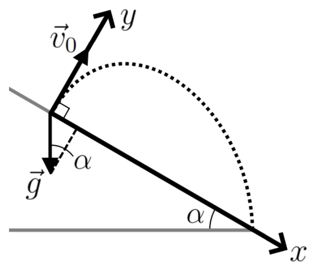
Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. **(2 балла)** Гриша со склона горы кинул огромный камень. Подойдём к этому поступку формально. Выберем начало координат в точке броска, ось x направим вниз, вдоль склона, а ось y — перпендикулярно поверхности и будем считать, что она совпадает по направлению с начальной скоростью камня. Уравнение траектории камня описывается функцией $y(x) = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{x}$.
Чему равна начальная скорость камня?
Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. (*М. А. Крупина*)
Ответ: 15,8 м/с.
Решение. Введём прямоугольную систему координат с осью x вдоль наклонной плоскости и осью y, перпендикулярной плоскости (см. справа). Обозначим коэффициенты в заданном уравнении траектории камня за $a = \sqrt{3}$ и $b = 10$. В выбранной системе координат составляющие ускорения равны



$$\begin{cases} a_x = g\sin\alpha, \\ a_y = g\cos\alpha. \end{cases}$$

Запишем уравнение движения камня вдоль оси x и выразим время через координату:

$$x = \frac{g\sin\alpha \cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g\sin\alpha}}.$$

Запишем уравнение движения камня вдоль оси y:

$$y = v_0 t - \frac{g\cos\alpha \cdot t^2}{2}.$$

Подставим в него выражение для t:

$$y(x) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2x}{g\sin\alpha}} - \frac{g\cos\alpha \cdot 2x}{2g\sin\alpha}.$$

Таким образом, уравнение траектории имеет вид

$$y(x) = -\operatorname{ctg}\alpha \cdot x + \frac{v_0\sqrt{2}}{\sqrt{g\sin\alpha}} \cdot \sqrt{x}.$$

Свяжем коэффициенты с заданными параметрами задачи:

$$a = \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \qquad \frac{v_0\sqrt{2}}{\sqrt{g\sin\alpha}} = b \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g\sin\alpha} = b^2.$$

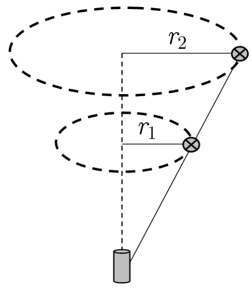
Тогда для скорости камня получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{b^2 g\sin\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{100\cdot 10}{4}} = 5\sqrt{10} \approx 15{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

10.2. **(2 балла)** Два квадрокоптера летают на разных фиксированных высотах по концентрическим окружностям разного радиуса, но всё время находятся на одной прямой относительно оператора, стоящего на земле. Оператор ошибся и коптер, летевший на меньшей высоте, начал ускоряться. В момент времени, когда они впервые снова оказались на одной прямой с оператором, скорости коптеров стали одинаковыми. При этом коптер, который двигался равноускоренно, сделал $n = 5$ оборотов.
По окружности какого радиуса летел ускоряющийся коптер, если второй летел по окружности радиуса $r_2 = 24$ м? (*Т. В. Воробьева, С. А. Старовойтов*)
Ответ: 16 м.
Решение. Вначале угловые скорости коптеров одинаковы, следовательно

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}. \qquad (*)$$

Когда скорости коптеров сравнялись после начала ускорения нижнего:



$$v_2 = v_1 + at \quad \Rightarrow \quad v_2\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_2 \cdot \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)}{a}. \qquad (**)$$

Нижний коптер совершил n оборотов:

$$\pi n r_1 = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Подставляя $(*)$ и $(**)$, получим, после преобразований:

$$2\pi n r_1 = \frac{v_2^2}{a} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right).$$

За то же время верхний коптер совершил $n-1$ оборот:

$$2\pi(n-1)r_2 = v_2 t.$$

Подставим $(**)$ и получим:

$$\frac{v_2^2}{a} = \frac{2\pi(n-1)r_2}{1 - \dfrac{r_1}{r_2}}.$$

Таким образом,

$$2\pi n r_1 = \frac{2\pi(n-1)r_2}{1 - \dfrac{r_1}{r_2}} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right).$$

