Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (3 балла) Из открывшихся первой и последней дверей прибывшего на станцию поезда вышли Шерлок Холмс и профессор Мориарти и направились навстречу друг другу с постоянной скоростью. После завершения посадки пассажиров поезд начал двигаться с постоянным ускорением 1 м/с^2 и через 12 с последний вагон проехал мимо профессора Мориарти, а ещё через 2 с — мимо Шерлока Холмса. Длина поезда и платформы равны 172 м.

[1] На каком расстоянии друг от друга находились Шерлок Холмс и профессор Мориарти в момент, когда последний вагон поезда покинул станцию? Ответ дайте в метрах, округлив до целых. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 15.

Решение. Если τ — время стоянки поезда, L — длина поезда, а v — скорость Холмса и Мориарти, то уравнения, описывающие их встречу с последним вагоном, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{at_1^2}{2} = v(t_1+\tau), \\ \dfrac{a(t_1+t_2)^2}{2} = L - v(t_1+t_2+\tau). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $v = 1$ м/с и $\tau = 60$ с.

Время, за которое последний вагон поезда покинул станцию, равно

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18{,}6 \text{ с}.$$

Расстояние к этому моменту между Холмсом и Мориарти равно $S = L - 2v(t_3+\tau) \approx 15$ м.

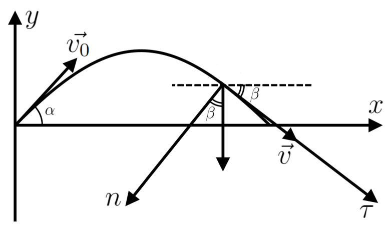
11.2. (3 балла) Спортсмен-толкатель ядра, стоя на горизонтальной поверхности, толкнул ядро со скоростью 12 м/с под углом 30°к горизонту.

[2] Чему будет равен радиус кривизны траектории ядра через 1 с после броска? Ответ приведите в метрах с точностью до десятых.

Замечание. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебрегите. (*М. А. Крупина*)

Ответ: 13,3.

Решение. Рассмотрим точку траектории, в которой тело находится в момент времени $t = 1$ с (см. рис.). Скорость направлена по касательной к траектории. Центр кривизны находится на перпендикуляре к вектору скорости. Угол между перпендикуляром и вертикалью (направление вектора $\vec{g}$) обозначим β.



В любой точке криволинейной траектории мы можем записать выражение для центростремительного ускорения как при движении по окружности с радиусом, равным мгновенному радиусу кривизны R:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_n}. \qquad (*)$$

Спроектируем вектор $\vec{g}$ на нормаль к траектории:

$$a_n = g\cos\beta.$$

Из рисунка видно, что

$$\cos\beta = \frac{v_x}{v}.$$

Запишем проекции скорости тела, брошенного под углом к горизонту:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Тогда для любого момента времени модуль скорости будет равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin\alpha + g^2t^2}.$$

Подставим в ($*$) и преобразуем, используя выражение для горизонтальной составляющей скорости в рассматриваемой точке и её сохранение в процессе движения:

$$R = \frac{v^2}{g\cos\beta} = \frac{v^2 \cdot v}{gv_x} = \frac{v^3}{gv_0\cos\alpha} = \frac{\left(v_0^2 - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\left(144 - 2 \cdot 12 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 + 100\right)^{3/2}}{10 \cdot 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 13{,}3 \text{ м}.$$

Критерии. Неверный ответ «13,2», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

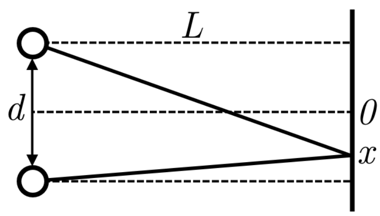
11.3. (2 балла) На краях открытой сцены на расстоянии 6 м установлены две акустические системы. Из-за ошибки звукооператора они «загудели». Зритель, находившийся напротив центра сцены на расстоянии 20 м от неё, обнаружил, что если он смещается из своего начального положения влево или вправо на 2 м, то громкость звука оказывается наименьшей.

[3] На какой частоте «гудели» акустические системы? Ответ приведите в Гц с точностью до целых.

Скорость звука в воздухе была равна 345 м/с. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 292.

