

Задача 1. Найдите все такие тройки a, b, c чисел, у которых среднее арифметическое $(a + b + c)/3 = -1$, среднее геометрическое $\sqrt[3]{abc} = 2$, а среднее гармоническое $\frac{3}{1/a + 1/b + 1/c} = -4$.

Решение. Упростим последнее равенство: $\frac{3abc}{bc + ac + ab} = -4$, откуда $ab + ac + bc = -6$. Составим многочлен $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ — тогда a, b и c являются его корнями. При этом,

$$P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x^3 - 8) + 3x(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 3x) = (x - 2)(x^2 + 5x + 4) = (x - 2)(x + 1)(x + 4).$$

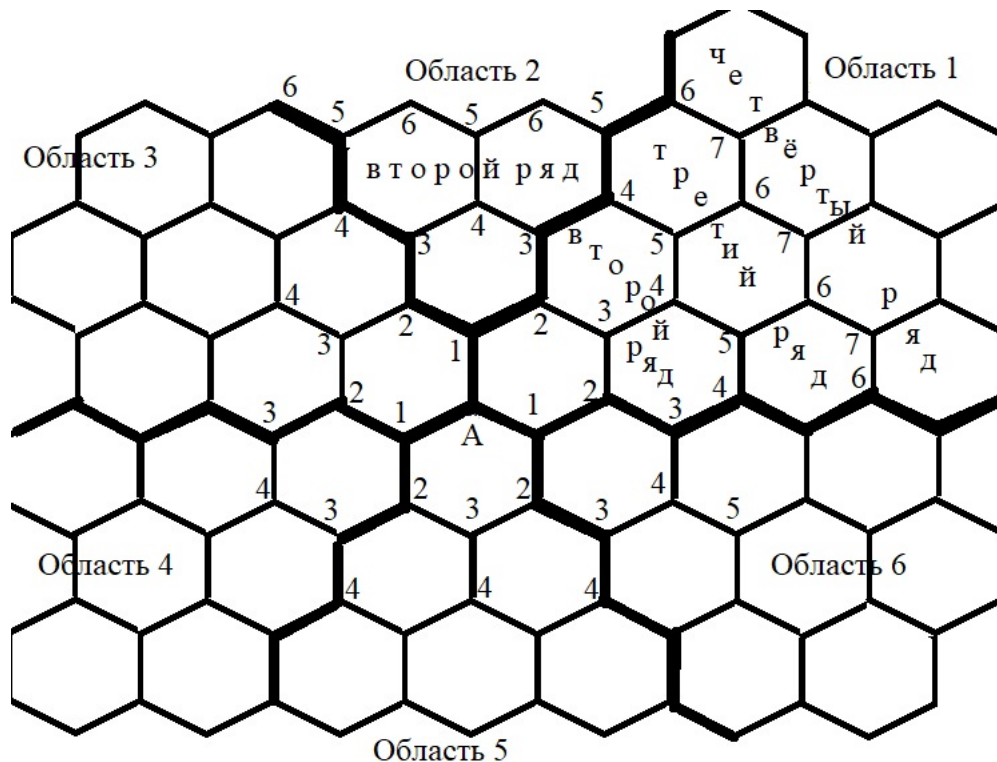
Таким образом, $\{a, b, c\} = \{-4, -1, 2\}$.

Ответ: любые перестановки тройки чисел $\{-4, -1, 2\}$.

Критерии проверки:

- 1 — минимальные продвижения
- 2 — составлена система (сумма, произведение, попарные произведения)
- 3 — угадана тройка, ответ без перестановок
- 5 — ответ угадан, единственность не доказана
- 5 — сведено к кубическому уравнению одной переменной, которое не удалось решить
- 10 — верно
- штраф 1 за арифметическую ошибку.

Задача 2. На плоскость нанесена сетка, ячейками которой являются правильные шестиугольники. От одного узла сетки до другого можно перемещаться только по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное отношение длины кратчайшего пути от узла A до узла B (по сетке) к длине отрезка AB .



Решение:

Повернем плоскость так, чтобы точка A была расположена так, как изображено на рисунке (расстояния при повороте не меняются). Зададим масштаб, взяв длину стороны ячейки 1. Разобьем всю плоскость на шесть областей, точка B лежит в одной из них. Видим, что области 1, 3 и 5 аналогичны друг другу (отличаются поворотом плоскости), так же как области 2, 4 и 6. Итак, достаточно рассмотреть области 1 и 2.

