Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (2 балла) Два пиратских корабля, находящиеся на экваторе, поделив добычу, стали двигаться один строго на запад, а второй строго на восток с одинаковыми по модулю скоростями $v = 20$ км/час относительно Земли. Каждому кораблю досталось ровно по $m = 100$ килограммов золота (взвешивание производилось с помощью рычажных весов на покоящихся относительно Земли кораблях). По прошествии некоторого времени взвешивание повторили уже на движущихся судах, используя точные электронные весы.
Определите, на сколько показания весов будут отличаться на корабле, идущем на запад, от показаний весов, движущихся с кораблём на восток.
Примечание. Считайте Землю шаром с продолжительностью суток $T = 24$ часа, $g = 10$ м/с^2.
(*В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов*)

Ответ: 16 граммов.
Решение. Обозначим корабли: №1 идёт на запад, №2 — на восток. Вес золота на 1-м корабле равен разности силы тяжести и произведения массы на величину центростремительного ускорения. Расчёт центростремительного ускорения производится с учётом того, что скорость корабля в инерциальной системе равна разности скоростей вращения Земли и корабля относительно поверхности Земли:

$$P_1 = mg - ma_{n1} = mg - \frac{m(v_з - v)^2}{R_з}.$$

Аналогично вес золота на 2-м корабле:

$$P_2 = mg - ma_{n2} = mg - \frac{m(v_з + v)^2}{R_з}.$$

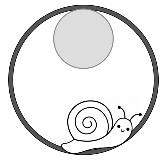
Вычислим разность:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{m}{R_з} \cdot \left((v_з + v)^2 - (v_з - v)^2\right) = \frac{m}{R_з} \cdot 4v_з v = \frac{m}{R_з} \cdot 4 \cdot \frac{2\pi R_з}{T} \cdot v = \frac{8\pi m v}{T}.$$

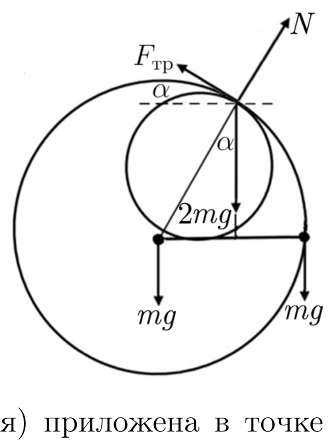
Отсюда различие в показаниях весов:

$$\Delta m = \frac{\Delta P}{g} = \frac{8\pi m v}{gT} = 16 \text{ г}.$$

9.2. (3 балла) На цилиндрическом карнизе для портьер свободно надето тонкое кольцо. В нижней точке кольца находится улитка (см. рис.). Масса улитки и кольца одинаковы. Улитка начинает медленно двигаться вверх по кольцу. При каком минимальном значении коэффициента трения кольца о карниз улитка сумеет добраться до верхней точки кольца? (*А. А. Юринов, С. А. Старовойтов*)

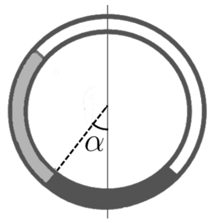


Ответ: $1/\sqrt{3}$.
Решение. Т.к. массы кольца и улитки равны, максимальный угол отклонения кольца будет соответствовать положению улитки, изображённому на рисунке (вертикаль из точки касания кольца и карниза должна пройти через середину радиуса кольца). Следовательно, угол α равен 30°, а коэффициент трения $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$.



Центр масс системы (кольцо — улитка) находится на середине радиуса, проведённого из центра кольца в улитку. При движении улитки по кольцу из нижней точки к верхней, например, против часовой, центр масс смещается вправо, соответственно, вправо смещается и вертикаль, проходящая через точку касания кольца и карниза и центр масс. Кольцо поворачивается на карнизе без скольжения, а точка касания перемещается по поверхности карниза по часовой. Сила трения (покоя) приложена в точке касания и направлена по касательной к кольцу вверх и влево. Угол наклона касательной к горизонту возрастает и становится максимальным, когда улитка и центр кольца будут лежать на одной горизонтали. Как видно из рисунка, этот угол равен 30°. Причём ситуация аналогична брусочку на шероховатой наклонной плоскости. Там, как известно, критерием покоя является соотношение между коэффициентом трения и углом наклона плоскости $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, если кольцо не сорвётся в скольжение по карнизу даже в положении, показанном на рисунке, улитка доберётся до верхней точки кольца. Её дальнейшее движение по кольцу будет приводить к смещению центра масс влево и, как следствие, уменьшению угла наклона касательной в точке касания.

9.3. **(2 балла)** В длинную тонкую трубку залили равные объёмы двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями, заполнив её ровно наполовину. Трубку свернули в кольцо, расположив его в вертикальной плоскости (см. рис.). Угол, который составляет с вертикалью отрезок, проходящий через границу раздела жидкостей и центр кольца, равен $\alpha = 10°$. Найдите плотность лёгкой жидкости ρ_2, если плотность тяжёлой известна и равна $\rho_1 = 1000$ кг/м^3. (*М. П. Коробков, Т. А. Андреева*)



Ответ: 700 кг/м^3.

