

Задача 1. $P(x)$ — многочлен третьей степени вида $x^3 + ax^2 + bx + c$. Известно, что он имеет три вещественных корня, причем сумма всех его корней равна их произведению. Кроме того, известно, что $P(1) = 1$. Найдите $P(2) - P(0)$.

Решение. Пусть x_1, x_2 и x_3 — три вещественных корня многочлена $P(x)$. Тогда

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

т. е. $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $c = -x_1x_2x_3$, т. е. $c = a$. Далее, $P(1) = 1 + a + b + c = 1$, откуда $b = -2a$. Тогда

$$P(2) - P(0) = 8 + 4a + 2b + c - c = 8 + 4a + 2b = 8.$$

Ответ: 8.

Критерии проверки: — Задача не решена.

± Получено соотношение $a + b + c = 0$ и получено, что необходимо найти значение выражения $8 + 4a + 2b$. Дальше продвижений нет или ответ получен в неверных предположений на значения корней или коэффициентов.

+ /2 Получено соотношение $a + b + c = 0$ и получено, что необходимо найти значение выражения $8 + 4a + 2b$. Кроме того, найдена связь одного из коэффициентов с суммой или произведением корней. Дальше продвижений нет.

+ Обоснованно получен верный ответ.

Задача 2. Космонавты провели эксперимент на МКС: в плоскую чашку Петри поместили четыре посева одинаковых микроорганизмов в четыре разные точки. Колонии микроорганизмов стали расти, формируя четыре круга C_1, C_2, C_3 и C_4 одинакового радиуса. По условиям эксперимента питательная среда в чашке заполняла не всю чашку Петри, а лишь круговое кольцо с внутренним радиусом r и внешним радиусом $R = 5$ см (центры окружностей совпадают). Каким надо взять число r и как надо расположить точки посева, чтобы круги C_1, C_2, C_3 и C_4 одновременно достигли внутренней границы питательной среды, ее внешней границы и при этом еще и попарно коснулись: C_1 с C_2 и C_4 ; C_2 с C_1 и C_3 ; C_3 с C_2 и C_4 ; C_4 с C_3 и C_1 ?

Решение. Пусть A, B, C и D — точки посева, O — центр чашки. В момент касания кругов и границ чашки имеем: AB — отрезок, соединяющий центры касающихся окружностей C_1 и C_2 . По условию, радиусы этих окружностей равны, обозначим их x . Тогда $AB = 2x$. Аналогично, $BC = CD = DA = 2x$, т. е. $ABCD$ — ромб. Поскольку окружности C_j касаются в этот момент внутренней окружности, то $AO = BO = CO = DO = r + x$. Значит, $ABCD$ — вписанный ромб, т. е. квадрат, а O — центр квадрата. Тогда $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 45^\circ$. Из теоремы Пифагора в $\triangle ABO$ получаем $4x^2 = 2(r + x)^2$, откуда $x\sqrt{2} = r + x$, $r = x(\sqrt{2} - 1)$. Поскольку окружности C_j касаются еще и внешней окружности, то $AO = BO = CO = DO = R - x$. Тогда $R - x = r + x$, т. е. $R = x(\sqrt{2} + 1)$, $x = \frac{5}{\sqrt{2}+1}$ см, $r = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 5(3 - 2\sqrt{2})$ см, $AO = BO = CO = DO = r + x = 5(2 - \sqrt{2})$.

Ответ: Надо взять $r = 5(3 - 2\sqrt{2}) \approx 1$ см, а точки посева поместить в вершины квадрата

с центром в центре чашки на расстоянии $5(2 - \sqrt{2}) \approx 3$ см от этого центра (посередине между внутренней и внешней окружностью).

Критерии проверки: — Задача не решена или дан только неверный ответ без обоснования.

± Задача решается в некотором изначально неверном предположении (о расположении или значениях радиусов) *или* только описано расположение кругов, радиус не найден.

± Есть верное представление о расположении окружностей; логическая ошибка при нахождении искомых величин.

+ Есть верное представление о расположении окружностей; арифметическая ошибка при нахождении искомых величин *или* радиус найден верно, нет ответа на вопрос о том, как должны располагаться центры окружностей.

+ Радиус найден верно, есть описание того, как должны располагаться центры окружностей.

Задача 3. *Российский космонавт решил сыграть в гольф на поверхности Луны. Космонавт находится на Северном полюсе и запускает мяч в сторону южного полюса с начальной скоростью равной 4 км/с. Оцените, через сколько минут мяч упадет на Луну. Рельефом Луны пренебрегите.*

Решение. Найдем вторую космическую скорость для поверхности Луны: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Луны, R — радиус Луны. Вспомним, что на поверхности Луны вес любого предмета примерно в 6 раз меньше, чем на Земле, т.е. $g_L = \frac{g_3}{6}$. По закону тяготения $F = \frac{GMm}{R^2}$, откуда $\frac{GM}{R} = \frac{R_L g_3}{6}$. Вспомним, что радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли, т.е. около 1600 км. Получаем для второй космической скорости $V_L \approx 2$ км/с. Так как скорость мяча больше второй космической скорости, то мяч никогда не вернется на Луну.