В первой области занумеруем ряды ячеек $n = 1, 2, 3, \dots$. Узлы сетки, лежащие на границе n -го и $n+1$ -го ряда занумеруем числом $k = 0, 1, \dots, n$ (снизу вверх). Для каждого узла найдем расстояние до точки A по линиям сетки — видим, что оно равно $2n$ для четных k и $2n+1$ для нечетных. Найдем координаты узлов на каждой границе: $((n-k/2)\sqrt{3}, 3k/2)$ для четных k и $((n-k/2)\sqrt{3}, 3k/2+1)$ для нечетных. Исследуем дробь (отношение длины пути по линиям сетки к длине отрезка) на максимум по n и k . В первом случае получаем

$$\frac{2n}{\sqrt{3(n-k/2)^2 + 9k^2/4}} \rightarrow \max.$$

Разделим на n и обозначим $x = k/n \in [0, 1]$. Получим задачу $\frac{2}{\sqrt{3(1-x+x^2)}} \rightarrow \max$, откуда

$x = 1/2$, максимум равен $2/\sqrt{3}$. Во втором случае получаем задачу

$$\frac{2n+1}{\sqrt{3(n-k/2)^2 + (3k/2+1)^2}} \rightarrow \max.$$

Разделим на $n + 1/2$, обозначим $x = k/(n + 1/2) \in [0, 1]$ и получим задачу $\frac{2}{\sqrt{3(1-x/2)^2 + (3x/2-1/(2n+1))^2}} \rightarrow \max$. Видим, что увеличение n лишь уменьшает дробь, так что берем $n = 1$. Находя минимум параболы по x , получим $x = 2/3$, максимум равен $3/2$.

В области 2 рассуждения аналогичны — разделим узлы сетки на уровни с номерами $n = 1, 2, \dots$, на каждом уровне занумеруем ячейки числами $k = -n, -n+1, \dots, n$ (слева направо). Расстояние от A до узлов сетки равно $2n$ для четных k и $2n-1$ для нечетных. Координаты точек получаются $(-n+k, 3n/2-1/2)$ для четных k и $(-n+k, 3n/2-1)$ для нечетных. Вновь получим две задачи на максимизацию

$$\frac{2n}{\sqrt{(-n+k)^2 + (3n-1)^2/4}} \rightarrow \max, \quad \frac{2n-1}{\sqrt{(-n+k)^2 + (3n/2-1)^2}} \rightarrow \max.$$

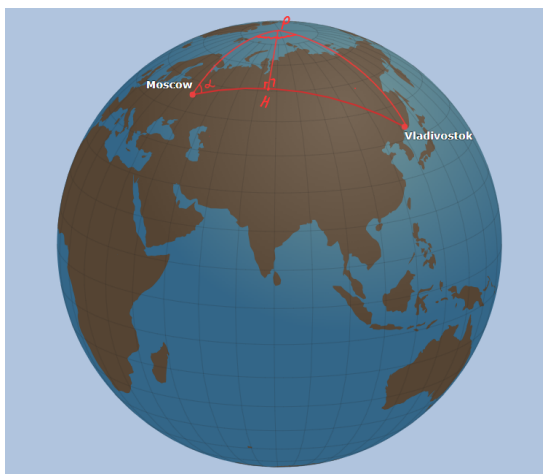
В обоих случаях максимум не достигается, но выражение не превосходит своего значения при $k = 0$ и $n \rightarrow +\infty$, которое равно $4/3$ в обоих случаях.

Выбирая максимум из $2/\sqrt{3}$, $3/2$ и $4/3$, получаем $3/2$. Это значение достигается, если A и B лежат на границе одной ячейки и диаметрально противоположны друг другу.

Ответ: 1, 5

Критерии проверки:

- 1 — рассмотрен какой-то один частный случай
- 2 — изучены случаи, когда точки в одном шестиугольнике
- 4 — есть верный ответ и есть попытки обосновать оптимальность
- 5 — рассматривается какой-то один из общих видов траекторий, есть верный ответ, есть попытки обосновать оптимальность
- 8 — потерян какой-то случай из траекторий общего вида, получен верный ответ
- 10 — полное верное решение.



