Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (3 балла) Поезд, отправившийся с вокзала Кингс-Кросс, 1/8 часть пути прошёл со скоростью $v_1 = 52$ км/ч. Средняя скорость поезда на всём пути оказалась равной $\langle v \rangle = 34$ км/ч.

[1] С какой постоянной скоростью поезд двигался на оставшейся части пути, если известно, что 1/10 часть всего времени движения поезд стоял, пропуская экспресс из Хогвартса? Ответ дайте в км/ч, округлив до десятых. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 36,4.

Решение. Суммарное время пути складывается из времени движения со скоростью v_1 ожидания и движения со скоростью v_3:

$$t = t_1 + \frac{t}{10} + t_3 = \frac{S}{8v_1} + \frac{t}{10} + \frac{7S}{8v_3} = \frac{10S}{72v_1} + \frac{70S}{72v_3}.$$

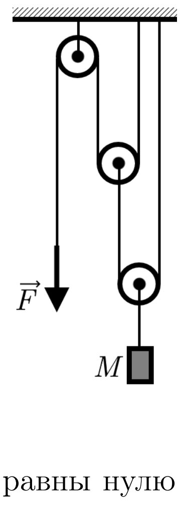
Из определения средней скорости:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S}{\dfrac{10S}{72v_1} + \dfrac{70S}{72v_3}} = \frac{S}{\dfrac{S}{72} \cdot \left(\dfrac{10}{v_1} + \dfrac{13}{v_3}\right)} = \frac{72v_1v_3}{10v_3 + 70v_1},$$

$$v_3 = \frac{70\langle v \rangle v_1}{72v_1 - 10\langle v \rangle} = 36{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии. Ответ, округлённый до целых («36»), оценивается в 1 балл. Ответы с ошибкой в десятую долю, вызванной округлениями («36,3» и «36,5»), оцениваются в 2 балла. Правильный ответ, округлённый до сотых («36,36»), оценивается в полный балл.

9.2. (3 балла) Груз массой $M = 10$ кг поднимают, используя систему блоков, показанную на рисунке. К канату в течение 2 с прикладывали постоянную силу 50 Н, потом канат случайно отпустили и смогли поймать только спустя 4 с, после чего понадобилось ещё 5 с, чтобы, прикладывая ту же силу, всё-таки поднять груз на необходимую высоту.



[2] На какую высоту был поднят груз от его начального положения? Ответ дайте в метрах.

Замечание. Трением в блоках и сопротивлением воздуха пренебрегите, блоки считайте невесомыми, нити — лёгкими и нерастяжимыми, участки нитей, не лежащие на блоках — вертикальными. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. (*М. А. Крупина*)

Ответ: 45.

Решение. Запишем уравнения движения тела и блоков, учитывая что их массы равны нулю и силы натяжения в каждой нити постоянны:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(здесь T_2 — сила натяжения в правой нити, T_3 — сила натяжения в левой нити). Преобразуем и найдём ускорение:

$$Ma = 4F - Mg \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot \frac{F}{M} - g = 4 \cdot \frac{50}{10} - 10 = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определим высоту подъёма и скорость в конце первых двух секунд:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_1 = at_1 = 20 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим высоту подъёма и скорость после следующих 4 секунд:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 20 + 20 \cdot 4 - \dfrac{10 \cdot 16}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим конечную высоту подъёма:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 25}{2} = 45 \text{ м}.$$

Критерии. Неверный ответ «44», вызванный ошибкой округления, оценивается в 2 балла.

9.3. (3 балла) Дети катаются на санках. Андрей тащит санки с Машей за верёвку под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, а Петя толкает такие же санки с Дашей, направляя силу $F_2 = 140$ Н вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

[3] Какую силу F_1 должен прикладывать Андрей, чтобы девочки двигались с одинаковым ускорением? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целых.

Масса Маши вместе с санками $m_1 = 40$ кг, масса Даши вместе с санками $m_2 = 35$ кг. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Коэффициент трения $\mu = 0{,}20$.

(*М. А. Крупина, С. А. Старовойтов*)

Ответ: 127.

Решение. Рассмотрим движение санок с Машей. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} F_1 \cos\alpha - F_{\text{тр}_1} = m_1 a, \\ F_1 \sin\alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$

Кроме того, $F_{\text{тр}_1} = \mu N_1$. Решая систему уравнений, получим

$$F_1 \cos\alpha - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin\alpha = m_1 a. \qquad (*)$$

Рассмотрим движение санок с Дашей:

$$\begin{cases} F_2 \cos\alpha - F_{\text{тр}_2} = m_2 a, \\ F_1 \sin\alpha + m_1 g = N_2, \\ F_{\text{тр}_2} = \mu N_2. \end{cases}$$

Решая вторую систему, выразим ускорение:

$$a = \frac{F_2 \cos\alpha - \mu m_2 g - \mu F_2 \sin\alpha}{m_2}.$$

Подставим ускорение в формулу (*) и, после преобразований, получим

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{m_1(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)}{m_2(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)} = 127 \text{ Н}.$$

Критерии. Неправильные ответы в диапазоне от 120 до 135 оцениваются в 1 балл; ответ «126» оценивается в 2 балла (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений тригонометрических функций).