Решение. В соответствии с рисунком определим расстояния от акустических систем до зрителя в смещённом положении:



$$S_1 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2}, \qquad S_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}.$$

Условие интерференционного минимума:

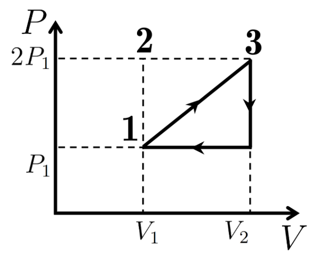
$$\Delta S = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f}.$$

Тогда

$$f = \frac{v}{2\Delta S} = \frac{v}{2\left(\sqrt{L^2 + \left(\dfrac{d}{2} + x\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\dfrac{d}{2} - x\right)^2}\right)} = 292 \text{ Гц}.$$

Критерии. Неверные ответы в диапазоне от 288 до 294 оцениваются в 1 балл (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений).

11.4. (3 балла) На рисунке приведён цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Известно, что КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур, равен 64%, в изохорном процессе давление газа уменьшается в 2 раза.



[4] Определите КПД цикла. Ответ приведите в процентах с точностью до десятых. (*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 6,0.

Решение. Из формулы для КПД цикла Карно определим отношение температур:

$$\eta_\text{К} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \eta_\text{К} = \frac{T_1}{T_2} = 0{,}36,$$

где T_1 и T_2 — температуры в точках 1 и 2.
Полезная работа, полученная в цикле, равна площади внутри цикла, то есть площади треугольника:

$$A_{\text{Ц}} = \frac{1}{2} \cdot P_1(V_2 - V_1) = \frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right).$$

Здесь учтены уравнения состояния в точках 1 и 2 и отношение давлений в этих точках.
Вычислим работу в процессе $1 \to 2$ как площадь трапеции и используем уравнения состояния в точках 1 и 2:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3P_1(V_2 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right).$$

Вычислим изменение внутренней энергии в процессе $1 \to 2$:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_2 - T_1).$$

Определим суммарное количество теплоты, подведённое в процессе $1 \to 2$:

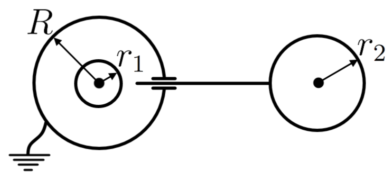
$$Q_{\text{Н}} = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1\right),$$

и вычислим искомый КПД:

$$\eta = \frac{A_{\text{Ц}}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right)}{\frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_2}}{3\left(\frac{3}{2} - \frac{2T_1}{T_2}\right)} = \frac{0{,}5 - 0{,}36}{4{,}5 - 2{,}16} = 0{,}060.$$

Критерии. Неверный ответ «5,9», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

11.5. **(4 балла)** Двум металлическим шарам радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см сообщили заряды $q_1 = 0{,}6$ мкКл и $q_2 = 1{,}5$ мкКл, а потом соединили их тонким проводом. После этого шар радиусом r_1 помещают внутрь металлической сферы радиусом $R = 3r_1$, и эту сферу заземляют.



[5] Какой заряд пройдёт по соединительному проводу при заземлении сферы? Ответ дайте в мкКл, округлив до десятых.

Замечание. Расстояние между центрами шаров много больше их радиусов. (*М. А. Крупина*)
Ответ: 0,2.
Решение. После соединения шаров сумма электрических зарядов не изменится:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \qquad (*)$$

Потенциалы соединённых шаров равны:

$$\frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_1' = q_2' \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Учитывая равенство сумм (*), получим величины зарядов после соединения:

$$q_1 + q_2 = q_2' \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) = q_2' \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_2' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q_1' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

После заземления поверхность сферы является поверхностью нулевого потенциала:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq_1''}{3r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1'' = -Q.$$

Чтобы ток не тёк по проводу, потенциал системы из сферы и первого шара и потенциал второго шара должны быть равны:

$$\frac{kq_1''}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq_2''}{r_2}.$$

