Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (3 балла) Из открывшихся первой и последней дверей прибывшего на станцию поезда вышли Шерлок Холмс и профессор Мориарти и направились навстречу друг другу с постоянной скоростью. После завершения посадки пассажиров поезд начал двигаться с постоянным ускорением 1 м/с^2 и через 12 с последний вагон проехал мимо профессора Мориарти, а ещё через 2 с — мимо Шерлока Холмса. Длина поезда и платформы равны 172 м.

[1] На каком расстоянии друг от друга находились Шерлок Холмс и профессор Мориарти в момент, когда последний вагон поезда покинул станцию? Ответ дайте в метрах, округлив до целых. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 15.

Решение. Если τ — время стоянки поезда, L — длина поезда, а v — скорость Холмса и Мориарти, то уравнения, описывающие их встречу с последним вагоном, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{at_1^2}{2} = v(t_1+\tau), \\ \dfrac{a(t_1+t_2)^2}{2} = L - v(t_1+t_2+\tau). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $v = 1$ м/с и $\tau = 60$ с.

Время, за которое последний вагон поезда покинул станцию, равно

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18{,}6 \text{ с}.$$

Расстояние к этому моменту между Холмсом и Мориарти равно $S = L - 2v(t_3+\tau) \approx 15$ м.

10.2. (2 балла) Клифф-дайвер прыгнул в воду с 29-метровой скалы. Когда он пролетел первые 10 м, с уступа скалы в воду упал зритель.

[2] На какой высоте находится уступ, если спортсмен и зритель коснулись воды одновременно? Ответ дайте в метрах, округлив до целых.

Замечание. Клифф-дайвинг — это прыжки в воду с естественных вышек — например, скал. Считайте, что начальная скорость прыгуна равна нулю. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебрегите. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 5.

Решение. Высота скалы $H_1 = gt_1^2/2$, где t_1 — время всего полёта дайвера:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = 2{,}4 \text{ с}.$$

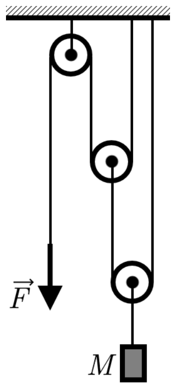
Первые 10 метров полёта дайвера $\Delta H = g\Delta t^2/2$, что произошло за время

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta H}{g}} = 1{,}4 \text{ с}.$$

Время падения зрителя $t_2 = t_1 - \Delta t = 1$ с, тогда высота уступа

$$H_2 = \frac{gt_2^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

10.3. **(3 балла)** Груз массой $M = 10$ кг поднимают, используя систему блоков, показанную на рисунке. К канату в течение 2 с прикладывали постоянную силу 50 Н, потом канат случайно отпустили и смогли поймать только спустя 4 с, после чего понадобилось ещё 5 с, чтобы, прикладывая ту же силу, всё-таки поднять груз на необходимую высоту.



[3] На какую высоту был поднят груз от его начального положения? Ответ дайте в метрах.

Замечание. Трением в блоках и сопротивлением воздуха пренебрегите, блоки считайте невесомыми, нити — лёгкими и нерастяжимыми, участки нитей, не лежащие на блоках — вертикальными. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. (*М. А. Крупина*)

Ответ: 45.

Решение. Запишем уравнения движения тела и блоков, учитывая что их массы равны нулю и силы натяжения в каждой нити постоянны:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(здесь T_2 — сила натяжения в правой нити, T_3 — сила натяжения в левой нити). Преобразуем и найдём ускорение:

$$Ma = 4F - Mg \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot \frac{F}{M} - g = 4 \cdot \frac{50}{10} - 10 = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определим высоту подъёма и скорость в конце первых двух секунд:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_1 = at_1 = 20 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим высоту подъёма и скорость после следующих 4 секунд:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 20 + 20 \cdot 4 - \dfrac{10 \cdot 16}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим конечную высоту подъёма:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 25}{2} = 45 \text{ м}.$$

10.4. **(2 балла)** Дети катаются на санках. Андрей тащит санки с Машей за верёвку под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а Петя толкает такие же санки с Дашей, направляя силу $F_2 = 140$ Н вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту.

[4] Какую силу F_1 должен прикладывать Андрей, чтобы девочки двигались с одинаковым ускорением? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целых.