В итоге, после несложных преобразований, получим ответ:

$$r_1 = r_2 \cdot \frac{n-1}{n+1} = 16 \text{ м}.$$

10.3. (3 балла) Вова и Ваня играли в пинг-понг. Вова сильно, но неточно ударил ракеткой по теннисному шарику, шарик полетел в потолок, отскочил от потолка, ударился о пол и стал прыгать. После первого удара о пол скорость шарика была равна $v_1 = 7$ м/с и направлена вертикально вверх. При каждом ударе о пол шарик теряет $k = 14\%$ скорости.

Найдите время от момента первого удара до остановки, в течение которого шарик будет прыгать на полу.

Примечание. Движение шарика вертикальное, временем каждого удара и сопротивлением воздуха пренебрегите, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. (*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 10 с.

Решение. Высоту подъёма шарика после первого удара определим из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgH_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Время подъёма до максимальной высоты, как и время падения, равны (из кинематики):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = \frac{v_1}{g}.$$

Уменьшение скорости на $k = 14\% = 0{,}14$ при ударе означает, что после каждого удара остаётся доля энергии, равная $(1-k)^2$.

После первого удара энергия шарика изменится в $(1-k)^2$ раз, так же уменьшится и высота подъёма после первого удара:

$$H_2 = (1-k)^2 H_1, \qquad t_2 = t_1(1-k).$$

Полное время движения:

$$t = 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \dots = 2t_1\big(1 + (1-k) + (1-k)^2 + \dots\big),$$

где в скобках — убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $(1-k) < 1$. Сумма такой прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-k)^n} = \frac{1}{1-(1-k)} = \frac{1}{k}.$$

Тогда

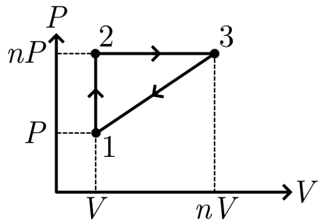
$$t = 2t_1 \cdot \frac{1}{k} = 2 \cdot \frac{v_1}{g} \cdot \frac{1}{k} = 2 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{0{,}14} = 10 \text{ с}.$$

10.4. **(3 балла)** Некоторое количество аргона нагрели, увеличив давление в n раз пропорционально температуре по закону $P = \alpha \mathrm{T}$, затем объём увеличили в n раз пропорционально температуре по закону $V = \beta T$ до такой величины, что при последующем охлаждении по закону $T = \lambda V^2$ газ вернулся в исходное состояние.
Определите КПД такого цикла. Для расчёта примите $n = 2$. (*М. А. Крупина*)
Ответ: 7,7%.
Решение. Запишем уравнения для всех процессов, входящих в цикл:

$$\begin{aligned} 1 \to 2:& \quad P = \alpha T \Rightarrow V = \text{const}, \\ 2 \to 3:& \quad V = \beta T \Rightarrow P = \text{const}, \\ 3 \to 1:& \quad T = \lambda V^2 \Rightarrow P \sim V. \end{aligned}$$

По определению КПД, с учётом того, что теплота поступает в процессах $1 \to 2$ и $2 \to 3$:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{A}{Q_{12} + Q_{23}}.$$



Вычислим работу как площадь внутри цикла:

$$A = \frac{(nP - P)(nV - V)}{2} = \frac{PV(n-1)^2}{2}.$$

Так как в процессе $1 \to 2$ работа не совершается, то количество теплоты в этом процессе определяется как изменение внутренней энергии:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} \cdot (nPV - PV) = \frac{3}{2} \cdot PV(n-1).$$

В процессе $2 \to 3$ количество теплоты определяется из 1 закона термодинамики и формулы для работы при постоянном давлении.

$$Q_{23} = \frac{3}{2} \cdot (n^2PV - nPV) + nP(nV - V) = \frac{3}{2} \cdot nPV(n-1) + n(n-1)PV = n(n-1)PV \cdot \frac{5}{2}.$$

Подставляем и получаем выражение для КПД:

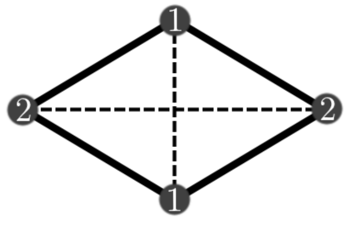
$$\eta = \frac{PV(n-1)^2}{2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot PV(n-1) + \frac{5}{2} \cdot PVn(n-1)\right)} = \frac{2PV(n-1)^2}{2PV(n-1)(3+5n)} = \frac{n-1}{3+5n} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077.$$

10.5. **(2 балла)** К Рождеству мужчины 26-го экипажа международной космической станции решили приготовить Катерине Коулман, единственной женщине на корабле, подарок. На МКС нашлось только 4 бусинки, которые космонавты привязали на нитку на одинаковом расстоянии друг от друга так, что получилось ожерелье. За время изготовления ожерелья бусинки наэлектризовались, приобретя одинаковые по знаку заряды q, Nq, q, Nq. В результате, висящее в невесомости ожерелье приняло форму ромба.

Найдите отношение диагоналей этого ромба (большей к меньшей). Для расчёта примите $N = 8$. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 4.
Решение. Вертикальная компонента силы, действующей на верхний заряд 1:

$$-2T\cos\alpha + 2F_{12}\cos\alpha + F_{11} = 0, \qquad (10.5.1)$$



где α — угол между правой стороной и вертикалью, T — сила натяжения нити, F_{11} — сила отталкивания от заряда на другом конце диагонали, F_{12} — сила отталкивания от заряда на другом конце стороны ромба.

Горизонтальная компонента силы, действующей на правый заряд 2:

$$-2T\sin\alpha + 2F_{12}\sin\alpha + F_{22} = 0, \qquad (10.5.2)$$

где F_{22} — сила отталкивания от заряда на другом конце диагонали.
Поделив (10.5.1) на косинус и (10.5.2) на синус, получим:

$$\frac{F_{11}}{\cos\alpha} = \frac{F_{22}}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{kq^2}{d_1^2\cos\alpha} = \frac{k(Nq)^2}{d_2^2\sin\alpha}. \qquad (10.5.3)$$

Из геометрии отношение диагоналей $d_2/d_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Подставляя в (10.5.3), получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = N^{2/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d_2}{d_1} = N^{2/3} = 4.$$

10.6. **(3 балла)** Когда Касым понял, что окончательно забыл волшебные слова и из пещеры сорока разбойников ему уже не выбраться, у него оставалась последняя надежда — позвонить брату, чтобы Али-Баба напомнил ему нужные слова. Однако телефон Касыма показывал критически низкий уровень заряда, и чтобы совершить звонок, нужно было дозарядить его хотя бы на 20 мАч. Среди сокровищ пещеры Касым нашёл лишь один пальчиковый Ni–Cd аккумулятор с напряжением 1,25 В и три суперконденсатора (ионистора) ёмкостью 20 Ф каждый. Касым стал заряжать эти конденсаторы от пальчикового аккумулятора, соединять их последовательно и подключать к аккумулятору телефона.

Сколько раз Касыму придётся повторить эту процедуру, чтобы позвонить Али-Бабе?
Примечание. Напряжение на аккумуляторе телефона равно 3,6 В. (*Т. А. Андреева*)
Ответ: 72 раза.
Решение. Заряженная батарея последовательно соединённых конденсаторов имеет ёмкость

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_и} + \frac{1}{C_и} + \frac{1}{C_и}} = \frac{C_и}{3} = \frac{20}{3}\ \text{Ф}$$

и напряжение $U = 3 \cdot 1{,}25 = 3{,}75$ В. Разряжаясь на аккумулятор телефона с напряжением $U' = 3{,}6$ В, батарея из конденсаторов отдаёт заряд, равный

$$q = C(U - U') = \frac{20}{3} \cdot 0{,}15 = 1\ \text{Кл}.$$

Заряд, необходимый для совершения звонка

$$Q = 20\text{мА} \cdot \text{ч} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 3600\text{А} \cdot \text{с} = 72\ \text{Кл}.$$

Количество зарядок равно

$$N = \frac{Q}{q} = 72.$$