Критерии проверки: — Задача не решена или решение не имеет отношения к условию.

± Есть попытки решения, нет понимания того, что начальная скорость больше первой космической для Луны и ускорение свободного падения не будет постоянным.

+/-2 Есть понимание, что скорость больше первой космической, дальше ошибочные рассуждения или ответа нет.

± Есть доказательство того, что скорость больше первой космической и отсюда сделан вывод, что мяч не вернется на поверхность, сравнения со второй космической скорости нет.

+ Рассуждения в целом верные, есть арифметические ошибки.

+ Задача решена верно.

Задача 4. *В ходе своего орбитального движения Юпитер время от времени затмевает различные звезды с точки зрения наблюдателя на Земле. Оцените приблизительно время покрытия звезды Юпитером, если Юпитер находится в противостоянии, а покрытие (затмение) началось и закончилось в экваториальной области Юпитера.*

Решение. Период обращения Юпитера вокруг Солнца равен 11,86 лет, т.е. $T_1 = 11,862 \cdot 365,2422 \cdot 86400 = 374\,265\,143$ сек. Период обращения Земли вокруг Солнца равен 1 год, т.е. $T_2 = 365,2422 \cdot 86400 = 31\,556\,926$ сек. При этом, Земля и Юпитер вращаются в одном направлении по окружностям (эксцентриситетом орбит: 0,05 для Юпитера и 0,02 для Земли, можно пренебречь), лежащим в одной плоскости (наклонением в $1,3^\circ$ можно пренебречь). Тогда синодический период Юпитера при наблюдении с Земли равен $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \approx 34\,464\,000$ сек. Отсюда вычисляем угловую скорость вращения Юпитера для наблюдателя с Земли $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Остается найти угловой диаметр Юпитера при наблюдении с Земли в момент противостояния. Диаметр Юпитера равен примерно 71492 км, а расстояние от Юпитера до Земли в момент противостояния равно разности радиусов их орбит, т.е. $7,785 \cdot 10^8 - 1,496 \cdot 10^8 = 6,289 \cdot 10^8$ км. Отсюда угловой размер равен $\alpha \approx \frac{2 \cdot 7,149 \cdot 10^4}{6,289 \cdot 10^8} = 2,28 \cdot 10^{-4}$ рад. Время покрытия звезды Юпитером равно времени, за которое он пройдет свой угловой размер, т.е. $t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2,28 \cdot 10^{-4} \cdot 3,446 \cdot 10^7}{2\pi} \approx 1247$ сек.

Ответ: 20 минут 47 секунд. Или близкий ответ с учетом округления и возможного использования среднего радиуса и других усредненных величин.

Критерии проверки: — Задача не решена или решение не имеет отношения к условию.
 $\mp$ Есть представление о том, как нужно вычислить время покрытия, ответ неверный или отсутствует, обоснования нет или оно содержит грубые ошибки.

+/-2 Не учтено вращение Земли *или* не получено числовое значение времени покрытия.

$\pm$ Вращение Земли учтено с ошибкой: вычитаются линейные скорости, а не угловые или неверная формула для разности угловых скоростей.

+ Формула верная, есть арифметические ошибки или подставлено неверное значение (например, радиуса Юпитера).

+ Задача решена верно.

Задача 5. Долгими орбитальными вечерами космонавт Василий перебирает карточки с буквами и составляет из них слова. Составив очередное слово, космонавт Василий пытается понять, сколько других слов (не обязательно осмысленных) можно составить из букв этого слова. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, находящую ответ на этот вопрос.

Входные данные.

Вводится слово, строка из маленьких латинских букв не длиннее 15 символов.

Выходные данные.

Выведите одно целое число – искомое количество слов.

Пример

Входные данные

solo

Выходные данные

34

Пояснение. Можно составить слова *s, o, l, so, sl, ol, oo, lo, os, ls, sol, slo, ols, osl, los, lso, soo, oso, oos, olo, ool, loo, solo, sloo, sool, osol, oslo, ools, oosl, olos, olso, lsoo, loso, loos.*

Решение: Если использовать полный перебор, то решение простое. Однако сложность алгоритма такова, что за приемлемое время он работает только для слов с ≤ 12 букв. Функция *permutations* составляет список из всех выборок длины *i*. Функция *set* удаляет повторы в списке.

```

from itertools import permutations
s=input()
print(sum((len(set(permutations(s,i))) for i in range(1,len(s)+1))))

```

На самом деле, можно предложить алгоритм почти линейной сложности, например, основанный на построении суффиксного дерева.

