ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО КОСМОНАВТИКЕ 2024

РАЗМИНКА

КЛАСС 11

Полностью совпадает с разминкой для 9 и 10 классов.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАСС 11

Задача 1.

— В чем проблема-то... Сообщите координаты, через час доставим ученым их очень важный груз.
Сергей Лукъяненко 'Очень важный груз'.
Сборник 'Именем Земли'.

Найдите радиус и координаты центра окружности, проходящей через все точки пересечения парабол $y = x^2 - 1$ и $x = y^2 - 6y + 5$. Приведите полное решение.

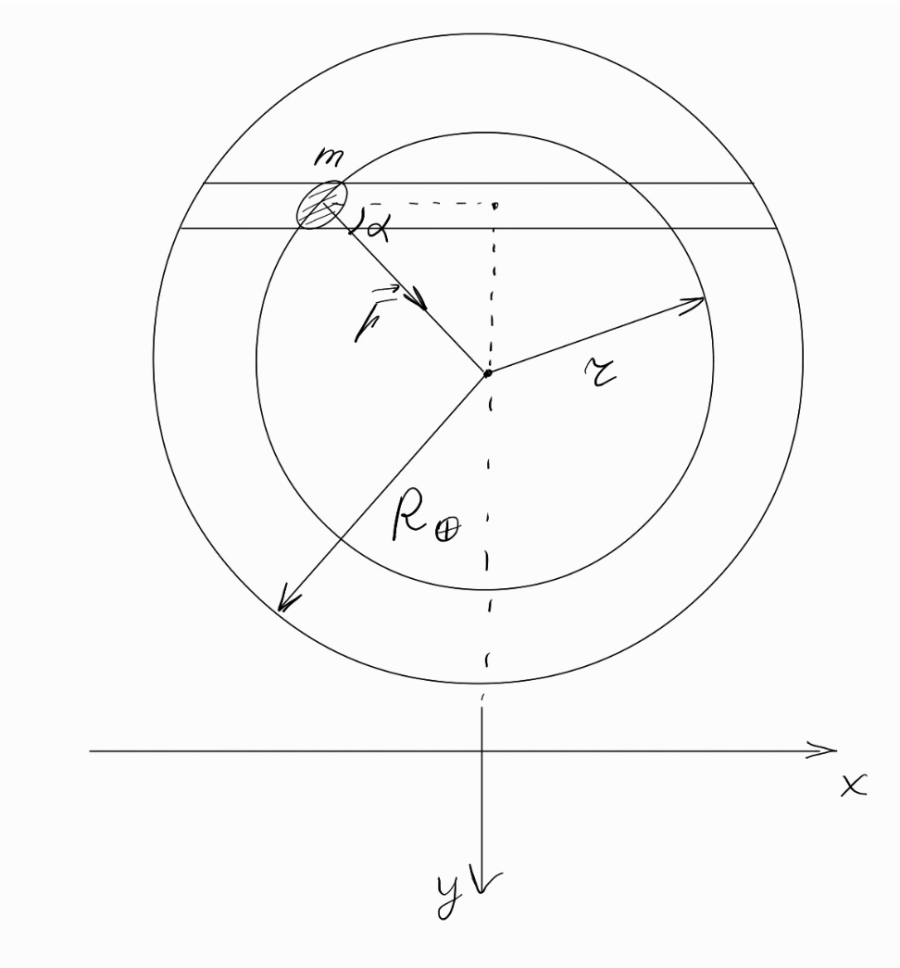
Решение, ответ и критерии проверки этой задачи см. в заданиях для 9-10 классов.

Задача 2.

— Ломать — не строить, — слегка смутившись, сказал Петрович.
— Увлекся. Я в детстве все мечтал дыру до центра Земли прорыть.
Сергей Лукъяненко 'Стройка века'.
Сборник 'Именем Земли'.