Решая, получим новую связь между зарядами шаров:
$$\frac{kq_1''}{r_1} - \frac{kq_1''}{3r_1} = \frac{kq_2''}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_2'' = \frac{2}{3} \cdot q_1'' \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$
Так как сумма зарядов не изменилась (по аналогии с (*)), получим конечное значение заряда первого шара:
$$q_1 + q_2 = q_1'' + q_2'' = q_1'' \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \quad q_1'' = \frac{q_1 + q_2}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}}.$$
Вычислим изменение заряда первого шара, равное заряду, который пройдёт по соединительному проводу:
$$\Delta q = |q_1' - q_1''| = \left|\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2} \cdot 3r_1\right| = r_1(q_1 + q_2)\left|\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2}\right| =$$
$$= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 \cdot 0{,}7} = 0{,}2 \text{ мкКл}.$$

11.6. **(3 балла)** Раздобыв на захваченном корабле бочонок дицианоаурата калия, Джек Воробей решил изготовить несколько сотен фальшивых золотых монет из давно лежащих в заброшенном сундуке медяков какой-то древней забытой страны. Он тщательно измерил монеты — все они имели диаметр 22 мм и толщину 1,5 мм. В качестве источника тока для гальванического покрытия монет золотом Джек взял 11 гигантских электрических скатов, каждый из которых мог давать ток 50 мА в течение 2 часов.

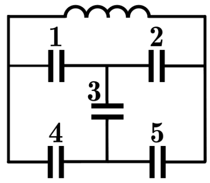
[6] Сколько монет удалось позолотить Джеку, если слой наносимого им золота имел толщину 4,5 мкм? Ответ дайте в виде целого числа.

Замечание. Электрохимический эквивалент золота в этом процессе равен 2,04 мг/Кл, плотность золота — 19,3 г/см^3. (*Фольклор*)

Ответ: 108.

Решение. Полная масса покрытия равна произведению электрохимического эквивалента золота на величину перенесённого электрического заряда Q:
$$m = kQ.$$
Величина перенесённого электрического заряда равна произведению количества скатов (источников тока) на силу тока и время работы каждого источника:
$$Q = nIt.$$
Иначе массу можно выразить в виде произведения количества монет на плотность золота на объём слоя, наносимого на каждую монету:
$$m = N\rho\Delta V.$$
Объём слоя можно записать так:
$$\Delta V = \frac{\pi(d + 2x)^2}{4} \cdot (h + 2x) - \frac{\pi d^2}{4} \cdot h \approx \pi dhx + \frac{\pi d^2 x}{2} = \frac{\pi dx}{2} \cdot (d + 2h),$$
где ΔV — объём слоя золота, d — диаметр монеты, h — толщина монеты, x — толщина слоя золота. Тогда количество монет равно
$$N = \frac{2nkIt}{\rho\pi dx(d + 2h)} = 108.$$
Критерии. Ответы «107» и «109», полученные в результате неправильных округлений, стоят 1 балл.

11.7. **(4 балла)** Катушка с числом витков $N = 1000$ и диаметром $d = 1$ см помещена в однородное магнитное поле, параллельное её оси. Индукция поля равномерно возрастает со скоростью $B_0 = 0{,}01$ Тл/с. Концы катушки замкнуты на батарею из пяти одинаковых конденсаторов общей ёмкостью $C = 1$ мкФ.



[7] Найдите заряд Q_5 на пятом конденсаторе. Ответ дайте в нКл с точностью до сотых.

(*В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов*)

Ответ: 0,39.

Решение. Из закона электро-магнитной индукции:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot SN = B_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot N,$$

где S — площадь поперечного сечения катушки.

Из симметрии системы конденсаторов понятно, что третий конденсатор не заряжен, тогда общая ёмкость

$$C = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = C_0,$$

где C_0 — ёмкость одного конденсатора.

Напряжения в каждой из параллельных ветвей с двумя конденсаторами одинаковые и равны величине ЭДС. При последовательном соединении двух одинаковых конденсаторов напряжение разделяется между ними поровну. Поэтому заряд на пятом конденсаторе:

$$Q_5 = C_0 U_5 = C \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{C B_0 \pi d^2 N}{8} = 0{,}39 \text{ нКл}.$$

11.8. (3 балла) α-частица, летевшая со скоростью $V_x = 2 \cdot 10^5$ м/с вдоль оси OX, попадает в область пространства, где присутствуют однородные электрическое и магнитное поля, причём и напряжённость электрического поля, и индукция магнитного поля направлены вдоль оси OY. $E = 1000$ В/м, $B = 0{,}5$ Тл.

