9 — 10 КЛАССЫ

Задача 1. Найдите наименьшее восьмизначное натуральное число, десятичная запись которого оканчивается на 2024 и которое делится на 17.

Решение. По условию, искомое число имеет вид $x = \overline{abcd2024}$, где a, b, c, d — цифры. Попробуем взять цифру a наименьшей возможной, т. е. будем искать наше число в виде

$$x = \overline{1bcd2024} = 10000000 + b \cdot 1000000 + c \cdot 100000 + d \cdot 10000 + 2024.$$

Отбросим все, что заведомо делится на 17, а именно, запишем $2024 = 119 \cdot 17 + 1$, $10000 = 588 \cdot 17 + 4$, $100000 = 5882 \cdot 17 + 6$, $1000000 = 58823 \cdot 17 + 9$, $10000000 = 588235 \cdot 17 + 5$. Получим, что на 17 должно делиться число $y = 5 + 9b + 6c + 4d + 1$, т. е. $9b + 6c + 4d + 6 = 17k$. Чтобы x было минимальным, можно попробовать взять $b = c = 0$. Получаем уравнение $4d + 6 = 17k$. Перебирая $d = 0,\ 1, \ldots,\ 9$, получим в левой части $6,\ 10,\ ,14, \ldots 42$ — единственное подходящее $d = 7$.

Ответ. 10072024.

Критерии проверки. 10 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
7-8 баллов — ответ верный, есть пробелы в обосновании.
3 балла — найден неоптимальный вариант *или* ответ дан, но решение полностью отсутствует.
2 балла — есть попытка решения, ответ не получен.

Задача 2. Алексей находится в пункте A и хочет успеть на электричку, которая отправляется из пункта D через 1 час 50 минут. Расстояние между пунктами A и D по прямой составляет 10 км. Скорость движения Алексея пешком равна 5 км/ч, при этом он может двигаться с этой скоростью в любом направлении, независимо от наличия дороги. Из пункта A в пункт D как раз отправляется попутная машина, которая движется со скоростью 50 км/ч, но только по дороге. Дорога из A в D идет сначала по прямой до пункта C, а затем – по прямой от C до D. Может ли Алексей успеть на электричку, если $AC = 50$ км, а $\angle CAD = 60^o$? Как следует двигаться Алексею, чтобы добраться до станции за минимальное время?

Решение. У Алексея есть три возможности: идти пешком от начала до конца, ехать на машине от начала до конца (варианты с высадкой из машины, движения пешком, а затем снова посадки в машину приводят, очевидно, к тому же времени в пути) или вначале ехать на машине, а потом идти пешком. В первом случае время в пути $T_1 = \frac{AD}{5} = 2$ — Алексей не успевает. Найдем CD по теореме косинусов: $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 60^o} = \sqrt{2100}$. Тогда во втором случае время в пути $T_2 = \frac{AC+CD}{50} = \frac{50+10\sqrt{21}}{50} > 1.9$ часа — вновь не успевает. Проведем высоту DB к стороне AC. Тогда $DB = AD \sin 60^o = 5\sqrt{3}$, а $AB = AD \cos 60^o = 5$. Если доехать на машине до точки B, а затем идти пешком, то получим время $T_3 = \frac{AB}{50} + \frac{BD}{5} = 0.1 + \sqrt{3} < 1.8321$ часа — Алексей успевает за $4,5$ секунды до отхода электрички. Последний вариант, однако не является оптимальным. Найдем точку X на стороне AC, в которой надо покинуть машину, чтобы получить оптимальное время. Обозначим $\angle DXB = \alpha$, тогда $DX = \frac{BD}{\sin \alpha}$,

$BX = \frac{BD\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а время в пути

$$T_4 = \frac{AB}{50} - \frac{BX}{50} + \frac{DX}{5} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{50}\cdot\frac{10-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.1 + \frac{\sqrt{3}}{100}\cdot\frac{11\sin^2\frac{\alpha}{2} + 9\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и видим, что необходимо найти минимум выражения $f(x) = 11x + \frac{9}{x}$. Приравнивая к нулю производную, находим точку минимума $x_0 = \sqrt{\frac{9}{11}}$ и $f(x_0) = 2\sqrt{99}$. Тогда $T_4 = 0.1 + \frac{3\sqrt{33}}{50}$ часа (у Алексея 36 секунд в запасе), $\cos\alpha = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} = 0.1$, $\sin\alpha = \frac{2x_0}{1+x_0^2} = \frac{\sqrt{99}}{10}$,

$$AX = AB - BX = 5 - 5\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = 5 - 5\sqrt{3}\frac{2x_0}{1-x_0^2} = 5 - \frac{5}{\sqrt{33}} \approx 4,13 \text{ км}.$$

Ответ. Алексей может успеть. Чтобы добраться за минимальное время, ему следует проехать на машине $5 - \frac{5}{\sqrt{33}}$ км, а затем идти пешком по прямой к станции.