9.4. **(3 балла)** Дед Мазай спасает 7 зайцев в весеннее половодье. Испуганные зайцы сидят на корме лодки, а дед Мазай стоит на носу. Длина лодки — 3,4 м, масса — 110 кг. Масса дедушки в тулупе — 90 кг.
Недалеко от берега лодка остановилась, Мазай и зайцы поменялись местами: дедушка оказался на корме, а зайцы на носу лодки. В результате лодка приблизилась к берегу на 1 м.

[4] Найдите среднюю массу зайца. Ответ дайте в килограммах, округлив до десятых.

(*Т. А. Андреева*)

Ответ: 3,4.
Решение. Центр масс системы «Лодка + Мазай + Зайцы» не смещается при передвижении Мазая и зайцев по лодке. Найдём центр масс системы в обоих случаях относительно кормы лодки:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{M_{\text{Л}} \cdot \dfrac{l}{2} + M_{\text{М}} l}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm}, \\ x_2 = \dfrac{M_{\text{Л}} \cdot \dfrac{l}{2} + nml}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm}. \end{cases}$$

Здесь m — масса зайца, $M_{\text{Л}}$ — масса лодки, $M_{\text{М}}$ — масса Мазая, l — длина лодки. Тогда смещение лодки равно

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{M_{\text{М}} l - nml}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M_{\text{М}} l - \Delta x (M_{\text{М}} + M_{\text{Л}})}{n(l + \Delta x)} = 3{,}4 \text{ кг}.$$

Критерии. Ответы в диапазоне от 3 до 3,8 оцениваются в 1 балл; ответы в диапазоне 3,3 до 3,5 оцениваются в 2 балла (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью округлений).

9.5. **(4 балла)** Тонкостенный цилиндрический стакан, на $1/4$ наполненный кленовым сиропом, плавает в сосуде с водой, погрузившись до середины. Тот же стакан, но наполненный на $1/2$ водой, плавает в сосуде с сиропом, также погрузившись до середины.

[5] Какую часть стакана можно наполнить сиропом, чтобы он не утонул в воде?
[6] И какую часть стакана можно наполнить сиропом, чтобы он не утонул в сиропе?
Оба ответа дайте в виде десятичных дробей с округлением до тысячных. (*Т. А. Андреева*)
Ответы: **[5]** 0,625. **[6]** 0,875.
Решение [5]. Выпишем условия равновесия для стакана массой m:

$$\text{для первого случая:} \qquad mg + \frac{1}{4} \cdot \rho_s g V = \frac{1}{2} \cdot \rho g V, \tag{9.5.1}$$

$$\text{для второго случая:} \qquad mg + \frac{1}{2} \cdot \rho g V = \frac{1}{2} \cdot \rho_s g V, \tag{9.5.2}$$

где V — объём стакана, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность воды, ρ_s — плотность сиропа. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\frac{3}{4} \cdot \rho_s g V = \rho g V,$$

$$\rho_s = \frac{4}{3} \cdot \rho, \tag{9.5.3}$$

$$\rho_s = \frac{4}{3} \cdot \rho = 1333\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Подставляя (9.5.3) в (9.5.1) или (9.5.2), имеем

$$m = \frac{1}{6} \cdot \rho V = \frac{1}{8} \cdot \rho_s V.$$

Чтобы стакан с сиропом не утонул в воде, надо, чтобы

$$mg + x\rho_s gV \leqslant \rho gV,$$

$$\frac{1}{6} \cdot \rho gV + x \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho gV \leqslant \rho gV,$$

$$x \leqslant \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Т.е. не более 5/8 объёма стакана.

Решение [6]. Чтобы стакан с сиропом не утонул в сиропе, надо, чтобы

$$mg + x\rho_s gV \leqslant \rho_s gV,$$

$$\frac{1}{8} \cdot \rho_s gV + x\rho_s gV \leqslant \rho_s gV,$$

$$x \leqslant \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

Т.е. не более 7/8 объёма стакана.

Критерии. Оба вопроса стоят по 2 балла каждый. Ответы, округлённые до десятых или сотых (т.е. «0,6», «0,62» или «0,63» на вопрос **[5]** и «0,9», «0,87» и «0,88» на вопрос **[6]**), оцениваются в 1 балл.

9.6. **(3 балла)** Два спутника движутся по круговым орбитам в противоположных направлениях вокруг планеты Шелезяка с линейными скоростями $v_1 = 5$ км/с и $v_2 = 8$ км/с. Радиус планеты равен $R = 17{,}4$ тыс. км, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 14$ м/с^2.

[7] Найдите интервал времени, через который спутники периодически сближаются друг с другом на минимальное расстояние. Результат выразите в часах, округлив до десятых.

