

Задача 1. Робот движется по следующей программе. Вначале он сдвигается на a_1 метров на восток, затем (из этой точки) на a_2 метров на север (числа a_1 и a_2 заданы в программе робота, положительны, но нам не известны). Затем робот вычисляет разность $a_3 = a_2 - a_1$ и если это число положительно, то сдвигается на a_3 метров на восток, если отрицательно — то на $-a_3$ метров на запад, а если равно нулю — остается на месте. Затем робот вычисляет разность $a_4 = a_3 - a_2$ и если это число положительно, то сдвигается на a_4 метров на север, если отрицательно — то на $-a_4$ метров на юг, а если равно нулю — остается на месте. Далее алгоритм повторяется, т. е. число $a_5 = a_4 - a_3$ отвечает за движение на восток/запад, число $a_6 = a_5 - a_4$ отвечает за движение на север/юг, и так далее. Где будет находиться робот после 2025 шагов по отношению к начальной точке?

Решение. Введем систему координат с центром в начальной точке и осями Ox , направленной на восток, и Oy , направленной на север. В этой системе координат после первого своего хода робот окажется в точке $(a_1, 0)$, а после второго хода — в точке (a_1, a_2) . На третьем ходе робот рассматривает три случая. Если число $a_3 = a_2 - a_1 > 0$, то он движется на a_3 метров на восток и попадает в точку $(a_1, a_2) + (a_3, 0) = (a_1 + a_3, a_2) = (a_2, a_2)$. Если число $a_3 = a_2 - a_1 < 0$, то робот движется на $-a_3$ метров на запад и попадает в точку $(a_1, a_2) - (-a_3, 0) = (a_1 + a_3, a_2) = (a_2, a_2)$. Наконец, если $a_3 = a_2 - a_1 = 0$, то робот стоит на месте в точке $(a_1, a_2) = (a_2, a_2)$. Итак, после третьего хода робот в любом случае окажется в точке (a_2, a_2) . Дальше рассуждения повторяются: после четвертого хода робот в любом случае окажется в точке $(a_2, a_2) + (0, a_4) = (a_2, a_3) = (a_2, a_2 - a_1)$. Вообще, последовательность чисел ведет себя так:

$$\begin{aligned} a_1, \quad a_2, \quad a_3 = a_2 - a_1, \quad a_4 = a_3 - a_2 = -a_1, \\ a_5 = a_4 - a_3 = -a_2, \quad a_6 = a_5 - a_4 = a_1 - a_2, \quad a_7 = a_6 - a_5 = a_1, \quad a_8 = a_7 - a_6 = a_2, \dots \end{aligned}$$

Видим, что далее последовательность циклически повторяется. Таким образом, после пятого хода робот будет в точке $(a_2, a_2 - a_1) + (a_5, 0) = (0, a_2 - a_1)$, а после шестого хода — в точке $(0, a_2 - a_1) + (0, a_6) = (0, 0)$. На следующем ходе робот должен сдвинуться на $a_7 = a_1$ метров на восток, а потом — на $a_8 = a_2$ метров на север, т.е. начнет повторять уже пройденный маршрут. Итак, робот движется циклически с периодом $T = 6$. Тогда после 2025 шагов он будет в той же точке, что и после 3 шагов, поскольку остаток от деления 2025 на 6 равен 3. Попадаем в точку (a_2, a_2) .

Ответ: на a_2 метров восточнее и a_2 метров севернее начальной точки.

Критерии проверки: 20 баллов — задача решена верно.

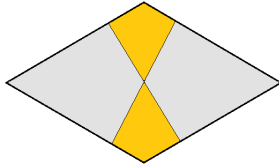
15 баллов — некритичные арифметические ошибки.

10 баллов — разобрался с перемещениями робота, но не нашел конечную точку.

5 баллов — не разобрался с перемещениями робота или логические ошибки.

0 баллов — задача не решена.

Задача 2. Флаг жителей планеты Бибердорф имеет форму ромба, сторона которого равна меньшей из диагоналей. Из центра ромба проведены четыре высоты к сторонам и область между ними окрашена в золотой цвет, а остальная часть флага — в серебряный. Найдите отношение площади, окрашенной в золотой цвет, к площади, окрашенной в серебряный.



Решение. Обозначим вершины ромба $ABCD$, где AC — большая, а BD — меньшая диагональ. Обозначим центр ромба O , а высоту из точки O к AB через OH . По условию, $AB = BD$, т.е. $AB = 2BO$. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом, так что треугольник ABO — прямоугольный с гипотенузой AB . Поскольку катет BO равен половине гипотенузы, то $\angle BAO = 30^\circ$. Тогда $\angle ABO = 60^\circ$. Треугольник BOH также прямоугольный, причем $\angle HBO = 60^\circ$, а значит, $\angle HOB = 30^\circ$. Тогда катет BH равен половине гипотенузы BO , т.е. $BH = \frac{AB}{4}$. Тогда $S_{ABO} = \frac{AB \cdot HO}{2} = \frac{4BH \cdot HO}{2} = 4S_{HBO}$. Для других трех частей флага $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$ все аналогично, откуда получаем, что площадь золотой части флага равна четверти всего флага. Тогда площадь серебряной части составляет $3/4$ площади флага, т.е. отношение равно $1 : 3$.