[8] Во сколько раз изменится величина скорости частицы, когда она сделает $N = 20$ оборотов вокруг оси OY? Ответ дайте в виде числа с точностью до десятых.

(*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 1,6.

Решение. Движение частицы будет происходить по винтовой линии с увеличивающимся шагом, ось спирали — вдоль OY. Величина проекции скорости на плоскость, перпендикулярную OY, сохраняется и равна V_x.

Движение вдоль оси y — равноускоренное, так как напряжённость электрического поля постоянна:

$$V_y = a_y t = \frac{qE}{m} t.$$

Полное время движения равно N периодам вращения в постоянном магнитном поле:

$$t = NT = N\frac{2\pi m}{qB} \quad \Rightarrow \quad V_y = \frac{2\pi N E}{B}.$$

Введём коэффициент увеличения скорости n:

$$V = nV_x = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{(2\pi N E)^2}{(V_x B)^2} + 1} = 1{,}6.$$

Критерии. Неверный ответ «1,7», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

11.9. (3 балла) Плоский тонкий предмет был расположен параллельно плоскости тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 10 см. Линзу заменили на собирающую с таким же фокусным расстоянием.

[9] Куда нужно переместить предмет вдоль главной оптической оси так, чтобы размер его изображения не изменился? В ответе укажите один **знак**: «+», если передвинуть к линзе, или «−», если от линзы.

[10] На какое расстояние нужно передвинуть предмет вдоль главной оптической оси так, чтобы размер его изображения не изменился? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

(*С. А. Старовойтов*)

Ответы: **[9]** −. **[10]** 20.

Решение. Для обоих случаев запишем уравнение тонкой линзы.

В первом случае изображение — мнимое уменьшенное прямое:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}.$$

Преобразуем, используя для обозначения увеличения линзы букву Γ:

$$d_1 = \left(\frac{1-\Gamma}{\Gamma}\right) \cdot F.$$

Во втором случае изображение — действительное уменьшенное перевёрнутое:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma}\right) \cdot F.$$

Увеличения в обоих случаях одинаковые, но с разными знаками. Поэтому

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 2F = 20 \text{ см},$$

предмет нужно отодвинуть от линзы.

Критерии. Вопрос **[9]** стоит 1 балл. Вопрос **[10]** стоит 2 балла.

International Physics Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Solutions of the problems for R11

11.1. (3 points) Sherlock Holmes and Professor Moriarty stepped out of the first and last doors of the arrived train of and headed towards each other at a constant speed. After the boarding of passengers was completed, the train began to move with constant acceleration of 1 m/sec^2, and in 12 sec the last train carriage passed Professor Moriarty, and then in 2 sec more it passed Sherlock Holmes as well. The length of the train and the platform makes 172 m.

[1] How far apart were Sherlock Holmes and Professor Moriarty when the last train carriage left the station? Give your answer in meters, rounded to integers. (*T. Andreeva*)

Answer: 15.

Solution. If τ is the time the train didn't move, L is the length of the train, and v is the speed at which Sherlock Holmes and Professor Moriarty went, then the equations describing their meeting to the last train carriage make

$$\begin{cases} \dfrac{at_1^2}{2} = v(t_1+\tau), \\ \dfrac{a(t_1+t_2)^2}{2} = L - v(t_1+t_2+\tau). \end{cases}$$

Solving this system we get $v = 1$ m/sec and $\tau = 60$ sec.
The time at which the last train carriage left the station is

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18.6 \text{ sec.}$$

By this moment the distance between Sherlock Holmes and Professor Moriarty made

$$S = L - 2v(t_3+\tau) \approx 15 \text{ m.}$$

11.2. (3 points) An athlete — a shot putter, standing on a horizontal surface, pushed the shot at a speed of 12 m/sec at an angle of 30° to the horizon.

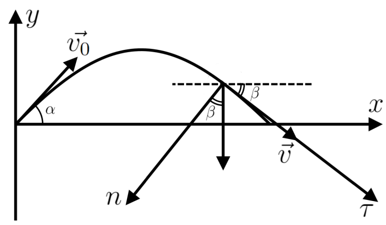
[2] What will be the radius of curvature of the shot trajectory in 1 sec after the throw? Give your answer in meters with an accuracy of tenths.

Remark. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2. Ignore air resistance.

(*M. Krupina*)

Answer: 13.3.