Между Главным зданием Московского Университета ($55,7^o$ с. ш. и $37,5^o$ в. д.) и космодромом Восточным (52^o с. ш. $128,3^o$ в. д.) прорыт прямолинейный тоннель, в котором проложены рельса. Сколько времени будет двигаться вагон из одного в другой конец туннеля, если отпустить его в Москве без начальной скорости? Найдите максимальную скорость вагона и точку, в которой она достигается. Трением, сопротивлением воздуха, различием широт пунктов и вращением Земли пренебрегите. Плотность Земли считайте одинаковой в любой точке.

Решение: Найдём радиус круга равных широт, на котором находится Москва и космодромом: $r = R_\oplus \cos\varphi \approx 3670$ км
Найдём длину туннеля: $l = (\lambda_{cosm} - \lambda_{msk}) \cdot r \approx 5800$ км Пусть вагон имеет массу m. Когда он находится на расстоянии r от центра Земли, то на него действует только внутренний слой Земли. Масса внутреннего слоя равна $M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$
Плотность Земли: $\rho = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3}$
Таким образом, масса внутреннего слоя: $M' = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_\oplus r^3}{R_\oplus^3}$



Найдем проекцию гравитационной силы на ось x: $F_x = F\cos\alpha = G\frac{mM'}{r^2}\cos\alpha = -\frac{mxGM}{R_\oplus^3} = -mg\frac{x}{R_\oplus}$

По второму закону Ньютона: $ma = -mg\frac{x}{R_\oplus}$

Ускорение по определению это $\ddot{x} = a$, Таким образом $\ddot{x} + \frac{g}{R_\oplus}x = 0$ – основное уравнение динамики гармонических колебаний.

Таким образом $\omega^2 = \frac{g}{R_\oplus} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R_\oplus}}$.

Значит, вагон будет двигаться от Москвы до космодрома за половину периода одного колебания, то есть $\tau = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi\sqrt{\frac{R_\oplus}{g}} \approx 42$ мин

Очевидно, что максимальная скорость будет посередине туннеля (в точке, которая максимально приближена к центру Земли).

Решение основного уравнения динамики гармонических колебаний равно $x(t) = A\cos\omega t$.

Амплитуда $A = \frac{l}{2}$. Значит, скорость равна $v(t) = \int x(t)dt = \frac{l\omega}{2}\sin\omega t$

Максимальная скорость вагона будет равна $v_{max} = \frac{l\omega}{2} \approx 3,6$ км/с

Ответ: примерно $3,6$ км/с

Критерии проверки: 10 - верное решение

9 - верное решение с опечаткой/арифметической ошибкой, не влияет на дальнейший ход рассуждений, приводит к физически правильному ответу./ Вместо времени движения

указан период колебания/ не учтено различие g при решении через потенциальную энергию
8 - верный ход решения, однако из-за опечатки или арифметической ошибки получен физически абсурдный ответ.
7 - В решение не выведено основное уравнение динамики гармонических колебаний/имеются пробелы в логике решения, но дальнейшее решение верное.
6 - Найден период одного колебания, но нет нет дальнейших продвижений по задаче или они неверные. Или получена максимальная скорость и неверно записано уравнение для периода/гармонических колебаний/не найдено время движения вагона
4 - не получено основное уравнение динамики гармонических колебаний (возможно решение без получения его в явном виде, тогда этот критерий не применяется).
3 - Получена формула для массы внутреннего слоя Земли/ Найдена длина туннеля + Обосновано, что в середине туннеля скорость максимальна
2 - Найдена только длина туннеля , дальнейших продвижений нет.
1 - Обосновано, что в середине туннеля скорость максимальна/ найден угол МСК-центр Земли - космодром. Или записана только формула для п2, но значение не посчитано в явном виде
0 - Решение лишено физического смысла, нет никакого продвижения по задаче или ответ никак не обоснован.

Задача 3.