Примечание. Для поиска угла α можно воспользоваться законом Снеллиуса (преломление света при переходе из одной среды в другую), поскольку свет распространяется в точности по тому пути, время движения по которому является наименьшим. В первой «среде» (дорога) скорость движения в 10 раз больше, чем во второй. Луч начинает движение вдоль дороги, т.е. под углом $\gamma = 90^o$ к вертикали. При сходе с дороги луч начинает движение под углом $90^o - \alpha$ к вертикали. Тогда $\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\sin\gamma} = \frac{v_2}{v_1} = 0.1$, откуда $\cos\alpha = 0.1$.

Критерии проверки. 15 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов — решение с арифметической ошибкой, ответ верный.
7 баллов — ответ неверный вследствие арифметической ошибки.
5 баллов — рассмотрены только два частных случая, ответ неверный.
4 балла — рассмотрен только один частный случай, ответ неверный.

Задача 3. Космический аппарат AB имеет форму длинной прямой спицы. Его длина ℓ много больше его толщины d. Плотность массы единицы длины космического аппарата однородна вдоль отрезка AB. Точка C расположена вне космического аппарата. Как направлен вектор силы $\vec{G}$ гравитационного притяжения, действующей на небольшую материальную частицу, находящуюся в точке C, со стороны космического аппарата?

Решение. Рассмотрим вначале случай, когда C не лежит на прямой AB. В этом случае вектор $\vec{G}$ будет направлен по биссектрисе угла ACB (обозначим ее CD)— докажем это. Разобьем угол ACB лучами, проведенными из C, на много маленьких углов раствора δ. Тогда AB разобьется на много маленьких отрезков, которые при малом δ можно считать материальными точками. Масса этой точки равна $\Delta m = \rho\cdot\Delta V = \pi d^2\rho\cdot\Delta l$, где ρ — плотность материала аппарата (по условию, она постоянна). Рассмотрим теперь один из углов нашего разбиения, который образует треугольник CXX'. Пусть h — длина высоты из точки C к отрезку AB. Тогда

$$S_{\triangle CXX'} = \frac{1}{2}h|XX'| = \frac{h}{2}\Delta l = \frac{1}{2}|CX||CX'|\sin\delta.$$

Итак, $\Delta m = \pi d^2 h^{-1}\rho|CX||CX'|\sin\delta$. По закону Ньютона, сила, с которой притягивает материальная точка XX' небольшую материальную частицу массы M, находящуюся в точке C, равна

$$|\Delta F| = \frac{GM\Delta m}{R^2} = \pi GM\rho d^2 h^{-1}\sin\delta\frac{|CX||CX'|}{R^2} \approx \pi GM\rho h^{-1}d^2\sin\delta,$$

поскольку расстояние от C до нашей точки $R \approx |CX| \approx |CX'|$. При этом, вектор $\Delta\vec{F}$ направлен из C на точку, т.е. вдоль вектора $\vec{CX}$. Общая сила, с которой действует аппарат AB на массу в точке C, равна сумме всех таких сил. Теперь рассмотрим симметричный относительно биссектрисы CD треугольник CYY' (т.е. такой, что углы XCD и YCD равны). Получим такую же по величине силу, направленную вдоль $\vec{CY}$. Складывая два равных вектора, получим, что их сумма будет направлена по биссектрисе CD (поскольку углы XCD и YCD равны). Остается заметить, что поскольку $\angle ACD = \angle BCD$, то каждому вектору силы слева от CD соответствует симметричный вектор справа. Сложив все вектора попарно, получим, что результирующая сила направлена по биссектрисе CD.

Теперь рассмотрим вырожденный случай, когда C лежит на продолжении отрезка AB. В силу симметрии очевидно, что здесь $\vec{G}$ будет направлен по прямой AB в сторону аппарата.

Ответ. Если C не лежит на прямой AB, то $\vec{G}$ направлен по биссектрисе угла ACB. Если C лежит на прямой AB, то $\vec{G}$ направлен вдоль этой прямой в сторону аппарата.

Критерии проверки. 20 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
10 баллов — есть верная идея о направлении вектора, ответ не получен.
7 баллов — есть попытка рассчитать вектор как равнодействующую, ответ не получен.
5 баллов — неверный вывод о том, что вектор направлен по медиане.
3 балла — неверная идея о том, что вектор направлен по высоте.