Solution. Consider the point of the trajectory where the body is at the time $t = 1$ sec (see the fig.). The speed is directed tangentially along the trajectory. The center of curvature is located at the perpendicular to the velocity vector. The angle between the perpendicular and the vertical (the direction of the vector $\vec{g}$) corresponds to β.



At any point of a curvilinear trajectory, we can write the expression for centripetal acceleration as when moving along a circle with a radius equal to the instant radius of curvature R:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_n}. \qquad (*)$$

Project the vector $\vec{g}$ onto the normal to the trajectory:

$$a_n = g\cos\beta.$$

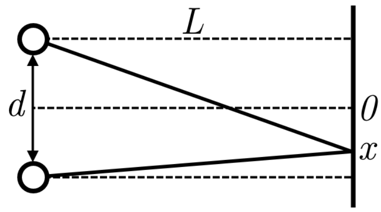
It can be seen from the figure that
$$\cos\beta = \frac{v_x}{v}.$$
The velocities of a body thrown at an angle to the horizon:
$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$
Then for any moment of time, the speed modulus is
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2}.$$
Substitute in ($*$) and transform using the expression for the horizontal component of the velocity at the point under consideration and its conservation during the movement process:
$$R = \frac{v^2}{g\cos\beta} = \frac{v^2\cdot v}{gv_x} = \frac{v^3}{gv_0\cos\alpha} = \frac{\left(v_0^2 - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\left(144 - 2\cdot 12\cdot \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 1 + 100\right)^{3/2}}{10\cdot 12\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 13.3\text{ m}.$$
Criteria. The wrong answer «13.2», obtained because of incorrect roundings, costs 1 point.

11.3. (2 points) Two acoustic systems were installed at the edges of the open-air stage at the distance of 6 m. Due to a mistake by the sound engineer, they «buzzed». The viewer, who was opposite the center of the stage at the distance of 20 m from it, found out that if he moved from his initial position 2 m either to the left or right, then the sound volume turned out to be the smallest.

[3] At what frequency did the speakers buzz? Give the answer in Hz, rounded to integers. The speed of sound in air was 345 m/sec. (*T. Andreeva*)

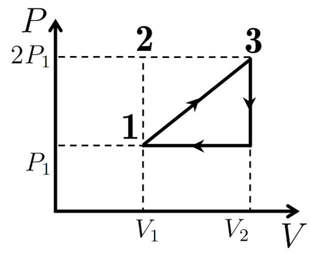
Answer: 292.

Solution. According to the figure, we determine the distances from the acoustic systems to the viewer in an offset position:



$$S_1 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2}, \qquad S_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}.$$
Interference minimum condition:
$$\Delta S = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f}.$$
Therefore,
$$f = \frac{v}{2\Delta S} = \frac{v}{2\left(\sqrt{L^2 + \left(\dfrac{d}{2} + x\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\dfrac{d}{2} - x\right)^2}\right)} = 292\text{ Hz}.$$
Criteria. Incorrect answers from 288 to 294 cost 1 point (the jury assumes that these errors are caused by incorrect roundings).

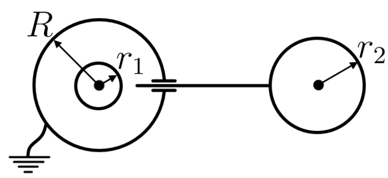
11.4. (3 points) The figure shows a cycle carried out with a monatomic ideal gas. it is known that the efficiency of the Carnot cycle carried out in the same temperature range is 64%, and with isobaric expansion the volume of the gas increases by 2 times.



[4] Find out the efficiency of the cycle. Give the answer in percentages with an accuracy of tenths. (*S. Starovoytov*)