Решение. Напишем гидростатические давления внизу трубок. В правой:

$$P_{\text{п}} = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g R \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \rho_1 g R (1 - \sin\alpha).$$

В левой:

$$P_{\text{л}} = \rho_1 g R (1 - \cos\alpha) + \rho_2 g R \cos\alpha + \rho_2 g R \sin\alpha.$$

В состоянии равновесия гидростатические давления внизу трубки в левой и правой частях кольца равны:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{л}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1(1 - \sin\alpha) = \rho_1(1 - \cos\alpha) + \rho_2(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Выразим нужную плотность:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \rho_1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = 700\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

9.4. **(1 балл)** Осёл, козёл, мартышка и косолапый мишка выступали на юбилее Политехнического. Помня о дурной славе своего квартета, они заменили альт и контрабас на гобой и фагот, а скрипки оставили. И перед концертом проверили, что все инструменты звучат в унисон. Взлетали и лопались наполненные гелием шары, а сотрудники кафедры гидроаэродинамики надували из баллонов всё новые и новые...

К концу вечера музыканты обнаружили, что духовые безнадёжно перестали попадать в ноты. От распада квартет спас студент-физик, который напомнил, что, прижимая струну, скрипачи задают частоту её колебаний, а клапаны духовых инструментов задают длину волны издаваемого звука. Из-за значительного количества гелия в воздухе скорость звука увеличилась на 10%.

На сколько герц стали отличаться частоты инструментов, изначально настроенных на 300 Гц? (*Т. А. Андреева*)

Ответ: на 30 Гц.

Решение. Так как длина волны духовых инструментов не изменилась, то, по определению:

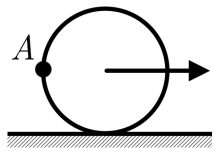
$$\lambda = \frac{v_{\text{зв}0}}{f_0} = \frac{v_{\text{зв}}}{f},$$

где индексом 0 обозначены значения в отсутствии гелия, а без индекса — при его наличии. Преобразуем:

$$f = f_0 \cdot \frac{v_{\text{зв}}}{v_{\text{зв}0}} = 1{,}1 \cdot 300 = 330\ \text{Гц}.$$

Тогда разность частот $\Delta f = 30$ Гц.

9.5. **(3 балла)** Колесо радиуса 20 см, двигаясь по прямой дороге равномерно со скоростью 9 км/ч, из-за наличия проскальзывания, переместилось всего на 2 метра, сделав при этом целых 5 оборотов.

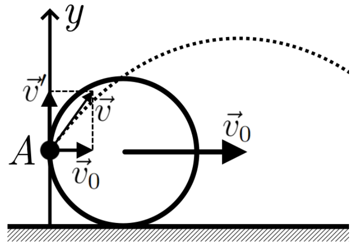


На какой максимальной высоте от земли сможет побывать капелька, оторвавшаяся от колеса в точке A?

Примечание. Сопротивлением воздуха пренебрегите. (*М. А. Крупина*)

Ответ: 3,325 м.

Решение. Вертикальная составляющая скорости капли в начальный момент времени равна скорости вращения обода колеса и направлена вверх:



$$v' = \omega R. \qquad (*)$$

Определим расстояние, пройденное колесом за N оборотов:

$$S = v_0 t = v_0 T \cdot N.$$

Из определения угловая скорости получим связь между ней и скоростью движения колеса, и подставим в (*):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{S} \cdot v_0 N \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{2\pi R v_0 N}{S} = v_y.$$

Запишем уравнение для высоты подъёма капли относительно начального положения h и приравняем к нулю выражение для скорости капли:

$$\begin{cases} h = v_y t - g \cdot \dfrac{t^2}{2}, \\ 0 = v_y - gt. \end{cases}$$

Получим из второго уравнения значение момента времени t, когда капля достигнет максимальной высоты: $t = v_y/g$. Подставим это в первое уравнение, учитывая, что полная высота подъёма равна $H = h + R$:

$$h = \frac{v_y^2}{g} - \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{4\pi^2 R^2 v_0^2 N^2}{2gS^2}.$$

Получим отсюда окончательное выражение для высоты и, подставив численные значения, получим требуемую высоту:

$$H = R + \frac{4\pi^2 R^2 v_0^2 N^2}{2gS^2} = 3{,}325 \text{ м}.$$

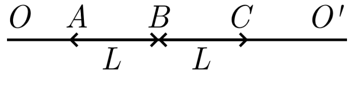
9.6. **(2 балла)** На главной оптической оси OO' тонкой линзы имеются три замечательные точки: A, B, C, причём $AB = BC = L$. Если точечный источник света поместить в одну из них, то изображение оказывается в одной из двух других.

Найдите расстояние между точками L, если фокусное расстояние линзы $F = 12$ см.

(*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 27 см.

Решение. Условию задачи может удовлетворять только собирающая линза. Причём одно из изображений будет действительным, а другое мнимым.



Пусть источник расположен в точке A, а линза — между точками B и C. Обозначим расстояние от точки B до линзы за x, тогда:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L+x} + \frac{1}{L-x}.$$

Теперь поместим источник в точку B, а линза по-прежнему находится между точками B и C. Тогда

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} - \frac{1}{L+x}.$$

Приравняв правые части уравнений, получим (после несложных преобразований), что $x = L/3$. Подставив это в любое из первых двух уравнений, найдём расстояние L:

$$L = \frac{9F}{4} = 27 \text{ см}.$$