(*М. П. Коробков, Т. А. Андреева*)

Ответ: 11,6.

Решение. Запишем соотношение между гравитационной силой и силой тяжести на поверхности планеты:

$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \quad \Rightarrow \quad gR^2 = GM.$$

Запишем уравнения движения спутников на орбитах:

$$G \cdot \frac{mM}{r_1^2} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2},$$

$$G \cdot \frac{mM}{r_2^2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.$$

В момент наибольшего сближения (после предыдущего) спутники «на двоих» опишут угол 2π:

$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости спутников.

После подстановки и преобразований получим

$$t = \frac{2\pi gR^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11{,}6 \text{ часа}.$$

Критерии. Ответ, округлённый до целого («12»), оценивается в 2 балла.

9.7. **(4 балла)** Рита и Маруся сварили 2 литра клюквенного морса. До прихода гостей оставалось совсем немного времени, а морс всё ещё был тёплым (40°C). Девочки хотели охладить его побыстрее с помощью 20 пластмассовых шариков со льдом (−20°C), но поспорили и разделили морс и шарики между собой поровну. Рита положила сразу все шарики в морс, а Маруся разлила морс в два одинаковых кувшина и положила шарики в один из них, подождала,

помешивая морс, пока температуры шариков и морса сравняются, и переложила их во второй кувшин. Когда температуры снова сравнялись, Маруся слила морс в один большой кувшин.

[8] Чей морс оказался в итоге холоднее? В ответе укажите **букву** Р, если у Риты, или М, если у Маруси.

[9] На сколько градусов морс оказался холоднее? Ответ округлите до целых.

Масса льда в одном шарике — 20 граммов.

Замечание. Удельная теплоёмкость воды (и морса) — 4,2 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплоёмкость льда — 2,0 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг. (*Т. А. Андреева*)

Ответы: [8] М. **[9]** 2.

Решение. Запишем уравнения теплового равновесия для манипуляций Риты:

$$\rho\cdot\frac{V}{2}\cdot c\left(t_1-t_2^{\text{Рита}}\right)=\frac{N}{2}\cdot mc_{\text{Л}}(0-t_{\text{Л}})+\frac{N}{2}\cdot m\lambda+\frac{N}{2}\cdot mc\left(t_2^{\text{Рита}}-0\right),$$

где c — удельная теплоёмкость воды, ρ — плотность воды, V — объём воды, m — масса шарика льда, N — количество шариков, $t_{\text{Л}}$ — начальная температура льда, λ — удельная теплота плавления льда, t_1 — начальная температура морса, $c_{\text{Л}}$ — удельная теплоёмкость льда.

Тогда

$$t_2^{\text{Рита}}=\frac{\rho Vct_1-Nm(c_{\text{Л}}(0-t_{\text{Л}})+\lambda)}{\rho Vc+Nmc}=\frac{184}{10{,}08}\approx 18^\circ\text{C}.$$

Аналогично напишем уравнения теплового равновесия для манипуляций Маруси. Для первого кувшина:

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_1-t_2^1)=\frac{N}{2}\cdot mc_{\text{Л}}(0-t_{\text{Л}})+\frac{N}{2}\cdot m\lambda+\frac{N}{2}\cdot mc(t_2^1-0),$$

$$t_2^1=\frac{\rho\cdot\dfrac{V}{2}\cdot ct_1-Nm(c_{\text{Л}}(0-t_{\text{Л}})+\lambda)}{\rho\cdot\dfrac{V}{2}\cdot c+Nmc}=\frac{16}{5{,}88}=2{,}72^\circ\text{C}.$$

Для второго кувшина:

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_1-t_2^2)=\frac{N}{2}\cdot mc(t_2^2-t_2^1)\quad\Rightarrow\quad t_2^2=\frac{\rho\cdot\dfrac{V}{2}\cdot t_1+Nmt_2^1}{\rho\cdot\dfrac{V}{2}+Nm}=\frac{41{,}09}{1{,}4}=29{,}35^\circ\text{C}.$$

для третьего кувшина

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_2^2-t_2^{\text{Маруся}})=\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_2^{\text{Маруся}}-t_2^1)\quad\Rightarrow\quad t_2^{\text{Маруся}}=\frac{t_2^1+t_2^2}{2}\approx 16^\circ\text{C}.$$

Таким образом, у Маруси морс окажется холоднее на $18-16=2^\circ$C.

Критерии. Оба вопроса стоят по 2 балла каждый. Ответ на вопрос **[9]**, округлённый не до целого (например, «2,1»), оценивается в полный балл.

9.8. (2 балла) В котле паровоза вода с начальной температурой 20°C доводится до кипения, испаряется и в пароперегревателе нагревается до 300°C. Перегретый пар поступает в паровую машину, коэффициент полезного действия которой равен 30%.

[10] Чему равна мощность паровой машины, если расход воды равен 7,2 м^3/ч? Ответ дайте в МВт, округлив до целых.