Масса Маши вместе с санками $m_1 = 40$ кг, масса Даши вместе с санками $m_2 = 35$ кг. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Коэффициент трения $\mu = 0{,}20$.

(*М. А. Крупина, С. А. Старовойтов*)

Ответ: 127.

Решение. Рассмотрим движение санок с Машей. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} F_1 \cos\alpha - F_{\text{тр}_1} = m_1 a, \\ F_1 \sin\alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$

Кроме того, $F_{\text{тр}_1} = \mu N_1$. Решая систему уравнений, получим

$$F_1 \cos\alpha - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin\alpha = m_1 a. \qquad (*)$$

Рассмотрим движение санок с Дашей:

$$\begin{cases} F_2 \cos\alpha - F_{\text{тр}_2} = m_2 a, \\ F_1 \sin\alpha + m_1 g = N_2, \\ F_{\text{тр}_2} = \mu N_2. \end{cases}$$

Решая вторую систему, выразим ускорение:

$$a = \frac{F_2 \cos\alpha - \mu m_2 g - \mu F_2 \sin\alpha}{m_2}.$$

Подставим ускорение в формулу ($*$) и, после преобразований, получим

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{m_1(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)}{m_2(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)} = 127\ \text{Н}.$$

Критерии. Неправильные ответы в диапазоне от 124 до 130 оцениваются в 1 балл (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений тригонометрических функций).

10.5. (3 балла) Стеклянный тонкостенный стакан плавает в сосуде с водой. В него медленно вливают сироп, пока стакан не погрузится в воду ровно до середины. Сиропом при этом оказывается заполнена четверть стакана. Второй такой же стакан, заполненный до половины водой, плавает в сиропе, погрузившись до середины.

[5] Какая часть второго стакана будет погружена в сироп, если в него вылить содержимое первого стакана? Ответ дайте в виде десятичной дроби с точностью до сотых.

(*Т. А. Андреева*)

Ответ: 0,75.

Решение. Запишем уравнение равновесия для 1 стакана:

$$mg + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho_0 g \cdot \frac{V}{2}, \qquad (10.5.1)$$

где m — масса пустого стакана, V — объём стакана, ρ — плотность сиропа, ρ_0 — плотность воды. Запишем уравнение равновесия для 2 стакана:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} = \rho g \cdot \frac{V}{2}. \qquad (10.5.2)$$

Решая совместно (10.5.1) и (10.5.2), находим

$$m = \frac{\rho_0 V}{6}, \qquad \rho = \frac{4}{3} \cdot \rho_0.$$

Выливаем сироп в стакан с водой:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho g x V,$$

где x — погружённая доля стакана. После подстановки массы и плотности, получаем $x = 3/4 = 0{,}75$.

Критерии. Неверный ответ «0,73», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

10.6. (3 балла) Два спутника движутся по круговым орбитам в противоположных направлениях вокруг планеты Шелезяка с линейными скоростями $v_1 = 5$ км/с и $v_2 = 8$ км/с. Радиус планеты равен $R = 17{,}4$ тыс. км, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 14$ м/с^2.

[6] Найдите интервал времени, через который спутники периодически сближаются друг с другом на минимальное расстояние. Результат выразите в часах, округлив до десятых.

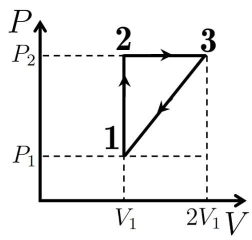
(*М. П. Коробков, Т. А. Андреева*)

Ответ: 11,6.

Решение. Запишем соотношение между гравитационной силой и силой тяжести на поверхности

планеты:
$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \quad \Rightarrow \quad gR^2 = GM.$$
Запишем уравнения движения спутников на орбитах:
$$G \cdot \frac{mM}{r_1^2} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2},$$
$$G \cdot \frac{mM}{r_2^2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.$$
В момент наибольшего сближения (после предыдущего) спутники «на двоих» опишут угол 2π:
$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$
где ω_1 и ω_2 — угловые скорости спутников.
После подстановки и преобразований получим
$$t = \frac{2\pi g R^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11{,}6 \text{ часа.}$$

10.7. **(3 балла)** На рисунке приведён цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Известно, что КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур, равен 64%, а при изобарном расширении объём газа увеличивается в 2 раза.