Итак, после того, как при включении рубильника перегорела вся проводка...
— Ты что, ее последовательно подключал? — охнул Львович.
— А как еще можно? — удивился Петрович.
Сергей Лукьяненко 'Стройка века'.
Сборник 'Именем Земли'.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество всех точек координатной плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-4x+6y-3}{x^2+y^2-2x+4y+4} \leq 0, \\ ax-y=0, \end{cases}$$

образует прямолинейный отрезок.

Решение: В числители дроби стоит выражение $(x-2)^2+(y+3)^2-16$. Приравняв его к нулю, получим уравнение окружности с центром в точке $(2,-3)$ радиуса 4 (назовем эту окружность C_1). В знаменателе стоит выражение $(x-1)^2+(y+2)^2-1$. Аналогично, получим окружность C_2 с центром в $(1,-2)$ радиуса 1. Видим, что вторая окружность целиком находится внутри первой. Таким образом, дробь отрицательна, если точка лежит внутри C_1 (граница входит), но вне C_2. Второе уравнение системы задает прямую $y=ax$, проходящую через начало координат. Остается посмотреть, когда прямая пересекает указанную выше область по отрезку. Касание прямой и окружности C_2 произойдет при таком a, при котором система $y=ax, x^2+y^2-2x+4y+4=0$ имеет ровно одно решение. Подставляем и получаем квадратное уравнение. Находим его дискриминант $D/4=(2a-1)^2-4(1+a^2)=-4a-3$ и видим, что он обращается в ноль при $a=-3/4$.
Ответ: $a\in(-3/4,+\infty)$.
Критерии проверки. для геометрического решения: 10 - верно
9 - ошибочно включено граничное значение $=-3/4$ в ответ либо арифметическая ошибка при нахождении граничного положения
8 - неверно выбрано множество отрицательных параметров по граничному, неотрицательные включены в ответ
6 - неверно выбрано множество отрицательных параметров по граничному, неотрицательные не включены в ответ
4 - есть верное положение окружностей на плоскости, верно выбрана область решения системы
2 - выделены уравнения окружностей
штрафы: -2 за ошибку в уравнении окружностей, -2 за неверное положение окружностей на плоскости (далее при полученной автором картинке решение анализировалось по предыдущим критериям).
для аналитического решения: 10 - верно
9 - арифметические ошибки
8 - пробелы в обосновании некоторых случаев
6 - аналитически показано что случай $>-3/4$ (отрицательный дискриминант 2 параболы) подходит, но оставшиеся случаи практически не обосновано отброшены
4 - задача сведена к взаимному расположению двух парабол

Задача 4.

— И правильно, — поддакнул лаборант.
— Я сам студент. Биофак, пятый курс.
Сергей Лукьяненко 'Гаджет'.
Сборник 'Именем Земли'.

В процессе написания курсовой работы студент Костя сталкивается со следующим вопросом из области теории чисел: какие из натуральных чисел N можно представить в виде суммы дробей:

$$N = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{3}{n_3} + \ldots + \frac{2024}{n_{2024}},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_{2024}$ — некоторые (не обязательно различные) натуральные числа? Помогите Константину найти все такие числа. Приведите полное решение.

Решение: См. решение и критерии для этой задачи в задании для 9-10 классов.

Задача 5.

Выбегалло неуклюже нажал какую-то кнопку.
Экран слабо засветился синим, и на нем появилась
какая-то желтая таблица с английскими надписями.
Сергей Лукьяненко 'Временная суета'.
Сборник 'Именем Земли'.

Дана таблица, состоящая из N строк и M столбцов. В каждой клетке таблицы записано одно из чисел: 0 или 1. Расстоянием между клетками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) назовем сумму $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Для каждой клетки (i, j) начальной таблицы найдем ближайшую клетку, в которой записано число 1, и вычислим расстояние до этой клетке (если единица записана в клетке (i, j), то расстояние до нее равно 0). Гарантируется, что хотя бы одна единица в таблице есть. Полученное расстояние запишем в клетку (i, j) новой таблицы. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по данной таблице заполняет новую.
Входные данные.
В первой строке вводятся два натуральных числа N и M, не превосходящих 500. Далее идут N строк по M чисел — элементы таблицы.
Выходные данные.
Требуется вывести N строк по M чисел — элементы новой таблицы.
Пример.
Ввод:
2 3
0 0 1
1 0 0
Вывод:
1 1 0
0 1 1