Замечание. Удельная теплоёмкость воды — 4,2 $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота парообразования воды — 2,3 МДж/кг, средняя теплоёмкость водяного пара в диапазоне 100–300°C равна 4,2 $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. (*Т. А. Андреева*)

Ответ: 2.

Решение. По определению коэффициента полезного действия,

$$\eta=\frac{P_{\text{П}}}{P_{\text{З}}}.$$

Вычислим «затраченную» мощность:

$$P_З = \frac{Q_З}{t} = \frac{\rho V c(t_К - t_0) + \rho V r + \rho_П V_П c_П (t_П - t_К)}{t}.$$

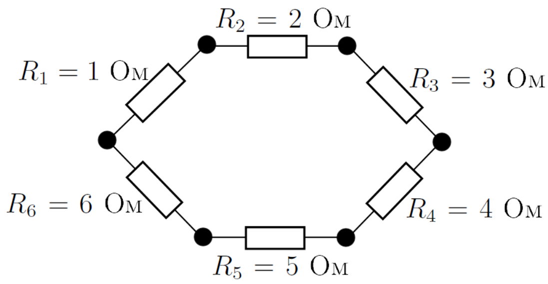
Здесь c — удельная теплоёмкость воды, $c_П$ — удельная теплоёмкость пара, V — объём воды, ρ — плотность воды, $t_К$ — температура кипения, $t_П$ — температура пара, $V_П$ — объём пара, $\rho_П$ — плотность пара.

Учитывая, что $V_П \rho_П = V\rho$, вычислим полезную мощность:

$$P_П = \frac{\eta Q_З}{t} = \eta\rho \cdot \frac{V}{t} \cdot \big(c(t_К - t_0) + r + c_П(t_П - t_К)\big) = 2\ \text{МВт}.$$

Критерии. Округлённый до десятых долей ответ «2,1» оценивается в 2 балла.

9.9. **(3 балла)** Шесть резисторов сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом и $R_6 = 6$ Ом соединены последовательно и замкнуты кольцом. К двум контактам получившейся цепи (чёрные точки на рисунке) подключили источник постоянного напряжения так, что сопротивление цепи между этими контактами **максимально**. Напряжение источника $U = 36$ В.



[11] Найдите мощность P_3, выделяющуюся на резисторе R_3. Ответ приведите в Вт, округлив до целых. (*С. А. Старовойтов*)

Ответ: 39.

Решение. Между любой парой контактов имеем две параллельные ветви резисторов. Сопротивление такой схемы

$$R_{общ} = \frac{R_I R_{II}}{R_I + R_{II}}.$$

При любом подключении сумма сопротивлений обеих ветвей одинакова (21 Ом). Произведение максимально для случая $10 \cdot 11 = 110$. Поэтому сопротивление всей схемы максимально при подключении к такой паре контактов, когда в одной ветви стоят последовательно резисторы $1\ \text{Ом} + 2\ \text{Ом} + 3\ \text{Ом} + 4\ \text{Ом} = 10$ Ом, а в другой ветви — резисторы $5\ \text{Ом} + 6\ \text{Ом} = 11$ Ом.

Ток в первой ветви:

$$I_{1234} = \frac{U}{R_{1234}} = \frac{36}{10} = 3{,}6\ \text{А}.$$

Мощность, выделяющаяся на третьем резисторе:

$$P_3 = I_{1234}^2 R_3 = 3{,}6^2 \cdot 3 = 38{,}88 \approx 39\ \text{Вт}.$$

Критерии. Неокруглённый ответ (например, «38,88») оценивается в полный балл.

International Physics Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Solutions of the problems for R9

9.1. **(3 points)** The train that started from Kings Cross railway station has travelled 1/8 of its way at the speed of $v_1 = 52$ km/h. The average velocity of the train on its whole way has made $\langle v\rangle = 34$ km/h.

[1] At what speed has the train made the rest of its way if we know that 1/10 of the whole time it took him to make its way the train has been stopped to let the Hogwarts Express go? Give the answer in km/h, rounded to tenths. (*T. Andreeva*)

Answer: 36.4.

Solution. The total travel time is the sum of the time of movement at the speed v_1 of waiting and movement at speed v_3:

$$t = t_1 + \frac{t}{10} + t_3 = \frac{S}{8v_1} + \frac{t}{10} + \frac{7S}{8v_3} = \frac{10S}{72v_1} + \frac{70S}{72v_3}.$$

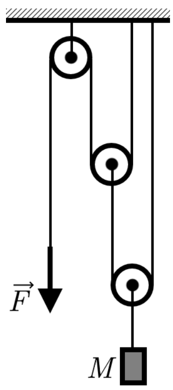
From the definition of average speed:

$$\langle v\rangle = \frac{S}{t} = \frac{S}{\dfrac{10S}{72v_1} + \dfrac{70S}{72v_3}} = \frac{S}{\dfrac{S}{72}\cdot\left(\dfrac{10}{v_1} + \dfrac{13}{v_3}\right)} = \frac{72v_1v_3}{10v_3 + 70v_1},$$

$$v_3 = \frac{70\langle v\rangle v_1}{72v_1 - 10\langle v\rangle} = 36.4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Criteria. The right answer rounded to integers («36») costs 1 point; rounded to hundreds («36.36») costs 3 points. Answers with a tenth of an error («36.3» and «36.5») cost 2 points.