Answer: 6.0.
Solution. From the formula for the efficiency of the Carnot cycle, we determine the temperature ratio:
$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_1}{T_2} = 0{,}36,$$
where T_1 and T_2 are the temperatures at points 1 and 2.
The useful work obtained in the cycle is equal to the area inside the cycle, that is, the area of the triangle:
$$W_{\text{cycle}} = \frac{1}{2} \cdot P_1(V_2 - V_1) = \frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right).$$
Here the equations of state at points 1 and 2 and the ratio of pressures at these points are taken into account.
The work for the process $1 \to 2$ as the area of the trapezoid and use the equations of state at points 1 and 2:
$$W_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3P_1(V_2 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right).$$
The change in internal energy in the process $1 \to 2$:
$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_2 - T_1).$$
Now determine the total amount of heat in process $1 \to 2$:
$$Q_{\text{total}} = W_{12} + \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1\right),$$
and get the answer:
$$\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{total}}} = \frac{\frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_2}{2} - T_1\right)}{\frac{3}{2} \cdot \nu R\left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_2}}{3\left(\frac{3}{2} - \frac{2T_1}{T_2}\right)} = \frac{0.5 - 0.36}{4.5 - 2.16} = 0.060.$$
Criteria. The wrong answer «5.9», obtained because of incorrect roundings, costs 1 point.

11.5. (4 points) Charges of $q_1 = 0.6$ μC and $q_2 = 1.5$ μC were imparted to two metal balls with radii $r_1 = 10$ cm and $r_2 = 20$ cm respectively, and then they were connected with a thin wire. After that, a ball with radius r_1 is placed inside a metal sphere with a radius $R = 3r_1$ and this sphere is grounded.



[5] What charge will pass through the connecting wire when the sphere is being grounded? Give the answer in μC, rounded to tenths.
Remark. The distance between the centers of the balls is much greater than their radii.

(M. Krupina)

Answer: 0.2.
Solution. After connecting the balls, the sum of electric charges will not change:
$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \qquad (*)$$
The potentials of the connected balls are equal:
$$\frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_1' = q_2' \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$
Given the equality of the sums ($*$), we get the magnitude of the charges after the connection:
$$q_1 + q_2 = q_2' \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) = q_2' \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_2' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q_1' = (q_1 + q_2) \cdot \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

After grounding, the surface of the sphere is the surface of zero potential:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq_1''}{3r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1'' = -Q.$$

In order for the current not to flow through the wire, the potential of the system from the sphere and the first ball and the potential of the second ball must be equal:

$$\frac{kq_1''}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq_2''}{r_2}.$$

Solving, we get a new connection between the charges of the balls:

$$\frac{kq_1''}{r_1} - \frac{kq_1''}{3r_1} = \frac{kq_2''}{r_2} \quad \Rightarrow \quad q_2'' = \frac{2}{3} \cdot q_1'' \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Since the amount of charges has not changed (likewise (*)), we get the final value of the charge of the first ball:

$$q_1 + q_2 = q_1'' + q_2'' = q_1'' \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \quad q_1'' = \frac{q_1 + q_2}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}}.$$

The change in the charge of the first ball, which is equal to the charge that will pass through the connecting wire:

$$\Delta q = |q_1' - q_1''| = \left|\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2} \cdot 3r_1\right| = r_1(q_1 + q_2)\left|\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2}\right| =$$

$$= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.2 \cdot 2.1 \cdot 10^{-6}}{0.3 \cdot 0.7} = 0.2\ \mu\text{C}.$$

11.6. (3 points) Having obtained a barrel of potassium dicyanoaurate on a captured ship, Jack the Sparrow decided to make several hundred fake gold coins from copper coins of some ancient forgotten country that had long been lying in an abandoned chest. He carefully measured the coins — they all had a diameter of 22 mm and the thickness of 1.5 mm. As a current source for electroplating coins with gold Jack took 11 giant electric stingrays, who could give the current of as much as 50 mA for 2 hours each.

[6] How many coins did Jack manage to gild if the layer of gold applied by him was 4.5 μm thick? Give the answer as an integer.

Remark. The electrochemical equivalent of gold in this process is 2.04 mg/C, the density of gold makes 19.3 g/cm^3. (*Folklore*)

Answer: 108.

