Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

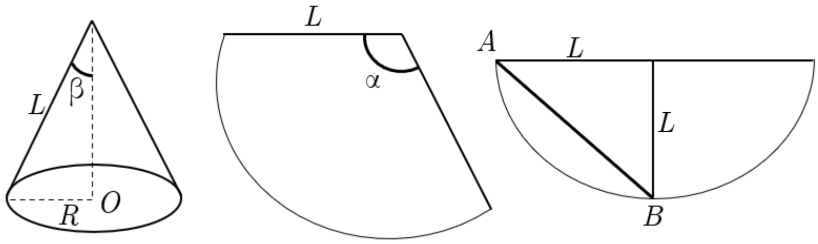
Решения задач для 11 класса

11.1. **(2 балла)** Муравей бежит с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности. На его пути находится конический холм, вертикальное осевое сечение которого имеет вид равностороннего треугольника со стороной L. Как должен двигаться муравей, чтобы, преодолев холм, оказаться в противоположной точке основания холма за минимальное время? Определите это время t.

Примечание. Скорость муравья считайте неизменной. (*А. А. Юринов, С. А. Старовойтов*)

Ответ: $t = L\sqrt{2}/v$.

Решение. Муравей должен двигаться так, чтобы длина его траектории (линии на поверхности конуса, соединяющей концы диаметра окружности в основании холма) была минимальна.



Длину этой линии легко определить на развёртке конуса, которая представляет на плоскости сектор круга радиуса L и с углом раствора α.

Так как длина дуги развёртки равна длине окружности основания конуса:

$$\alpha L = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\pi \cdot \frac{R}{L} = 2\pi \sin\beta.$$

Поскольку вертикальное осевое сечение — равносторонний треугольник, то $\beta = \pi/6$ и $\alpha = \pi$. Тогда развёртка конуса имеет вид полукруга, откуда легко определить длину и время движения по искомой линии:

$$AB = L\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L\sqrt{2}}{v}.$$

11.2. **(3 балла)** Малоизвестная, но совершенно правдивая история, случившаяся с бароном Мюнхгаузеном. Однажды барон прокопал шахту от северного полюса до самого центра Земли. На всякий случай прихватил с собой пушку и ядро. Достигнув центра Земли, барон решил вернуться назад таким способом. Поджёг запал, вскочил на ядро и вылетел на поверхность.

Какова была скорость ядра с бароном в момент старта, если Мюнхгаузен смог теперь поведать эту историю?

Примечание. Землю считайте однородным шаром, радиус Земли примите равным 6400 км, ускорение свободного падения у поверхности Земли — 9,8 м/с^2, силами сопротивления пренебрегите, в эту историю искренне верьте. (*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 7,9 км/с.

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса для гравитационного поля:

$$\oint \vec{g}\, d\vec{S} = -4\pi G m,$$

где $\vec{g}$ — напряжённость гравитационного поля, G — гравитационная постоянная, m — масса внутри поверхности, по которой ведётся интегрирование в левой части. Возьмём замкнутую поверхность в виде сферы с центром в центре Земли радиусом $r \geqslant R_З$. Тогда, из соображений симметрии, получим

$$4\pi r^2 g = -4\pi G\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3,$$

где $\rho_З$ — плотность Земли:

$$\rho_З = \frac{M_З}{V_З} = \frac{3M_З}{4\pi R_З^3}.$$

В итоге, напряжённость гравитационного поля внутри Земли линейно зависит от расстояния от центра вдоль радиального направления:

$$g(r) = -\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho r,$$

где минус указывает на то, что вектор напряжённости $\vec{g}$ направлен к центру Земли. Тогда величина гравитационной силы, действующей на тело массой m, на расстояниях $r \geqslant R_З$ равна

$$F = \frac{4}{3} \cdot \pi G \rho m r.$$

Воспользуемся теоремой, согласно которой работа всех сил, действующих на тело (в нашем случае — только гравитационной силы) равна приращению кинетической энергии тела:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{грав}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_0^{R_З} \frac{4}{3} \cdot \pi \rho G m r \, dr$$

(полагая, что барон на ядре достигает поверхности Земли с пренебрежимо малой скоростью). Интегрируя, получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho R_З^2} = \sqrt{\frac{M_З G}{R_З}}.$$

Учитывая, что $M_З G = g_З R_З^2$, где $g_З$ — ускорение свободного падения у поверхности Земли, окончательно получим:

$$v_0 = \sqrt{g_З R_З} = 7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

(совпадает с первой космической скоростью).