Решение на языке C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int dist(int x_1, int y_1, int x_2, int y_2){
 return abs(x_1 - x_2) + abs(y_1 - y_2);
}

int main() {
 int N, M, i, j, k, l, d, d1;
 cin >> N >> M;
 const int max_dist = N + M;
 int mat[N][M], res_mat[N][M];
 for (i = 0; i < N; i++)
 for (j = 0 ; j < M; j++)
 cin >> mat[i][j];

 for (i = 0; i < N; i++)
 for (j = 0 ; j < M; j++) // each cell
 if (mat[i][j] == 1)
 res_mat[i][j] = 0;
 else{
  d = max_dist;
  for (k = 0; k < N; k++) // searching for the nearest ""1""
  for (l = 0; l < M; l++)
  if (mat[k][l] == 1 && (d1 = dist(i, j, k, l)) < d)
  d = d1;
  res_mat[i][j] = d;
 }

 for (i = 0; i < N - 1; i++){
  for (j = 0 ; j < M-1; j++) // printing the result
  cout << res_mat[i][j] << ' ';
  cout << res_mat[i][M-1] << endl;
 }
 for (j = 0 ; j < M-1; j++) // printing the result
 cout << res_mat[N-1][j] << ' ';
 cout << res_mat[N-1][M-1];
 return 0;
```

Решение на языке Python:

```
from collections import deque
N, M = map(int, input().split())
```

```
table = [list(map(int, input().split())) for _ in range(N)]
distance = [[-1] * M for _ in range(N)]
queue = deque()
for i in range(N):
 for j in range(M):
  if table[i][j] == 1:
   distance[i][j] = 0
   queue.append((i, j))
directions = [(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)]
while queue:
 x, y = queue.popleft()
 for dx, dy in directions:
  nx, ny = x + dx, y + dy
  if 0 <= nx < N and 0 <= ny < M and distance[nx][ny] == -1:
   distance[nx][ny] = distance[x][y] + 1
   queue.append((nx, ny))
for row in distance:
 print("" "".join(map(str, row)))
```

Критерии проверки: 10 Верное решение
9,5 - Неверный формат ввода и/ или вывода, либо нет вызова функции, в которой реализовано решение
9 - Отсутствие ввода с клавиатуры
6 - Верное решение для матрицы фиксированного размера или только некоторых входных данных
4 - Логически верное решение, содержащее значительные синтаксические ошибки
0 - Нет решения

Задача 6.

Люк упорно не хотел открываться.
Наконец до Ингвара дошло, что автоматика
не собирается выпускать его из станции без скафандра.
Сергей Лукьяненко. '«Л» — значит люди'.
Сборник 'Именем Земли'.

Космонавт в скафандре суммарной массой $m_k = 200$ кг связан страховочным тросом длиной $L = 100$ м с космической станцией массой M ($M >> m_k$), движущейся вокруг Земли (радиус Земли $R = 6400$ км) по круговой орбите. Высота орбиты движения космической станции $H = 400$ км. Определите натяжение троса, если известно, что он все время ориентирован вдоль радиуса, направленного к центру Земли. Массу троса не учитывайте. Считайте Землю шаром с однородным распределением плотности. Ускорение свободного падения на поверхности Земли примите равным $g_0 = 9,8$ м/с^2/.

Решение: Центростремительное ускорение космической станции равно $a_1 = \omega^2(R+H)$, где ω — частота обращения станции вокруг центра Земли. Для космонавта ускорение равно $a_2 = \omega^2(R + H + L)$, т.е. со стороны космонавта возникает дополнительная сила $F = m(a_2 - a_1)$, которая и натягивает трос. Поскольку $\omega^2 = \dfrac{GM}{(R+H)^3}$, где M — масса Земли, а G — гравитационная постоянная, то получаем $F = mL\dfrac{GM}{(R+H)^3}$. Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$. Тогда $F = mL\dfrac{g_0R^2}{(R+H)^3} \approx 25,5$ Н.

Ответ: $25,5$ Н.

Критерии проверки: 10 - верное решение

9 - верное решение с 1-ой арифметической ошибкой

8 - расписано решение, получена формула с небольшой ошибкой / не посчитан численно ответ

7 - неверно расписано 1 из ускорений / сила

5 - неправильно расписаны центростремительные ускорения / представлены формулы для других ускорений, формула для силы верная

4 - неправильно расписаны центростремительные ускорения / формула для силы не верная.

2 - есть что-то разумное.

Задача 7.

Львович вздохнул и посмотрел в иллюминатор.
Их офис располагался в старой космической станции
на геостационарной орбите... если честно — дыра дырой!
Сергей Лукьяненко 'Сухими из воды'.
Сборник 'Именем Земли'.

Искусственный спутник Земли совершает полет по орбите с периодом T с и осуществляет съемку поверхности Земли. На спутнике установлена фотокамера с объективом. Линейные размеры матрицы фотокамеры: $a \times a$ см^2, количество пикселей: $N \times N$. Считая объектив состоящим из одной тонкой линзы, найдите ее фокусное расстояние F см, если такая фотокамера позволяет пространственное разрешение снимка местности L м.

Решение: Пусть размеры матрицы $a \times a$, а число пикселей $N \times N$. Тогда размер одного пикселя $d = \dfrac{a}{N}$. Разрешающая способность позволяет уместить в пределах одного пикселя объект размера L. Его угловой размер $\rho = \dfrac{L}{H}$, где H — высота орбиты. Пусть F — фокусное расстояние линзы. Тогда $d = \rho F$, $F = \dfrac{aH}{LN}$. Находим высоту орбиты $H = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} - R$, где R — радиус Земли, M — масса Земли, G — гравитационная постоянная, T — период обращения. Тогда

$$\textbf{Ответ:} \quad F = \frac{a}{LN}\left(\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R\right).$$

Критерии проверки: 10 - верное решение
9 - верное решение, однако ответ получен неправильный (неправильно что-то сократил)
5 - правильно записаны некоторые выражения (для размера одного пикселя / углового размера / общая формула для фокусного расстояния линзы), не расписана высоту орбиты / представлено неверное выражение для высоты орбиты
2 - есть что-то разумное.

Задача 8.

—Ты кто такая? — воскликнул Крылов. — Ты как в машину попала?
— Я маленькая девочка. Я сместила себя относительно пространства.
Вы меня выслушаете?
Сергей Лукьяненко 'Девочка с китайскими зажигалками'
Сборник 'Именем Земли'.

Алексей едет из пункта A в пункт B на автомобиле. Расстояние между этими пунктами равно N километров. Известно, что с полным баком автомобиль способен проехать k километров. Дана карта, на которой отмечены координаты бензоколонок, относительно пункта A. Определите минимальное число заправок, которые придется сделать Алексею, чтобы успешно достичь пункта B. Известно, что при выезде из пункта A бак был полон.
Входные данные: *в первой строке вводятся числа N и k (натуральные, не превосходят 1000). В следующей строке вводится количество бензоколонок S, потом следует S натуральных чисел, не превосходящих N — расстояния от пункта A до каждой заправки. Заправки упорядочены по удаленности от пункта A.*
Выходные данные: *если при данных условиях пункта B достичь невозможно, то выведите число -1. Если решение существует, то выведите минимальное количество остановок на дозаправку, которое нужно, чтобы достичь пункта B.*
Примеры.
Входные данные:
100 20
1 50
Выходные данные:
-1

Входные данные:
100 50
1 50
Выходные данные:
1

Решение: См. решение и критерии для этой задачи в заданиях для 9–10 классов.