Критерии проверки:

Задачи нет: 0

Алгоритм не доведен до кода ИЛИ неверная логика: от 1 до 3

Ошибки в логике И/ИЛИ ошибки в синтаксисе: от 4 до 8

Верно работает после исправления: 10

Работает верно, но факториальная сложность (перебор): 12

Обход перебора, работает верно: 14 или 15.

Задача 6. *Климат нашей планеты в основном определяется тепловым равновесием, связанным с поглощением солнечного света и его переизлучением в космическое пространство в более длинноволновой, инфракрасной области спектра. Найдите равновесную температуру Земли $T_{Зр}$, если заданы: эффективная (соответствующая приближению абсолютно черного тела) температура Солнца $T_C = 5780\text{ K}$; радиус Солнца $R_C = 6,96 \cdot 10^5\text{ км}$; среднее расстояние Земли от Солнца (астрономическая единица) $a = 1,496 \cdot 10^8\text{ км}$; интегральное сферическое альbedo Земли (альbedo Бонда) $A_З = 0,306$ (отношение всего отраженного, в том числе атмосферой, излучения Солнца к полному падающему на Землю потоку солнечного излучения). Орбиту Земли считайте круговой. Примите, что атмосфера и гидросфера Земли обеспечивают полное выравнивание температуры по поверхности.*

Сравните полученное значение $T_{Зр}$ с известным средним значением температуры поверхности Земли, равным $+14^\circ$. Чем можно объяснить расхождение в этих значениях? Предложите максимально подробное объяснение.

Решение: Поскольку спектр излучения Солнца близок к спектру излучения абсолютно чёрного тела (как и большинства нагретых тел, включая Землю, для которой степень черноты — около 0,96), то плотность потока солнечного излучения может быть выражена с помощью закона Стефана–Больцмана. На расстоянии орбиты Земли данная плотность потока (солнечная постоянная) с учётом её падения пропорционально квадрату расстояния: $E = \sigma T_C^4 (R_C/a)^2$, где σ — постоянная Стефана–Больцмана. Полная энергия, поглощенная поверхностью планеты, будет зависеть от альbedo Бонда, а также площади поглощающей поверхности. При этом необходимо учитывать угол падения излучения на разные участки поверхности, но в среднем можно считать, что полная поглощающая площадь — это площадь миделя, т.е. $S_{\text{погл}} = \pi R_З^2$. Тогда полная поглощенная мощность: $E_{\text{погл}} = S_{\text{погл}} \cdot (1 - A_З)E$. Поскольку принято, что благодаря теплопереносу и тепловой инерции температура поверхности Земли везде практически одинакова, то полная, излучаемая всей поверхностью Земли мощность: $E_{\text{изл}} = \sigma T_{Зр}^4 \cdot 4\pi R_З^2$. Приравняв $E_{\text{погл}}$ и $E_{\text{изл}}$ (условие энергетического баланса без учета других источников энергии, помимо солнечной), после арифметических преобразований получим формулу для равновесной температуры Земли:

$$T_{\text{Зр}} = T_{\text{С}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\text{С}}}{2a}} \cdot (1 - A_{\text{З}})^{1/4}.$$

Подставив в полученную формулу исходные данные, рассчитаем температуру: $T_{\text{Зр}} \approx 255 \text{ K} = -18^{\circ}\text{C}$.

Полученное значение температуры заметно меньше средней температуры Земли (на 32 градуса). Указанная температурная разность обусловлена, прежде всего, парниковым эффектом. Снижение концентрации углекислого газа и метана в атмосфере Земли ниже критического уровня может привести к глобальному оледенению («Земля-снежок»).

Критерии проверки: Максимум 20 баллов.

Нет объяснения, почему надо брать площадь миделя: вычитание 3 баллов.

ИЛИ вместо площади миделя взята площадь поверхности: вычитание 5 баллов.

Есть ошибки в формулах: вычитание 7 или 8 баллов.

ИЛИ арифметическая ошибка, сильно изменившая ответ: вычитание 2 баллов.

Равновесная температура не получена: вычитание 8 баллов.

ИЛИ нет понимания теплового баланса ИЛИ нет решения первой части: вычитание 10 баллов.

Объяснение во второй части верное (присутствует), но в ряду других и не считается главным: вычитание 2 баллов.

Объяснение парникового эффекта сжатое или его действие понижает температуру: вычитание 3, 4 или 5 баллов.

Какие-то доводы есть, но правильного нет: вычитание 8 баллов.

Вторая часть не решена: вычитание 10 баллов.