Другое решение. Рассмотрим движение барона на ядре от центра Земли к поверхности как четверть колебания тела от положения равновесия до крайнего положения под действием квазиупругой силы $F_{\text{ку}} = -kr$, где

$$k = \frac{4}{3} \cdot \pi G \rho m$$

(см. выше). В нашем случае амплитуда колебаний $r_0 = R$. Тогда

$$v_0 = r_0 \omega = R_З \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho R_З^2} = \sqrt{\frac{M_З G}{R_З}} = \sqrt{g_З R_З} = 7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Примечание. К рассмотрению принимаются любые разумные соображения, приводящие к пониманию линейной зависимости гравитационной силы от расстояния до центра Земли внутри Земли.

11.3. (2 балла) Жилой дом обогревается двухблочным кондиционером («сплит-система»), работающим в режиме теплового насоса и потребляющего $P = 1{,}5$ кВт электроэнергии. Его эффективность в $n = 5$ раз меньше, чем у идеальной тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно в тех же условиях. Из-за теплопроводности стен и окон тепло уходит из дома со скоростью, пропорциональной разнице температур в доме и на улице, с коэффициентом пропорциональности $\alpha = 400$ Вт/К. Чему равна температура на улице, если температура в помещении $+27°$C?

Примечание. Тепловой насос — машина, забирающая тепло при низкой температуре (у «холодильника») и отдающая его при высокой температуре («нагревателю») за счёт совершения внешними силами работы. Эффективность теплового насоса в режиме обогревателя рассчитывается как отношение полученного «нагревателем» тепла к совершённой внешними силами работе, в данном случае — к затраченной электроэнергии. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 12°C.

Решение. Обозначим K — коэффициент эффективности «динамического отопления», Q_1 — тепло, передаваемое нагревателю, Q_2 — тепло, отбираемое у холодильника, τ — некоторый промежуток времени. Тогда:

$$K = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_1}{P \cdot \tau}. \qquad (11.3.1)$$

Пусть также K_0 — коэффициент эффективности «динамического отопления» идеальной машины (работающей по обратному циклу Карно), T_1 — температура нагревателя, T_2 — температура холодильника. Тогда:

$$K_0 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = nK. \tag{11.3.2}$$

Тепло, передаваемое нагревателю с учётом потерь на теплопроводность:

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_2) \cdot \tau. \tag{11.3.3}$$

Подставим (11.3.1) в (11.3.2) с учётом (11.3.3) и выразим T_2:

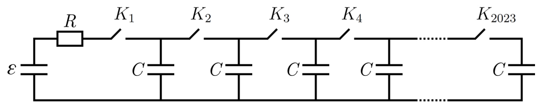
$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} = n\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{P} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 P = n\alpha(T_1 - T_2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{T_1 P}{\alpha n}} \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = T_1 - \sqrt{\frac{T_1 P}{\alpha n}}.$$

Подставим числа:

$$T_2 = 300 - \sqrt{\frac{300 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{400 \cdot 5}} = 300 - \sqrt{\frac{900}{4}} = 300 - \sqrt{225} = 300 - 15 = 285\ \text{K} = 12^\circ\text{C}.$$

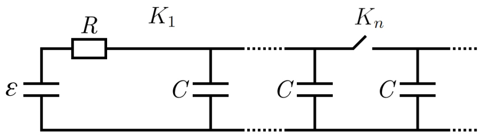
11.4. **(4 балла)** В двух одинаковых цепях, схема которых изображена на рисунке, в начальный момент все конденсаторы не заряжены и все ключи разомкнуты. В цепях начинают по очереди замыкать ключи: в первой — от ключа K_1 к ключу K_{2023} ($K_1 \to K_{2023}$), во второй — в обратном порядке ($K_1 \leftarrow K_{2023}$), выжидая каждый раз достаточно длительное время, чтобы конденсаторы перезарядились. Во сколько раз количество теплоты, которое выделится на резисторе R после замыкания последнего ключа (K_{2023}) в первой схеме, меньше количества теплоты, выделяющегося на том же резисторе при замыкании ключа K_1 во второй?