Solution. The total mass of the plating is equal to the multiplication product of the electrochemical equivalent of gold and the value of the transferred electric charge Q:

$$m = kQ.$$

The value of the transferred electric charge is equal to the multiplication product of the number of stingrays (current sources) by the current strength and the operating time of the each source:

$$Q = nIt.$$

Otherwise, the mass can be expressed as the multiplication product of the number of coins and the density of gold and the volume of the layer applied to each coin:

$$m = N\rho\Delta V.$$

The volume of the layer can be written in the following way:

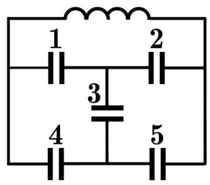
$$\Delta V = \frac{\pi(d + 2x)^2}{4} \cdot (h + 2x) - \frac{\pi d^2}{4} \cdot h \approx \pi dhx + \frac{\pi d^2 x}{2} = \frac{\pi dx}{2} \cdot (d + 2h),$$

where ΔV is the volume of the gold layer, d is the diameter of the coin, h is the thickness of the coin, x is the thickness of the golden layer. Then the number of coins makes

$$N = \frac{2nkIt}{\rho\pi dx(d+2h)} = 108.$$

Criteria. The wrong answers «107» and «109», obtained because of incorrect roundings, cost 1 point.

11.7. (4 points) A coil with a number of turns $N = 1000$ and the diameter $d = 1$ cm is placed in a uniform magnetic field parallel to its axis. The field induction increases uniformly with the speed $B_0 = 0.01$ T/sec. The ends of the coil are closed to a battery of five identical capacitors, with a total capacity of $C = 1$ μF.



[7] Find out the charge Q_5 on the fifth capacitor. Give your answer in nC with accuracy of hundredths. (*V. Kuzmichev, S. Starovoytov*)

Answer: 0.39.

Solution. From the law of electro-magnetic induction:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot SN = B_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot N,$$

where S is the cross-sectional area of the coil.

From the symmetry of the capacitor system, it is clear that the third capacitor is not charged. Then the total capacity:

$$C = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = C_0,$$

where C_0 is capacitance of one item.

The voltages in each of the parallel branches with two capacitors are the same and equal to the EMF value. When two identical capacitors are connected in series, the voltage is divided equally between them. Therefore, the charge on the fifth capacitor :

$$Q_5 = C_0 U_5 = C \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{CB_0\pi d^2 N}{8} = 0{,}39 \text{ nC}.$$

11.8. (3 points) α-particle flying at a speed of $V_x = 2 \cdot 10^5$ m/sec along the axis OX, enters the region of space where there are uniform electric and magnetic fields, and both the electric field strength and the magnetic field induction are directed along the axis OY. $E = 1000$ V/m, $B = 0.5$ T.

[8] In how many times will the particle's velocity change when it makes $N = 20$ full turns around the OY axis? Give your answer as a number with an accuracy of tenths. (*S. Starovoytov*)

Answer: 1.6.

Solution. The particle will move along a helical line with increasing pitch, the helix axis — along OY. The value of the velocity projection onto the plane perpendicular to OY is preserved and equal V_x.

The movement along the y axis is uniformly accelerated as the electric field strength is constant:

$$V_y = a_y t = \frac{qE}{m} t.$$

The total time of movement is equal to N periods of rotation in a constant magnetic field:

$$t = NT = N\frac{2\pi m}{qB} \quad \Rightarrow \quad V_y = \frac{2\pi NE}{B}.$$

Introduce the speed increase factor n:

$$V = nV_x = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{(2\pi NE)^2}{(V_x B)^2} + 1} = 1.6.$$

Criteria. The wrong answer «1.7», obtained because of incorrect roundings, costs 1 point.

11.9. (3 points) A flat thin object was placed parallel to the plane of a thin divergent lens with a focal length of 10 cm. The lens was replaced with a converging lens with the same focal length.

[9] Where should the object be moved along the main optical axis so that the size of its image does not change? Give only one **symbol**: either «+» if the object should be moved to the lens, or «−» if otherwise.

[10] What distance should the object be moved along the main optical axis so that the size of its image does not change? Give your answer in centimeters with an accuracy of integers.

(*S. Starovoytov*)

Answers: **[9]** −. **[10]** 20.

Solution. Let's write down the thin lens equation For both cases.

In the first case, the image is an imaginary reduced direct image:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}.$$

Transform by using the letter Γ to denote the magnification of the lens:

$$d_1 = \left(\frac{1-\Gamma}{\Gamma}\right) \cdot F.$$

In the second case, the image is a real reduced inverted image:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \left(\frac{\Gamma+1}{\Gamma}\right) \cdot F.$$

The magnifications in both cases are the same, but with different signs. Therefore

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 2F = 20 \text{ cm},$$

and the object must be moved away from the lens.

Criteria. Question **[9]** costs 1 point. Question **[10]** costs 2 points.