Ответ: $1 : 3$.

Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.

10 баллов — некритичные арифметические ошибки.

5 баллов — логические ошибки в рассуждениях *или* задача не доведена до конца.

0 баллов — задача не решена.

Задача 3. Определите, каким будет угловой размер Солнца, если наблюдать его в окрестности звезды Альфа Центавра. Известно, что свет проходит расстояние от Земли до этой звезды за 4,37 года, скорость света возьмите $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, радиус Солнца $R = 7 \cdot 10^5$ км.

Решение. Угловой размер равен удвоенному тангенсу угла α между лучом, исходящим от наблюдателя к центру Солнца, и лучом от наблюдателя к краю Солнца. Этот тангенс равен отношению радиуса Солнца к расстоянию от наблюдателя до Солнца. Найдем расстояние в световых секундах $4,37 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1,38 \cdot 10^8$ с и в метрах $d = 1,38 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 4,14 \cdot 10^{16}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 \cdot 10^8 \text{ м}}{4,14 \cdot 10^{16} \text{ м}} = 1,69 \cdot 10^{-8}.$$

Поскольку тангенс мал, то угол (в радианах) можно считать равным тангенсу, т.е. $\alpha = 1,69 \cdot 10^{-8}$ рад. Удвоим угол и переведем ответ в градусы

$$2\alpha = 2 \cdot 1,69 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 1,94 \cdot 10^{-6} \text{ град} = 1,94 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 60'' = 0,007''.$$

Ответ: 0,007 угловых секунд.

Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.

13 баллов — забыл умножить угол на два *или* неточно найдено количество секунд.

10 баллов — арифметические ошибки.

5 баллов — логические ошибки.

0 баллов — задача не решена.

Задача 4. Поле для игры представляет собой квадрат 7×7 , каждая из клеток которого либо свободна, либо является препятствием (см. рисунок, где препятствия обозначены темным цветом, а свободные клетки – белым). Два игрока перемещают по квадрату мячик ударами по горизонталям (первый игрок) и по вертикали (второй игрок). По условию, после удара мячик движется до первого препятствия или до внешней границы поля (если препятствий на пути мяча нет), после чего останавливается. Игроки ходят по очереди, начиная с первого. В свой ход игрок может нанести удар по мячу в любую из двух сторон (первый игрок – влево или вправо, а второй – вверх или вниз). Если удар в одну из сторон не возможен (мешает препятствие или внешняя стенка), то игрок обязан ударить в другую сторону. Если удар не возможен ни в одну, ни в другую сторону, то игрок пропускает ход. Первый игрок выигрывает, если мяч остановится на поле $a1$, а второй – если на поле $g7$. У кого из игроков есть выигрышная стратегия победить вне зависимости от действий противника, если в начале игры мяч стоит на поле $d4$? Что будет, если в начале мяч стоит на $d3$?

1							1
							2
							3
							4
							5
							6
							7
a	b	c	d	e	f	g	

Решение. Если мяч стоит на $d4$, то у первого игрока всегда есть способ выиграть. Для этого он бьет влево — мяч попадает на $c4$. Если теперь второй игрок бьет вверх, то мяч попадает на $c1$, после чего первый бьет влево и выигрывает. Если же второй игрок бьет вниз, то мяч попадает на $c7$. Тогда первый игрок бьет влево — мяч попадает на $a7$. Второй игрок не может бить вниз (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вверх, после чего проигрывает.

Если мяч стоит на $d3$, то теперь, наоборот, у второго игрока есть выигрышная стратегия. Если первый игрок ударит вправо (мяч попадет на $e3$), то второй игрок бьет вниз и выигрывает. Если же первый игрок ударит влево (мяч попадет на $c3$), то второй игрок бьет вниз, мяч попадает на $a7$. Теперь первый игрок не может ударить влево (мешает внешняя стенка) — он вынужден ударить вправо, после чего проигрывает.

Ответ: если стартовое поле $d4$, то у первого; если стартовое поле $d3$, то у второго.

Критерии проверки: 15 баллов — задача решена верно.

10 баллов — верное решение только для одного из игроков.

5 баллов — решение неправильное *или* есть только верный ответ, без решения.

0 баллов — задача не решена.

Задача 5. Составное число — это такое натуральное число, которое имеет хотя бы один делитель, отличный от 1 и самого числа. Давайте посмотрим на произведение всех составных чисел от A до B (не включая сами числа A и B). Сколько нулей может быть в конце такого произведения? Напишите программу, которая поможет вам ответить на этот вопрос.

Ввод: натуральные числа A и B

Вывод: натуральное число — количество нулей в конце числа, равного произведению всех составных чисел от A до B .