Примечание. Внутренним сопротивлением источника пренебрегите. (*М. А. Крупина*)

Ответ: $4{,}09 \cdot 10^6$.

Решение. Рассмотрим первую схему. Сразу после замыкания ключа K_n электрический заряд с $(n-1)$ конденсаторов перераспределится между n конденсаторами согласно уравнению $q_{n-1}^{\text{общ}} = q_n^{\text{общ}}$. Запишем его через ёмкости и напряжения на системе параллельных конденсаторов:



$$ncU_1 = (n-1)cU_0.$$

Получим значения для напряжённости сразу после коммутации:

$$U_1 = \frac{n-1}{n} \cdot U_0.$$

Через некоторый промежуток времени на конденсаторах должно установиться единое напряжение U_0. Для этого через сопротивление должен пройти заряд

$$\Delta q_1 = ncU_0 - ncU_1 = nc(U_0 - U_1) = cU_0.$$

При этом источником тока будет произведена работа $A_{\text{ист}1} = \Delta q_1 \cdot U_0 = cU_0^2$, которая пойдёт на увеличение энергии, запасённой в конденсаторах, и тепло, выделившемся на сопротивлении:

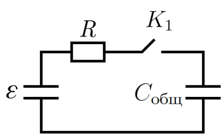
$$A_{\text{ист}1} = \Delta W_1 + Q_1.$$

Поэтому тепло, выделившееся на сопротивлении в первой схеме, равно

$$Q_1 = A_{\text{ист}1} - \Delta W_1 = cU_0^2 - \left(\frac{ncU_0^2}{2} - \frac{ncU_1^2}{2}\right) = cU_0^2 - \frac{ncU_0^2}{2} + \frac{nc(n-1)^2U_0^2}{2n^2} =$$

$$= cU_0^2\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n^2 - 2n + 1}{2n}\right) = cU_0^2 \cdot \frac{2n - n^2 - 2n + 1 + n^2}{2n} = \frac{cU_0^2}{2n} = \frac{c\varepsilon^2}{2n}.$$

Теперь рассмотрим вторую схему в момент, когда все ключи замкнуты, кроме K_1. Перед его коммутацией полная ёмкость системы равна $C_{\text{общ}} = nC$. Поэтому работа источника тока в этом случае:



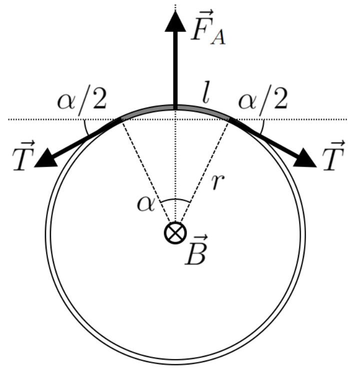
$$A_{\text{ист}2} = \Delta q_2 U_0 = ncU_0^2.$$

При этом запасённая в системе конденсаторов энергия равна
$$\Delta W_2 = W_2 = \frac{ncU_0^2}{2}.$$
Тогда тепло, выделившееся на сопротивлении, равно
$$Q_2 = A_{\text{ист}2} - \Delta W_2 = \frac{ncU_0^2}{2}.$$
Осталось найти искомое отношение количеств теплоты:
$$\frac{Q_2}{Q_1} = n^2 \approx 4{,}09 \cdot 10^6.$$

11.5. (3 балла) Проволочное кольцо радиуса r, обладающее электрическим сопротивлением R, находится в однородном магнитном поле. Линии индукции перпендикулярны плоскости кольца, а модуль изменяется по гармоническому закону $B = B_0\cos(\omega t)$. Индуктивность кольца пренебрежимо мала. Определите максимальное значение силы натяжения кольца.