9.2. **(3 points)** The load of $M = 10$ kg in mass has been lifted using the block system shown in the picture. The constant force of 50 N has been applied to the tightrope within 2 sec and then the tightrope has been dropped by accident and it could only get back under control 4 sec later. It afterwards took 5 sec more to get the load to the necessary level with the same force applied.



[2] At what level has the load been lifted from its initial position? Give the answer in meters.

Remark. Neglect the friction of pulleys and air resistance. Consider the pulleys as weightless, the ropes as light and inextensible, and the parts of ropes that are free of pulleys positioned vertically. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2. (*M. Krupina*)

Answer: 45.

Solution. The equations of motion of the body and blocks, considering that their masses are equal to zero and the tension forces in each thread are constant:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(here T_2 is the tension force in the right thread, T_3 is the tension force in the left thread). Transform and find the acceleration:

$$Ma = 4F - Mg \quad \Rightarrow \quad a = 4\cdot\frac{F}{M} - g = 4\cdot\frac{50}{10} - 10 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

The height level and speed at the end of the first two seconds:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} = \dfrac{10\cdot 4}{2} = 20\ \text{m}, \\ v_1 = at_1 = 20\ \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}. \end{cases}$$

The height level and speed after next 4 seconds:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 20 + 20\cdot 4 - \dfrac{10\cdot 16}{2} = 20\ \text{m}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10\cdot 4 = -20\ \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}. \end{cases}$$

therefore, the final height level:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20\cdot 5 + \frac{10\cdot 25}{2} = 45\ \text{m}.$$

Criteria. Incorrectly rounded answer «44» costs 2 points.

9.3. (3 points) The kids are sledging. Andrew is pulling the sledge with Mary by the rope at the angle $\alpha = 30^\circ$ to the horizon while Pete is pushing the same kind of sledge with Daria on it directing the force of $F_2 = 140$ N downwards at the angle $\alpha = 30^\circ$ to the horizon.

[3] What force F_1 should Adrew apply so that the girls moved with the same acceleration? Give the answer in Newtons, rounded to integers.

The mass of Mary together with her sledge makes $m_1 = 40$ kg, Daria weighs $m_2 = 35$ kg together with her sledge. Consider the acceleration of gravity to be 10 m/sec^2. Friction coefficient is $\mu = 0.20$.

(*M. Krupina, S. Starovoytov*)

Answer: 127.

Solution. The movement of the sledge with Mary. Newton's second law in projections on the horizontal and vertical axes:

$$\begin{cases} F_1\cos\alpha - F_{\text{fr}1} = m_1 a, \\ F_1\sin\alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$

Besides, $F_{\text{fr}1} = \mu N_1$. Solving the system of equations, we get

$$F_1\cos\alpha - \mu m_1 g + \mu F_1\sin\alpha = m_1 a. \qquad (*)$$

The movement of the sledge with Daria:

$$\begin{cases} F_2\cos\alpha - F_{\text{fr}2} = m_2 a, \\ F_1\sin\alpha + m_1 g = N_2, \\ F_{\text{fr}2} = \mu N_2. \end{cases}$$

When solving the second system, we express the acceleration:

$$a = \frac{F_2\cos\alpha - \mu m_2 g - \mu F_2\sin\alpha}{m_2}.$$

Substitute the acceleration into formula $(*)$ and after transformations we get

$$F_1 = F_2\cdot\frac{m_1(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 127\ \text{N}.$$

Criteria. Incorrect answers from 120 to 135 cost 1 point, except for the answer «126», which costs 2 points (the jury assumes that these errors are caused by incorrect roundings of the trigonometric values).

9.4. (3 points) Grandpa Mazai is saving seven hares in the spring floods. Frightened hares are sitting at the stern of the boat, and grandpa Mazai is standing on the bow. The boat is 3.4 m long and weighs 110 kg. The mass of grandpa in his sheepskin coat makes 90 kg.

Not far from the land, the boat stops and Mazai and the hares change their places: grandpa gats to the stern, and the hares get to the bow of the boat. As a result, the boat approaches the land by 1 m.

[4] Find out the average weight of a hare. Give the answer in kilos, rounded to tenths.

(*T. Andreeva*)

Answer: 3.4.