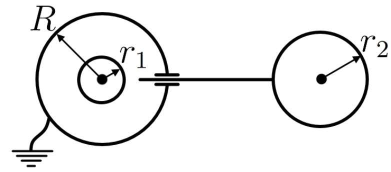


[7] Определите КПД цикла. Ответ приведите в процентах с точностью до десятых. *(С. А. Старовойтов)*

Ответ: 4,8.

Решение. Из формулы для КПД цикла Карно определим отношение температур:
$$\eta_{\text{К}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \eta_{\text{К}} = \frac{T_1}{T_3} = 0{,}36,$$
где T_1 и T_3 — температуры в точках 1 и 3.
Полезная работа, полученная в цикле, равна площади внутри цикла, то есть площади треугольника:
$$A_{\text{Ц}} = \frac{1}{2} \cdot V_1(P_2 - P_1) = \frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_3}{2} - T_1\right).$$
Здесь учтены уравнения состояния в точках 1 и 3 и отношения объёмов в этих точках.
Вычислим работу при изобарном процессе:
$$A_{23} = P_2(V_3 - V_1) = P_2 V_1 = \frac{1}{2} \cdot P_3 V_3 = \frac{1}{2} \cdot \nu R T_3.$$
Здесь учтены уравнение состояния в точке 3 и отношения объёмов в точках 1 и 3.
Вычислим суммарное изменение внутренней энергии одноатомного газа в изохорном и изобарном процессах:
$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \cdot \nu R (T_3 - T_1).$$
Определим суммарное количество теплоты, подведённое в изохорном и изобарном процессах:
$$Q_{\text{Н}} = A_{23} + \Delta U_{13} = \frac{1}{2} \cdot \nu R (4T_3 - 3T_1),$$
и вычислим искомый КПД:
$$\eta = \frac{A_{\text{Ц}}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_3}{2} - T_1\right)}{\frac{\nu R}{2}(4T_3 - 3T_1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_3}}{4 - 3 \cdot \frac{T_1}{T_3}} = \frac{0{,}5 - 0{,}36}{4 - 1{,}08} = 0{,}048.$$
Критерии. Неверный ответ «4,7», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

10.8. **(4 балла)** Двум металлическим шарам радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см сообщили заряды $q_1 = 0{,}6$ мкКл и $q_2 = 1{,}5$ мкКл, а потом соединили их тонким проводом. После этого шар радиусом r_1 помещают внутрь металлической сферы радиусом $R = 3r_1$, и эту сферу заземляют.



[8] Какой заряд пройдёт по соединительному проводу при заземлении сферы? Ответ дайте в мкКл, округлив до десятых.

Замечание. Расстояние между центрами шаров много больше их радиусов. (*М. А. Крупина*)

Ответ: 0,2.

Решение. После соединения шаров сумма электрических зарядов не изменится:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \qquad (*)$$

Потенциалы соединённых шаров равны:

$$\frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_1' = q_2' \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Учитывая равенство сумм (*), получим величины зарядов после соединения:

$$q_1 + q_2 = q_2' \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) = q_2' \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_2' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q_1' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

После заземления поверхность сферы является поверхностью нулевого потенциала:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq_1''}{3r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1'' = -Q.$$

Чтобы ток не тёк по проводу, потенциал системы из сферы и первого шара и потенциал второго шара должны быть равны:

$$\frac{kq_1''}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq_2''}{r_2}.$$

Решая, получим новую связь между зарядами шаров:

$$\frac{kq_1''}{r_1} - \frac{kq_1''}{3r_1} = \frac{kq_2''}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_2'' = \frac{2}{3} \cdot q_1'' \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Так как сумма зарядов не изменилась (по аналогии с (*)), получим конечное значение заряда первого шара:

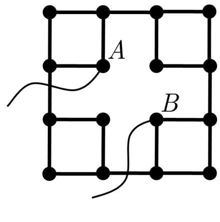
$$q_1 + q_2 = q_1'' + q_2'' = q_1'' \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \quad q_1'' = \frac{q_1 + q_2}{1 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Вычислим изменение заряда первого шара, равное заряду, который пройдёт по соединительному проводу:

$$\Delta q = |q_1' - q_1''| = \left|\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2} \cdot 3r_1\right| = r_1(q_1 + q_2)\left|\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2}\right| =$$

$$= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 \cdot 0{,}7} = 0{,}2 \text{ мкКл}.$$

10.9. **(3 балла)** Электрическая цепь состоит из одинаковых проводников сопротивлением $R = 10$ Ом, образующих сетку (см. рисунок). К узлам A и B подключён омметр.