Задача 3. Для составления аэрофотокарт из Москвы ($55,7^\circ$ с. ш. и $37,5^\circ$ в.д.) во Владивосток (43° с. ш. $131,5^\circ$ в. д) вылетел самолет. Самолет летел на высоте 5 км, внизу него была закреплена камера с квадратной матрицей размером 25 на 25 мм и фокусным расстоянием 100 мм. Найдите количество снимков, сделанных во время всего полета. Снимки не накладываются друг на друга и расположены без пропусков.

Решение: Кратчайшее расстояние между двумя точками на сферической поверхности, – это расстояние вдоль большого круга через эти точки. Мы можем использовать теорему синусов и косинусов, так как все стороны треугольников это дуги больших кругов. Рассмотрим треугольник MPV (здесь M — Москва, V — Владивосток, P — Северный полюс):

По сферической теореме косинусов:

$$\cos(MV) = \cos(MP) \cos(PV) + \sin(MP) \sin(PV) \cos(\Delta\lambda)$$

$$\cos(MV) = \cos(90^\circ - \varphi_{msk}) \cos(90^\circ - \varphi_{vl}) + \sin(90^\circ - \varphi_{msk}) \sin(90^\circ - \varphi_{vl}) \cos(\Delta\lambda)$$

$\Downarrow$

$$MV \approx 57,7^\circ$$

Найдем длину данного пути

$$l = \frac{MV}{360^\circ} \cdot 2\pi(R + h) \approx 6445 \text{ км}$$

Поле зрения камеры: $\angle\beta = \arctan\left(\frac{d}{2f}\right) \approx 0,124$ радиана.

Таким образом, один снимок захватывает квадратную область со стороной $a = 2h \tan \beta = 1,25$ км

Значит, всего необходимо снимков $N = \frac{l}{a} = 5156$

Ответ: примерно 5156 снимков.

Критерии проверки. Максимальный балл 10.

Арифметическая ошибка при подсчете длины пути: минус 2.

Арифметическая ошибка при подсчете площади снимка: минус 2.

Снимки расположены ромбами: минус 2.

Принципиальная ошибка при подсчете длины пути: минус 4.

Принципиальная ошибка при подсчете площади снимка: минус 4.

Нет подсчета длины пути: минус 5.

Нет подсчета размера снимка: минус 5.

Задачи нет = 0.

Задача 4. Марсианская экспедиция высадилась и основала обитаемую базу на экваторе. Для обеспечения связи на стационарную круговую экваториальную орбиту Марса (ареостационарную орбиту) был выведен спутник, точка стояния которого находится строго над базой. Проверьте, может ли Фобос или Деймос (естественные спутники Марса), двигаясь по своей орбите, оказаться на отрезке между спутником связи и базой (считайте, орбиты Фобоса и Деймоса круговыми экваториальными с радиусами $r_{\text{Ф}} = 9377,2$ км и $r_{\text{Д}} = 23458$ км). Если может, то на какое максимальное время может пропасть связь между спутником и базой? Средний диаметр Фобоса $D_{\text{Ф}} = 22,2$ км, Деймоса — $D_{\text{Д}} = 12,4$ км. Период обращения Марса вокруг своей оси $T_{\text{М}} = 24$ ч 37,5 минут, масса Марса $M = 6,45 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$. Экваториальный радиус Марса $R_{\text{М}} = 3396,2$ км.

Решение: Радиус орбиты спутника равен $R = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$, где T — период обращения, а M — масса планеты. Таким образом, радиус ареостационарной орбиты равен

$$R = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 60^2 + 37,5 \cdot 60)^2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 6,45 \cdot 10^{23}}{4\pi^2}} \approx 20\,463,5 \text{ км},$$

что больше радиуса орбиты Фобоса, но меньше радиусы орбиты Деймоса. Таким образом, создать проблемы связи может только Фобос.

Период обращения Фобоса вокруг Марса: $T_{\text{Ф}} = 2\pi R_{\text{Ф}}^{3/2} (GM_{\text{М}})^{-1/2} \approx 27499$ с, т.е. 7 ч 38 минут 19 с. Соответственно, Фобос обгоняет Марс в осевом вращении (в результате восходит на западе и садится на востоке). Угловая скорость движения Фобоса по марсианскому небу (относительно центра Марса) составит:

$$\lambda = \frac{2\pi}{T_{\text{Ф}}} - \frac{2\pi}{T_{\text{М}}} \approx 0,000158 \text{ с}^{-1}.$$

Соответственно, максимальное время пропадания связи (затмения), при котором спутник связи пройдет за Фобосом практически по его диаметру, составит: $T_{\text{зат}} = \frac{\theta}{\lambda}$, где θ — видимый угловой диаметр Фобоса при наблюдении из центра Марса. Поскольку по условиям задачи затмеваемый спутник связи находится в зените, то данная величина рассчитывается по формуле: $\theta = \frac{D_{\text{Ф}}}{r_{\text{Ф}}} \approx 0,0024$ рад. Таким образом, время затмения составит $T_{\text{зат}} = \frac{\theta}{\lambda} \approx 15,0$ с.