Solution. The center of mass of the system «Boat + Mazai + Hares» does not shift when Mazai and hares move around the boat. Let us find the center of mass of the system in both cases relative to the stern of the boat:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{M_\mathrm{B}\cdot\dfrac{l}{2} + M_\mathrm{M} l}{M_\mathrm{B} + M_\mathrm{M} + nm}, \\ x_2 = \dfrac{M_\mathrm{B}\cdot\dfrac{l}{2} + nml}{M_\mathrm{B} + M_\mathrm{M} + nm}. \end{cases}$$

Here m is the hare's weight, M_B is the mass of the boat, M_M is the Mazai's weight, l is the length of the boat. Then, the shift of the boat makes

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{M_\mathrm{M} l - nml}{M_\mathrm{B} + M_\mathrm{M} + nm} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M_\mathrm{M} l - \Delta x(M_\mathrm{M} + M_\mathrm{B})}{n(l + \Delta x)} = 3.4\ \text{kg}.$$

Criteria. All wrong answers from 3 to 3,8 cost 1 point, between 3,3 and 3,5 — 2 points (the jury assumes that these errors are caused by incorrect roundings).

9.5. (4 points) A thin-walled cylindrical glass filled with maple syrup to its quarter (1/4) is floating in a vessel of water, being immersed to its middle. The same glass, but filled with water to its half (1/2), is floating in a vessel with syrup, also being immersed to its middle.

[5] What part of the glass can be filled with syrup so that it does not sink in water?

[6] And what part of the glass can be filled with syrup so that it does not sink in syrup?

Give answers as decimals, rounded to thousandths. (*T. Andreeva*)

Answers: [5] 0.625. **[6]** 0.875.

Solution [5]. Balance conditions for a glass of mass m:

in the 1st case: $$mg + \frac{1}{4}\cdot\rho_\mathrm{S} gV = \frac{1}{2}\cdot\rho gV, \qquad (9.5.1)$$

in the 2nd case: $$mg + \frac{1}{2}\cdot\rho gV = \frac{1}{2}\cdot\rho_\mathrm{S} gV, \qquad (9.5.2)$$

where V is the volume of the glass, g is the free fall acceleration, ρ is the density of water, ρ_S is the density of the syrup. By subtracting the second from the first equation we get

$$\frac{3}{4}\cdot\rho_\mathrm{S} gV = \rho gV,$$

$$\rho_\mathrm{S} = \frac{4}{3}\cdot\rho, \qquad (9.5.3)$$

$$\rho_\mathrm{S} = \frac{4}{3}\cdot\rho = 1333\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Substituting (9.5.3) in (9.5.1) or (9.5.2), we get

$$m = \frac{1}{6} \cdot \rho V = \frac{1}{8} \cdot \rho_S V.$$

In order the glass of syrup doesn't sink in water there has to be

$$mg + x\rho_S gV \leqslant \rho gV,$$

$$\frac{1}{6} \cdot \rho gV + x \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho gV \leqslant \rho gV,$$

$$x \leqslant \frac{5}{8} = 0.625.$$

So no more that 5/8 of the glass volume.

Solution [6]. In order the glass of syrup doesn't sink in syrup there has to be

$$mg + x\rho_S gV \leqslant \rho_S gV,$$

$$\frac{1}{8} \cdot \rho_S gV + x\rho_S gV \leqslant \rho_S gV,$$

$$x \leqslant \frac{7}{8} = 0.875.$$

So no more that 7/8 of the glass volume.

Criteria. Both questions cost 2 points each. The answers, rounded to tenths or hundreds («0.6», «0.62» and «0.63» for the question **[5]** and «0,9», «0.87» and «0.88» for the question **[6]**), cost 1 point.

9.6. (3 points) Two satellites move in circular orbits in opposite directions around some planet with linear velocities $v_1 = 5$ km/sec and $v_2 = 8$ km/sec. The radius of the planet equals $R = 17.4$ thousand km and the acceleration of free fall on its surface makes $g = 14$ m/sec^2.

[7] Find out the time interval within which the satellites periodically approach each other at a minimum distance. Give your answer in hours, rounded to tenths.

(*M. Korobkov, T. Andreeva*)

Answer: 11.6.

Solution. The correlation between the gravitational force and the force of gravity on the surface of the planet:

$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \quad \Rightarrow \quad gR^2 = GM.$$

The equations of motion of satellites in orbits:

$$G \cdot \frac{mM}{r_1^2} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2},$$

$$G \cdot \frac{mM}{r_2^2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.$$

At the moment of closest approach (after the previous one), the two satellites together will outline the angle 2π:

$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$

where ω_1 and ω_2 are the satellites' angle velocities.

After the substitution and transformations we get

$$t = \frac{2\pi g R^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11.6 \text{ hours}.$$

Criteria. The right answer, rounded to integers («12»), costs 2 points.

9.7. **(4 points)** Ruth and Mary cooked 2 liters of cranberry juice. There was very little time left before the arrival of the guests, and the fruit drink was still warm (40°C). The girls wanted to cool it down quickly with the help of 20 plastic balls filled with ice (−20°C), but then they argued and divided the fruit drink and the balls equally between themselves. Ruth put all the balls into the fruit drink at once, and Mary poured her fruit drink into two identical jugs and put the balls into one of them, then waited, stirring the fruit drink, until the temperatures of the balls and the fruit drink got equal, and then replaced the balls to the second jug. When the temperatures equalized again, Mary poured the drink into one large jug.