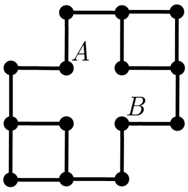


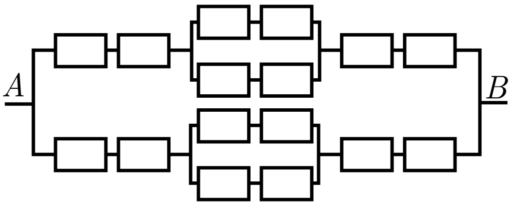
[9] Определите его показания. Ответ дайте в Омах с точностью до целых.

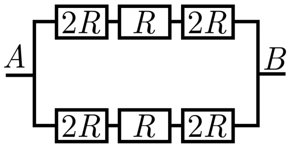
(*М. П. Коробков, Т. А. Андреева*)

Ответ: 25.

Решение. Построим последовательность эквивалентных схем:







В итоге получим $R_{\text{общ}} = 2{,}5R = 25$ Ом.

International Physics Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Solutions of the problems for R10

10.1. (3 points) Sherlock Holmes and Professor Moriarty stepped out of the first and last doors of the arrived train of and headed towards each other at a constant speed. After the boarding of passengers was completed, the train began to move with constant acceleration of 1 m/sec^2, and in 12 sec the last train carriage passed Professor Moriarty, and then in 2 sec more it passed Sherlock Holmes as well. The length of the train and the platform makes 172 m.

[1] How far apart were Sherlock Holmes and Professor Moriarty when the last train carriage left the station? Give your answer in meters, rounded to integers. (*T. Andreeva*)

Answer: 15.

Solution. If τ is the time the train didn't move, L is the length of the train, and v is the speed at which Sherlock Holmes and Professor Moriarty went, then the equations describing their meeting to the last train carriage make

$$\begin{cases} \dfrac{at_1^2}{2} = v(t_1+\tau), \\ \dfrac{a(t_1+t_2)^2}{2} = L - v(t_1+t_2+\tau). \end{cases}$$

Solving this system we get $v = 1$ m/sec and $\tau = 60$ sec.
The time at which the last train carriage left the station is

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18.6 \text{ sec.}$$

By this moment the distance between Sherlock Holmes and Professor Moriarty made

$$S = L - 2v(t_3+\tau) \approx 15 \text{ m.}$$

10.2. (2 points) Cliff diver jumped into the water from a 29-meter high cliff. When he had flown the first 10 m, a spectator fell off the edge of the rock into the water.

[2] How high is the edge if the athlete and the spectator got to the water at the same time? Give the answer in meters, rounded to integers.

Remark. Cliff diving is jumping into the water from natural levels like rocks. Assume that the jumper's initial speed is zero. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2. Ignore air resistance. (*T. Andreeva*)

Answer: 5.

Solution. The height of the cliff is $H_1 = gt_1^2/2$, where t_1 is the total time of the diver flying in the air after the jump:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = 2.4 \text{ sec.}$$

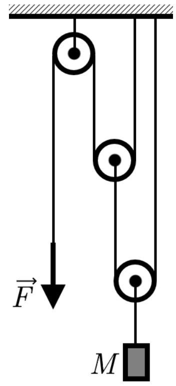
The first 10 meters of the flight after the jump are $\Delta H = g\Delta t^2/2$. In terms of time it took

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta H}{g}} = 1.4 \text{ sec.}$$

The spectator's time of fall is $t_2 = t_1 - \Delta t = 1$ sec, so the height of the edge of the rock:

$$H_2 = \frac{gt_2^2}{2} = 5 \text{ m.}$$

10.3. (3 points) The load of $M = 10$ kg in mass has been lifted using the block system shown in the picture. The constant force of 50 N has been applied to the tightrope within 2 sec and then the tightrope has been dropped by accident and it could only get back under control 4 sec later. It afterwards took 5 sec more to get the load to the necessary level with the same force applied.



[3] At what level has the load been lifted from its initial position? Give the answer in meters.

Remark. Neglect the friction of pulleys and air resistance. Consider the pulleys as weightless, the ropes as light and inextensible, and the parts of ropes that are free of pulleys positioned vertically. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2.

(*M. Krupina*)

Answer: 45.