Ответ: проблемы может составить Фобос, время помех связи не превысит 15 с.

Критерии проверки. Максимум 10 баллов.

Небольшие отклонения от верного: минус 1 балл.

Не выписан радиус орбиты: минус 1 балл.

Большие отклонения из-за арифметических ошибок: минус 3 балла.

Угловой размер взять для наблюдателя на поверхности, а скорость — для наблюдателя в центре: минус 3 балла.

Взята разность скоростей, а не угловых скоростей: минус 5 баллов.

Задачи нет или нет продвижений = 0.

Задача 5. Строка называется палиндромом, если она читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Например, строки *abba*, *ata* являются палиндромами.

Дана строка. Ее подстрокой называется некоторая непустая последовательность подряд идущих символов. Напишите программу, которая определит, сколько различных подстрок данной строки является палиндромами. Любая подстрока из одного символа считается палиндромом.

Входные данные: одна строка, состоящая из маленьких латинских букв. Длина строки не превышает 100000 символов.

Выходные данные: одно число — количество подстрок данной строки, являющихся палиндромами

Пример

Входные данные

ababa

Выходные данные

5

Пояснение. В строке есть палиндромы *a*, *b*, *a*, *b*, *a*, *aba*, *bab*, *aba*, *ababa*. Из них 5 различных.

Решение:

Программа на Python

```
m = set()
s = input()
for i in range (len(s)):
    for j in range (i, len(s)):
        x = s[i:j+1]
        if x == x[::-1]:
            m.add(x)
print(len(m))
```

Программа на C

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <set>

using namespace std;
typedef long long ll;
ll p[100100];
const ll MOD = 1e9+7;
const ll q = 257;

ll getHs(vector<ll>& Hs, int l, int r){
    return (Hs[r+1] - Hs[l]*p[r-l]%MOD + MOD)%MOD;
}
```

```

ll getrevHs(vector<ll>& rHs, int l, int r){
    return (rHs[l] - rHs[r+1]*p[r-1]%MOD + MOD)%MOD;
}

void initP(){
    p[0] = 1;
    for(int i = 1; i <100100; i++)
        p[i] = (p[i-1]*q)%MOD;
}