[8] Whose drink turned out to be colder in the end? Put either **the letter** R if Ruth's drink is colder, or M if otherwise.

[9] By how many degrees that drink turned out to be colder? Round your answer to integers.

The mass of ice in a ball is 20 g.

Remark. The specific heat capacity of water (and the fruit drink) is 4.2 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, the specific heat capacity of ice is 2.0 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, and the specific heat of fusion of ice is 340 kJ/kg. (*T. Andreeva*)

Answers: [8] M. **[9]** 2.

Solution. The equations of thermal equilibrium for Ruth's actions:

$$\rho\cdot\frac{V}{2}\cdot c\left(t_1-t_2^{\text{Ruth}}\right)=\frac{N}{2}\cdot mc_{\text{I}}(0-t_{\text{I}})+\frac{N}{2}\cdot m\lambda+\frac{N}{2}\cdot mc\left(t_2^{\text{Ruth}}-0\right),$$

where c is specific heat capacity of water, ρ is density of water, V is water volume, m is the ball of ice weight, N is the number of balls, t_{I} is the initial ice temperature, λ is the specific heat of ice melting, t_1 is the initial fruit juice temperature, c_{I} is the specific heat capacity of ice.

Then

$$t_2^{Ruth}=\frac{\rho Vct_1-Nm(c_{\text{I}}(0-t_{\text{I}})+\lambda)}{\rho Vc+Nmc}=\frac{184}{10.08}\approx 18°\text{C}.$$

Now the equations of thermal equilibrium for Mary's actions. For the first jug:

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_1-t_2^1)=\frac{N}{2}\cdot mc_{\text{I}}(0-t_{\text{I}})+\frac{N}{2}\cdot m\lambda+\frac{N}{2}\cdot mc(t_2^1-0),$$

$$t_2^1=\frac{\rho\cdot\frac{V}{2}\cdot ct_1-Nm(c_{\text{I}}(0-t_{\text{I}})+\lambda)}{\rho\cdot\frac{V}{2}\cdot c+Nmc}=\frac{16}{5.88}=2.72°\text{C}.$$

For the second jug:

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_1-t_2^2)=\frac{N}{2}\cdot mc(t_2^2-t_2^1)\quad\Rightarrow\quad t_2^2=\frac{\rho\cdot\frac{V}{2}\cdot t_1+Nmt_2^1}{\rho\cdot\frac{V}{2}+Nm}=\frac{41.09}{1.4}=29.35°\text{C}.$$

For the third jug:

$$\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_2^2-t_2^{\text{Mary}})=\rho\cdot\frac{V}{4}\cdot c(t_2^{\text{Mary}}-t_2^1)\quad\Rightarrow\quad t_2^{\text{Mary}}=\frac{t_2^1+t_2^2}{2}\approx 16°\text{C}.$$

Therefore, in the end Mary's juice is colder by $18-16=2$°C.

Criteria. Both questions cost 2 points each. The right answer for the question **[9]**, not rounded to integers (e.g. «2.1»), costs 2 points.

9.8. **(2 points)** The initial temperature of water of 20°C in the boiler of the steam locomotive is heated up until it boils and evaporates. And then it is heated up to 300°C in the superheater. Superheated vapor goes into the steam engine the efficiency of which makes 30%.

[10] How much is the power of the steam engine, provided its water consumption is 7.2 m^3/h? Give the answer in MW, rounded to integers.

Remark. The specific heat capacity of water is 4.2 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, the specific heat of water vaporization is 2.3 MJ/kg, the average heat capacity of water vapor in the range 100–300°C is 4.2 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

(*T. Andreeva*)

Answer: 2.

Solution. According to the definition of efficiency

$$\eta = \frac{P_{\text{Out}}}{P_{\text{In}}}.$$

Calculate the spent power:

$$P_{\text{In}} = \frac{Q_{\text{In}}}{t} = \frac{\rho V c(t_{\text{F}} - t_0) + \rho V r + \rho_{\text{S}} V_{\text{S}} c_{\text{S}}(t_{\text{S}} - t_{\text{F}})}{t}.$$

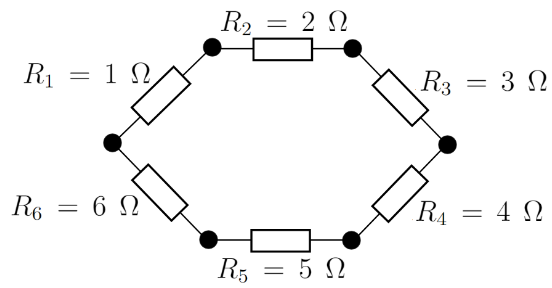
Here c is the specific heat of water, c_{S} is the specific heat of steam, V is the volume of water, ρ is the density of water, t_{F} is the boiling point, t_{S} is the temperature of the steam, V_{S} is the volume of the steam, ρ_{S} is the density of the steam.