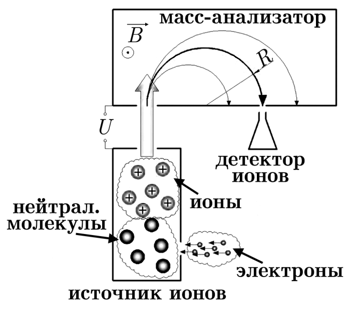
(*М. А. Крупина*)

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{B_0^2\pi r^3\omega}{2R}$.



Решение. Выделим малый участок кольца — дугу длиной l, опирающуюся на малый угол α. Магнитное поле изменяется по гармоническому закону: $B = B_0\cos(\omega t)$, при этом магнитный поток через кольцо:
$$\Phi = BS = B_0\pi r^2\cos(\omega t).$$
Наводимая в кольце ЭДС равна
$$\varepsilon_i = -\Phi' = B_0\pi r^2\omega\sin(\omega t).$$
Тогда ток в кольце:
$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B_0\pi r^2\omega\sin(\omega t)}{R}.$$
Магнитная сила, действующая на участок кольца:
$$F_A = IBl = \frac{B_0^2\pi r^2 l\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{R} = \frac{B_0^2\pi r^2 l\omega}{2R}\cdot\sin(2\omega t).$$
Из условия равновесия получим связь магнитной силы и силы натяжения:
$$F_A = 2T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx T\alpha.$$
Учитывая, что $l = r\alpha$, выражаем T:
$$T = \frac{B_0^2\pi r^3\omega}{2R}\cdot\sin(2\omega t).$$
Найдём максимум:
$$T_{\max} = \frac{B_0^2\pi r^3\omega}{2R}.$$

11.6. (2 балла) На рисунке представлена блок-схема простейшего масс-спектрометра. Принцип работы данной установки можно описать так:



1) в источнике ионов нейтральные атомы или молекулы ионизуются электронным ударом;
2) получившиеся ионы ускоряются разностью потенциалов U и попадают в масс-анализатор;
3) в масс-анализаторе ионы оказываются в области однородного магнитного поля B, причём скорости частиц перпендикулярны линиям индукции магнитного поля;
4) далее, через узкую щель ионы попадают в детектор.

Считая детектор неподвижным относительно масс-анализатора, найдите, восколько раз необходимо изменить индукцию магнитного поля B_2/B_1, чтобы в детектор попадали ионы той же массы, что и при магнитном поле B_1, но с зарядом, на единицу большим (в единицах элементарного заряда).

Примечание. Учитывайте при расчёте, что скорость ионов на выходе из источника (до ускорения электрическим полем) равна нулю. Заряд ионов, которые попадали в детектор в магнитном поле B_1, равен Ze, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, Z примите равным 18.

(В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов)

Ответ: 0,973.

Решение. Из теоремы о кинетической энергии выражаем скорости ионов:

$$\frac{mV_1^2}{2} = Z \cdot e \cdot U \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{\frac{2Z \cdot e \cdot U}{m}}.$$

Аналогично для второго случая:

$$\frac{mV_2^2}{2} = (Z+1) \cdot e \cdot U \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2(Z+1) \cdot e \cdot U}{m}}.$$

Из II закона Ньютона:

$$Z \cdot e \cdot V \cdot B_1 = \frac{MV_1^2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{mV_1}{R_1 \cdot Z \cdot e},$$

$$(Z+1) \cdot e \cdot V \cdot B_2 = \frac{MV_2^2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{mV_2}{R_2 \cdot (Z+1) \cdot e}.$$

Так как детектор неподвижен относительно масс-анализатора, то $R_1 = R_2$, поэтому

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{Z}{Z+1} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z}} \cdot \frac{Z}{Z+1} = \sqrt{\frac{Z}{Z+1}} = \sqrt{\frac{18}{18+1}} \approx 0{,}973.$$