Задача 4. В какой области Земли наблюдатель может заметить, что Солнце движется по отношению к нему либо слева направо, либо справа налево в зависимости от времени года? Поясните свой ответ.

Решение. По определению Солнце может кульминировать в зените на тропиках (северном и южном). Для наблюдателя северного полушария севернее северного тропика Солнце всегда движется слева направо и кульминирует к югу от зенита. Для наблюдателя точно на тропике оно движется также, кроме одного дня в году (летнего солнцестояния в северном полушарии), когда траектория его движения перпендикулярна горизонту, а кульминирует оно в зените. Если наблюдатель находится южнее северного тропика, то Солнце может кульминировать и к югу, и к северу от зенита, соответственно, наблюдатель, обращенный лицом к Солнцу будет видеть его движение либо слева направо (кульминация к югу от зенита), либо справа налево (кульминация к северу от зенита). Такой же ход рассуждений может быть приведен для наблюдателя в южном полушарии. Таким образом, эта область — кольцо между северным и южным тропиками, не включающее сами тропики.

Ответ. В приэкваториальной области Земли южнее северного тропика и севернее южного тропика с широтами от приблизительно 23 градуса 26 минут северной широты до приблизительно 23 градуса 26 минут южной широты (точное значение положения тропиков на поверхности Земли циклически меняется из-за нутации земной оси и является непостоянным).

Критерии проверки. 10 баллов — ответ верный, полностью обоснован.
8 баллов — есть пробелы в обосновании или ответ не вполне строго описывает искомую область.
3 балла — ошибочный вывод о том, что искомая область находится на полюсах.
2 балла — есть некоторые разумные рассуждения, ответ не получен.

Задача 5. Пусть X — некоторое четырехзначное число. Индийский математик Капрекар предложил применить к нему следующее преобразование: он взял наибольшее число, которое можно получить из X перестановкой цифр, и вычел из него наименьшее число, которое можно получить перестановкой цифр из X (при этом допускается, чтобы после перестановки число начиналось с нуля, например запись 0001 будет означать число 1). Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая вычисляет преобразование Капрекара для данного числа X.
Пример.
Ввод:
5707
Вывод:
7173
Пояснение: в самом деле, $7750 - 0577 = 7173$.

Решение. Вариант программы на Python

```
Y="".join(list(sorted(input())))
print(int(Y[::-1])-int(Y))
```

Критерии проверки. 20 баллов — код работает корректно.
16 баллов — есть незначительные ошибки.
10 баллов — есть верный алгоритм, но код нерабочий.
5 баллов — код не завершен.

Задача 6. Искусственный спутник Луны выведен на круговую орбиту над ее экватором. В одной из точек экватора в лунной коре находится порода повышенной плотности – маскон (массовый концентрат).
а). Будет ли меняться со временем орбита спутника?
б). Если будет, то как?

в). Как изменится ситуация, если в диаметрально противоположном первому маскону месте будет находиться еще один, такой же по массе?

Решение. Маскон притягивает спутник, и при пролете над ним вектор скорости, который изначально был параллелен плоскости местного горизонта, немного отклоняется вниз, к поверхности Луны. В результате круговая орбита превращается в эллиптическую, периселений которой (ближайшая к Луне точка) с каждым витком становится ниже, зато апоселений, расположенный напротив — выше. При этом, при каждом пролете над масконом центральные проекции переселения и апоселения на поверхность Луны будут еще и смещаться. Периселений не будет находиться строго над масконом, поскольку вектор скорости в этой точке не параллален плоскости местного горизонта. Эволюция орбиты через несколько месяцев заканчивается столкновением спутника с Луной, поскольку периселений оказывается под поверхностью Луны.

Если масконов два, то второй (симметричный первому) маскон будет располагаться после периселения, но до апоселения орбиты. Таким образом, вектор скорости спутника над этим масконом слегка отклонен от плоскости местного горизонта в сторону от Луны. Второй маскон будет отклонять вектор обратно, к Луне, исправляя таким образом орбиту (стремясь вернуть ее к окружности). Таким образом, время жизни спутника на орбите Луны увеличится. При этом, орбита не обязана оказаться стационарной. Для того, чтобы орбита была стационарной необходимо, чтобы периселений оказался строго посередине между масконами. Этого, однако, можно добиться, подбирая высоту орбиты и начальную скорость спутника (скорость при выходе на орбиту).

Критерии проверки. 25 баллов — верное решение;
14 баллов — есть понимание, что орбита будет эволюционировать;
10–11 баллов — есть представление об эллиптичности орбиты, рассуждения о периселении и апоселении;
7 баллов — есть понимание, что маскон меняет орбиту, и частично правильное описание этой орбиты;
3 балла — есть понимание, что маскон меняет орбиту.