Solution. The equations of motion of the body and blocks, considering that their masses are equal to zero and the tension forces in each thread are constant:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(here T_2 is the tension force in the right thread, T_3 is the tension force in the left thread). Transform and find the acceleration:

$$Ma = 4F - Mg \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot \frac{F}{M} - g = 4 \cdot \frac{50}{10} - 10 = 10 \ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

The height level and speed at the end of the first two seconds:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ m}, \\ v_1 = at_1 = 20 \ \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}. \end{cases}$$

The height level and speed after next 4 seconds:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 20 + 20 \cdot 4 - \dfrac{10 \cdot 16}{2} = 20 \text{ m}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \ \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}. \end{cases}$$

therefore, the final height level:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 25}{2} = 45 \text{ m}.$$

Criteria. Incorrectly rounded answer «44» costs 2 points.

10.4. (2 points) The kids are sledging. Andrew is pulling the sledge with Mary by the rope at the angle $\alpha = 30°$ to the horizon while Pete is pushing the same kind of sledge with Daria on it directing the force of $F_2 = 140$ N downwards at the angle $\alpha = 30°$ to the horizon.

[4] What force F_1 should Adrew apply so that the girls moved with the same acceleration? Give the answer in Newtons, rounded to integers.

The mass of Mary together with her sledge makes $m_1 = 40$ kg, Daria weighs $m_2 = 35$ kg together with her sledge. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2. Friction coefficient is $\mu = 0.20$.

(*M. Krupina, S. Starovoytov*)

Answer: 127.

Solution. The movement of the sledge with Mary. Newton's second law in projections on the horizontal and vertical axes:

$$\begin{cases} F_1\cos\alpha - F_{\text{fr}1} = m_1 a, \\ F_1\sin\alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$

Besides, $F_{\text{fr}1} = \mu N_1$. Solving the system of equations, we get

$$F_1\cos\alpha - \mu m_1 g + \mu F_1\sin\alpha = m_1 a. \qquad (*)$$

The movement of the sledge with Daria:

$$\begin{cases} F_2\cos\alpha - F_{\text{fr}2} = m_2 a, \\ F_1\sin\alpha + m_1 g = N_2, \\ F_{\text{fr}2} = \mu N_2. \end{cases}$$

When solving the second system, we express the acceleration:

$$a = \frac{F_2\cos\alpha - \mu m_2 g - \mu F_2\sin\alpha}{m_2}.$$

Substitute the acceleration into formula ($*$) and after transformations we get

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{m_1(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 127\ \text{N}.$$

Criteria. Incorrect answers from 124 to 130 cost 1 point (the jury assumes that these errors are caused by incorrect roundings of the trigonometric values).

10.5. **(3 points)** A thin-walled glass cup is floating in a vessel filled with water. The syrup is being slowly poured into it until the glass is immersed in water exactly to its middle. It appears that a quarter of the glass got filled with syrup. The second glass of the same type, filled up to half with water, is floating in the syrup, immersed to its middle.

[5] What part of the second glass will be immersed in the syrup if the contents of the first glass are poured into it? Give your answer as a decimal with an accurancy of hundredths.

(*T. Andreeva*)

Answer: 0.75.

Solution. The equilibrium equation for the first glass:

$$mg + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho_0 g \cdot \frac{V}{2}, \qquad (10.5.1)$$

where m is the mass of the empty glass, V is the volume of the glass, ρ is the syrup density, ρ_0 is the water density.

The equilibrium equation for the second glass:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} = \rho g \cdot \frac{V}{2}. \qquad (10.5.2)$$

By solving together (10.5.1) и (10.5.2), we get

$$m = \frac{\rho_0 V}{6}, \qquad \rho = \frac{4}{3}\cdot\rho_0.$$

Pour the syrup into the glass filled with water:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho g x V,$$

where x is the immersed part of the glass. After substituting the mass and density we get $x = 3/4 =$ $= 0.75$.

Criteria. The wrong answer «0.73», obtained because of incorrect roundings, costs 1 point.