Примеры

Ввод

2 10

Вывод

0

Пояснение: между числами 2 и 10 заключены составные числа 4, 6, 8 и 9, произведение которых равно 1728 — ни одного нуля в конце этого числа нет.

Ввод

1 13

Вывод

1

Пояснение: между числами 1 и 13 заключены составные числа 4, 6, 8, 9, 10 и 12, произведение которых равно 207360 — заканчивается одним нулем.

Решение. Находить произведение составных чисел, а затем считать число нулей на конце этого числа — не очень хорошая идея. Дело в том, что это произведение может оказаться очень большим числом. Если писать программу на языке *C*, то может произойти переполнение типа (заведомо надо использовать тип *longint* вместо *int*). Если писать программу на Python, то переполнения не произойдет — этот язык поддерживает целочисленную арифметику, но время выполнения программы будет значительным (авторы проверили работу такой программы на обычном ноутбуке — для $A = 1$, $B = 100\,000$ время выполнения составило 29 секунд).

При этом, можно предложить гораздо более простой алгоритм. Нули на конце числа получаются только при перемножении двоек и пятерок, входящих как делители в перемножаемые составные числа. Тогда достаточно посчитать число двоек, входящих в произведение, число пятерок, а затем взять минимум из этих двух чисел. Найти число четных чисел на интервале (A, B) очень легко — оно равно $\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor$ (при этом надо дополнительно вычесть 1, если интервал включает число 2 — оно не составное). Затем найдем число чисел, кратных 4 — оно равно $\left\lfloor \frac{B}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$, затем кратных 8, и так далее, пока число не окажется равным нулю. Аналогично с пятерками. Ниже приведена программа на языке Python

```
a = int(input())
b = int(input())
deg=5
s=0
while (b//deg-a//deg>0):
    s+=b//deg-a//deg
    deg*=5
if (a<5)&(b>5): s-=1
deg=2
s1=0
while (b//deg-a//deg>0):
    s1+=b//deg-a//deg
    deg*=2
if (a<2)&(b>2): s1-=1
print(min(s,s1))
```

Критерии проверки:

Алгоритм требует работы с большими числами: вычитание 1 балла,

Медленная программа (заводится список или массив всех составных чисел): вычитание 2 баллов,

Есть синтаксические ошибки (больше двух), но легко исправимы: вычитание 3 баллов,

ИЛИ есть синтаксические ошибки, требуется доработка программы: вычитание 5 баллов,

ИЛИ Есть пробелы в алгоритме, требуется доработка программы: вычитание 10 баллов,

ИЛИ Программа не решает задачу: вычитание 17 баллов.

Нет задачи ИЛИ совсем нет продвижений: 0 баллов.

Задача 6. *Космический корабль находится в глубоком космосе, вдали от небесных тел. Действует ли на таком корабле закон Архимеда? Приведите максимально подробное объяснение.*

Решение.

Вспомним, как выводится закон Архимеда. Любой столб жидкости оказывает на дно сосуда давление, равное весу столба, деленному на площадь основания столба. Это давление перераспределяется во все стороны частицами жидкости в силу их постоянного броуновского движения. Если мы погрузим в жидкость предмет в форме параллелепипеда (для простоты), то давление на нижнюю грань будет больше, чем на верхнюю (первый столб воды выше второго). Так возникает выталкивающая сила.

Если космический корабль находится вдали от других небесных тел, то гравитационные силы пренебрежимо малы, сам корабль имеет малую массу, так что его гравитационной силой тоже можно пренебречь. В условии задачи, однако, ничего не сказано о движении корабля. Если он покоится или движется равномерно, то система является инерциальной и дополнительные силы не возникают. Если же корабль движется с ускорением (разгоняется, тормозит или поворачивает), то на борту корабля возникнут дополнительные силы, которые придадут столбу воды ненулевой вес и вызовут наличие выталкивающей силы. Так, если корабль движется по прямой с постоянным ускорением a , то вес будет равен $P = ma$, где m — масса столба воды. В этом случае закон Архимеда будет иметь классическую форму (с заменой g на a) в любой точке корабля. Если корабль вращается с постоянной угловой скоростью ω , то на расстоянии R от центра вращения возникнет центробежное ускорение $a = R\omega^2$, что вновь приведет к появлению выталкивающей силы. В этом случае закон Архимеда будет иметь классическую форму, но выталкивающая сила будет разной в разных точках корабля. **Критерии проверки:** 15 баллов — задача решена верно.

11 баллов — не рассматривается случай движения корабля *или* не объясняется, почему на космическом корабле закон действует так же.

7 баллов — не рассматривается случай движения корабля *и* не объясняется, почему на космическом корабле закон действует так же.

5 баллов — неправильный ответ при правильном понимании закона Архимеда; логические ошибки.

0 баллов — неверно понят физический смысл закона Архимеда или задача не решена.

Общая оценка равна сумме баллов