int main()
{
    string str; cin >>str;
    initP();
    int n = str.length();
    vector<ll> Hs(n+1), rHs(n+1);
    set<ll> st;
    Hs[0] = rHs[n] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        Hs[i] = (Hs[i-1]*q % MOD + str[i-1])%MOD;
    }
    for (int i = n-1; i >= 0; i--)
    {
        rHs[i] = (rHs[i+1]*q % MOD + str[i])%MOD;
    }
    for (int l = 0; l < n; l++)
    for (int r = l; r < n; r++)
    if (getHs(Hs, l, r) == getrevHs(rHs, l, r))
    st.insert(getHs(Hs, l, r));
    cout << st.size();
    return 0;
}

```

Критерии проверки: Верное решение: 10

Ввод/ вывод не в соответствии с условием или несущественные опечатки: 9.

Есть существенные опечатки или неверный синтаксис в программе, но алгоритм верный: 7 или 8.

Программа работает верно не для всех входных данных, либо верный алгоритм при некорректной реализации: 5 или 6.

Решение не в виде кода, алгоритм решения задачи явно не указан: 2 или 3.

Указан ответ для других выходных данных, либо решение не связано с задачей, но является кодом: 1.

Задача 6. Климат нашей планеты в основном определяется тепловым равновесием, связанным с поглощением солнечного света и его переизлучением в космическое пространство в более длинноволновой, инфракрасной области спектра. Найдите равновесную температуру Земли $T_{\text{Зр}}$, если заданы: эффективная (соответствующая приближению абсолютно черного тела) температура Солнца $T_{\text{С}} = 5780 \text{ К}$; радиус Солнца $R_{\text{С}} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ км}$; среднее расстояние Земли от Солнца (астрономическая единица) $a = 1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$; интегральное сферическое альbedo Земли (альbedo Бонда) $A_{\text{З}} = 0,306$ (отношение всего отраженного, в том числе атмосферой, излучения Солнца к полному падающему на Землю потоку солнечного излучения). Орбиту Земли считайте круговой. Примите, что атмосфера и гидросфера Земли обеспечивают полное выравнивание температуры по поверхности.

Сравните полученное значение $T_{\text{Зр}}$ с известным средним значением температуры поверхности Земли, равным $+14^\circ$. Чем можно объяснить расхождение в этих значениях? Предложите максимально подробное объяснение.

Решение: Поскольку спектр излучения Солнца близок к спектру излучения абсолютно чёрного тела (как и большинства нагретых тел, включая Землю, для которой степень черноты — около 0,96), то плотность потока солнечного излучения может быть выражена с помощью закона Стефана–Больцмана. Плотность излучения равна $j = \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана–Больцмана. Тогда общая энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени равна $E_{\text{С}} = \sigma T_{\text{С}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{С}}^2$. Площадь сферы радиуса a (величина орбиты Земли) равна $4\pi a^2$, а значит через единицу площади проходит энергия равная $E = E_{\text{С}}/(4\pi a^2) = \sigma T_{\text{С}}^4 R_{\text{С}}^2/a^2$. Полная энергия, поглощенная поверхностью планеты, будет зависеть от альbedo Бонда, а также площади поглощающей поверхности. При этом необходимо учитывать угол падения излучения на разные участки поверхности: поток через участок пропорционален площади проекции участка на плоскость, перпендикулярную направлению потока. Проектирую освещенную Солнцем половину Земли на плоскость, перпендикулярную потоку, получим круг радиуса $R_{\text{З}} = 6400 \text{ км}$. Значит, полная поглощающая площадь — это площадь миделя, т.е. $S_{\text{погл}} = \pi R_{\text{З}}^2$. Тогда полная поглощенная энергия:

$$E_{\text{погл}} = S_{\text{погл}} \cdot (1 - A_{\text{З}})E = \frac{\pi R_{\text{З}}^2(1 - A_{\text{З}})\sigma T_{\text{С}}^4 R_{\text{С}}^2}{a^2}.$$

Поскольку принято, что благодаря теплопереносу и тепловой инерции температура поверхности Земли везде практически одинакова, то полная, излучаемая всей поверхностью Земли мощность: $E_{\text{изл}} = \sigma T_{\text{Зр}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{З}}^2$. Приравняв $E_{\text{погл}}$ и $E_{\text{изл}}$ (условие энергетического баланса без учета других источников энергии, помимо солнечной), после арифметических преобразований получим формулу для равновесной температуры Земли:

$$T_{\text{Зр}} = T_{\text{С}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\text{С}}}{2a}} \cdot (1 - A_{\text{З}})^{1/4}.$$

Подставив в полученную формулу исходные данные, рассчитаем температуру: $T_{\text{Зр}} \approx 254 \text{ К} = -19^\circ\text{С}$.

Полученное значение температуры заметно меньше средней температуры Земли (на 33 градуса). Указанная температурная разность обусловлена, прежде всего, парниковым

эффектом. Снижение концентрации углекислого газа и метана в атмосфере Земли ниже критического уровня может привести к глобальному оледенению («Земля-снежок»).

Критерии проверки: Максимум 20 баллов.

Нет объяснения, почему надо брать площадь миделя: вычитание 3 баллов.

ИЛИ вместо площади миделя взята площадь поверхности: вычитание 5 баллов.

Есть ошибки в формулах: вычитание 7 или 8 баллов.

ИЛИ арифметическая ошибка, сильно изменившая ответ: вычитание 2 баллов.

Равновесная температура не получена: вычитание 8 баллов.

ИЛИ нет понимания теплового баланса ИЛИ нет решения первой части: вычитание 10 баллов.

Объяснение во второй части верное (присутствует), но в ряду других и не считается главным: вычитание 2 баллов.

Объяснение парникового эффекта сжатое или его действие понижает температуру: вычитание 3, 4 или 5 баллов.

Какие-то доводы есть, но правильного нет: вычитание 8 баллов.

Вторая часть не решена: вычитание 10 баллов.