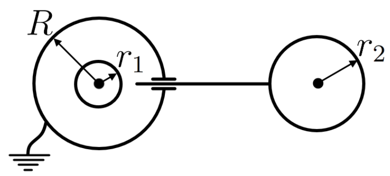
10.6. **(3 points)** Two satellites move in circular orbits in opposite directions around some planet with linear velocities $v_1 = 5$ km/sec and $v_2 = 8$ km/sec. The radius of the planet equals $R = 17.4$ thousand km and the acceleration of free fall on its surface makes $g = 14$ m/sec^2.

and get the answer:

$$\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{total}}} = \frac{\dfrac{\nu R}{2}\left(\dfrac{T_3}{2} - T_1\right)}{\dfrac{\nu R}{2}(4T_3 - 3T_1)} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{T_1}{T_3}}{4 - 3\cdot\dfrac{T_1}{T_3}} = \frac{0.5 - 0.36}{4 - 1.08} = 0.048.$$

Criteria. The wrong answer «4.7», obtained because of incorrect roundings, costs 1 point.

10.8. **(4 points)** Charges of $q_1 = 0.6$ μC and $q_2 = 1.5$ μC were imparted to two metal balls with radii $r_1 = 10$ cm and $r_2 = 20$ cm respectively, and then they were connected with a thin wire. After that, a ball with radius r_1 is placed inside a metal sphere with a radius $R = 3r_1$ and this sphere is grounded.



[8] What charge will pass through the connecting wire when the sphere is being grounded? Give the answer in μC, rounded to tenths.

Remark. The distance between the centers of the balls is much greater than their radii.

(*M. Krupina*)

Answer: 0.2.

Solution. After connecting the balls, the sum of electric charges will not change:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \qquad (*)$$

The potentials of the connected balls are equal:

$$\frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_1' = q_2' \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Given the equality of the sums ($*$), we get the magnitude of the charges after the connection:

$$q_1 + q_2 = q_2' \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) = q_2' \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_2' = (q_1 + q_2)\cdot\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q_1' = (q_1 + q_2)\cdot\dfrac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

After grounding, the surface of the sphere is the surface of zero potential:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq_1''}{3r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1'' = -Q.$$

In order for the current not to flow through the wire, the potential of the system from the sphere and the first ball and the potential of the second ball must be equal:

$$\frac{kq_1''}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq_2''}{r_2}.$$

Solving, we get a new connection between the charges of the balls:

$$\frac{kq_1''}{r_1} - \frac{kq_1''}{3r_1} = \frac{kq_2''}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_2'' = \frac{2}{3}\cdot q_1'' \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Since the amount of charges has not changed (likewise ($*$)), we get the final value of the charge of the first ball:

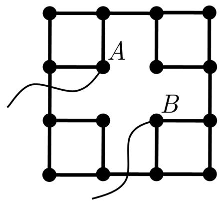
$$q_1 + q_2 = q_1'' + q_2'' = q_1'' \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \quad q_1'' = \frac{q_1 + q_2}{1 + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

The change in the charge of the first ball, which is equal to the charge that will pass through the connecting wire:

$$\Delta q = |q_1' - q_1''| = \left|\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2}\cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2}\cdot 3r_1\right| = r_1(q_1 + q_2)\left|\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2}\right| =$$

$$= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0.1\cdot 0.2\cdot 2.1\cdot 10^{-6}}{0.3\cdot 0.7} = 0.2\ \mu\text{C}.$$

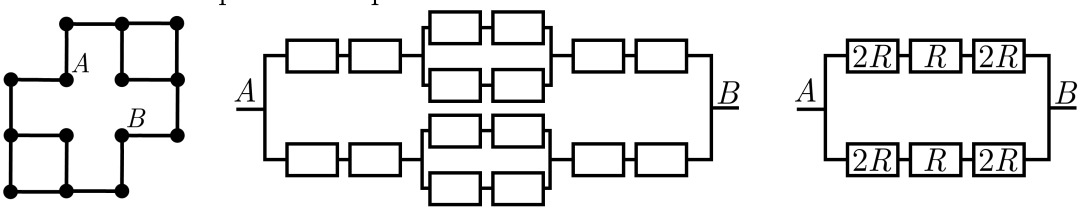
10.9. (3 points) An electrical circuit consists of identical conductors with a resistance of $R = 10\ \Omega$ forming a grid (see pic). An ohmmeter is connected to the nodes A and B.



[9] Find out what the ohmmeter reads. Give your answer in Ω with an accuracy of integers. *(M. Korobkov, T. Andreeva)*

Answer: 25.

Solution. Construct a sequence of equivalent circuits:



As a result $R_{\text{total}} = 2.5R = 25\ \Omega$.