Taking into account that $V_{\text{S}}\rho_{\text{S}} = V\rho$, calculate the useful power:

$$P_{\text{Out}} = \frac{\eta Q_{\text{In}}}{t} = \eta\rho \cdot \frac{V}{t} \cdot \big(c(t_{\text{F}} - t_0) + r + c_{\text{S}}(t_{\text{S}} - t_{\text{F}})\big) = 2 \text{ MW}.$$

Criteria. If the given answer is correct but rounded to tenths («2.1»), it costs 2 points.

9.9. **(3 points)** Six resistors $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 5\ \Omega$ and $R_6 = 6\ \Omega$ are connected in series one by one and are closed in a ring. A constant voltage source was connected to two contacts of the circuit (black dots in the picture) so that the resistance of the circuit between these contacts is at **maximum**. The source voltage is $U = 36$ V.



[11] Find out the power P_3 produced in the resistor R_3. Give the answer in watts, rounded to integers.

(*S. Starovoytov*)

Answer: 39.

Solution. Between any pair of contacts we have two parallel branches of resistors. The resistance of such a circuit makes

$$R_{\text{total}} = \frac{R_{\text{I}} R_{\text{II}}}{R_{\text{I}} + R_{\text{II}}}.$$

With any connection, the sum of the resistances of both branches is the same (21 Ω). Product is at maximum for the case $10 \cdot 11 = 110$. Therefore, the resistance of the entire circuit is maximum being connected to such a pair of contacts when resistors are in series in one branch: $1\ \Omega + 2\ \Omega + 3\ \Omega + 4\ \Omega = 10\ \Omega$, and in the other branch — resistors $5\ \Omega + 6\ \Omega = 11\ \Omega$.

The current in the first branch:

$$I_{1234} = \frac{U}{R_{1234}} = \frac{36}{10} = 3.6 \text{ A}.$$

Power dissipated in the third resistor:

$$P_3 = I_{1234}^2 R_3 = 3.6^2 \cdot 3 = 38.88 \approx 39 \text{ W}.$$

Criteria. The right answer, not rounded to integers (e.g. «38.88»), costs 2 points.

[6] Find out the time interval within which the satellites periodically approach each other at a minimum distance. Give your answer in hours, rounded to tenths.

(*M. Korobkov, T. Andreeva*)

Answer: 11.6.

Solution. The correlation between the gravitational force and the force of gravity on the surface of the planet:

$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \quad \Rightarrow \quad gR^2 = GM.$$

The equations of motion of satellites in orbits:

$$G \cdot \frac{mM}{r_1^2} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2},$$

$$G \cdot \frac{mM}{r_2^2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.$$

At the moment of closest approach (after the previous one), the two satellites together will outline the angle 2π:

$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$

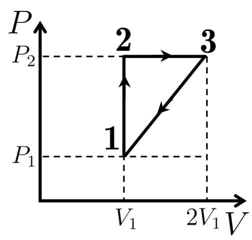
where ω_1 and ω_2 are the satellites' angle velocities.

After the substitution and transformations we get

$$t = \frac{2\pi g R^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11.6 \text{ hours}.$$

Criteria. The right answer, rounded to integers («12»), costs 2 points.

10.7. (3 points) The figure shows a cycle carried out with a monatomic ideal gas. it is known that the efficiency of the Carnot cycle carried out in the same temperature range is 64%, and with isobaric expansion the volume of the gas increases by 2 times.



[7] Find out the efficiency of the cycle. Give the answer in percentages with an accuracy of tenths. (*S. Starovoytov*)

Answer: 4.8.

Solution. From the formula for the efficiency of the Carnot cycle, we determine the temperature ratio:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_1}{T_3} = 0.36,$$

where T_1 and T_3 are the temperatures at points 1 and 3.

The useful work obtained in the cycle is equal to the area inside the cycle, that is, the area of the triangle:

$$W_{\text{cycle}} = \frac{1}{2} \cdot V_1(P_2 - P_1) = \frac{\nu R}{2}\left(\frac{T_3}{2} - T_1\right).$$

Here the equations of state at points 1 and 3 and the ratio of volumes at these points are taken into account.

Calculate the work for an isobaric process:

$$W_{23} = P_2(V_3 - V_1) = P_2 V_1 = \frac{1}{2} \cdot P_3 V_3 = \frac{1}{2} \cdot \nu R T_3.$$

Here the equation of state at point 3 and the ratios of volumes at points 1 and 3 are taken into account.

The total change in the internal energy of a monatomic gas in isochoric and isobaric processes:

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_3 - T_1).$$

Now determine the total amount of heat supplied in isochoric and isobaric processes:

$$Q_{\text{total}} = W_{23} + \Delta U_{13} = \frac{1}{2} \cdot \nu R(4T_3 - 3T_1),$$