружностей радиуса 2, на каждой из которой лежали бы как минимум 2 точки. Обозначим наши точки  $A, B, C$  и  $D$ . Тогда окружности могли бы пройти через пары  $AB, AC, AD, BC, BD$  и  $CD$  — максимум двенадцать окружностей (через пару точек на плоскости можно провести максимум две окружности). Для того, чтобы через пару точек проходили две окружности радиуса два необходимо и достаточно, чтобы расстояние между точками было меньше 4 (меньше диаметра окружности). Тогда подойдет такое расположение:  $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (2, 0), D = (3, 0)$ .

**Ответ:** Например,  $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (2, 0), D = (3, 0)$ .

**Критерии проверки.** 15 баллов — верное решение;

12 баллов — верная идея, но нет численной реализации;

5 баллов — неверный вариант *или* неверно понято условие;

2 балла — только попытка решения.

---

**Задача 6.** Искусственный спутник Луны выведен на круговую орбиту над ее экватором. В одной из точек экватора в лунной коре находится порода повышенной плотности — маскон (массовый концентрат).

а). Будет ли меняться со временем орбита спутника?

б). Если будет, то как?

в). Как изменится ситуация, если в диаметрально противоположном первому маскону месте будет находиться еще один, такой же по массе?

**Решение.** Маскон притягивает спутник, и при пролете над ним вектор скорости, который изначально был параллелен плоскости местного горизонта, немного отклоняется вниз, к поверхности Луны. В результате круговая орбита превращается в эллиптическую, периселений которой (ближайшая к Луне точка) с каждым витком становится ниже, зато апоселений, расположенный напротив — выше. При этом, при каждом пролете над масконом центральные проекции переселения и апоселения на поверхность Луны будут еще и смещаться. Периселений не будет находиться строго над масконом, поскольку вектор скорости в этой точке не параллелен плоскости местного горизонта. Эволюция орбиты через несколько месяцев заканчивается столкновением спутника с Луной, поскольку периселений оказывается под поверхностью Луны.

Если масконов два, то второй (симметричный первому) маскон будет располагаться после периселения, но до апоселения орбиты. Таким образом, вектор скорости спутника над этим масконом слегка отклонен от плоскости местного горизонта в сторону от Луны. Вторым масконом будет отклонять вектор обратно, к Луне, исправляя таким образом орбиту (стремясь вернуть ее к окружности). Таким образом, время жизни спутника на орбите Луны увеличится. При этом, орбита не обязана оказаться стационарной. Для того, чтобы орбита была стационарной необходимо, чтобы периселений оказался строго посередине между масконами. Этого, однако, можно добиться, подбирая высоту орбиты и начальную скорость спутника (скорость при выходе на орбиту).

**Критерии проверки.** 25 баллов — верное решение;

10 баллов — есть разумные рассуждения по нескольким пунктам;

5 баллов — есть понимание, что маскон меняет орбиту, и частично правильное описание этой орбиты;

2 балла — есть только попытка решения.