Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) Стакан объемом 300 см^3 и массой 100 г медленно погружают в воду плотностью 1000 кг/м^3, держа его вверх дном. Атмосферное давление 100 кПа, температура постоянна и одинакова для воздуха и воды.

[1] На какой минимальной глубине стакан начнет погружаться без помощи внешней силы?

Замечание. Глубину отсчитывать до уровня воды в стакане. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2. (*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 20 м.

Решение. Сначала стакан был в атмосфере; параметры воздуха в стакане указаны на рисунке 8.

Когда стакан углубили, вода частично зашла под кромки стакана, сжав воздух в нём до объёма V_1 и давления p_1.

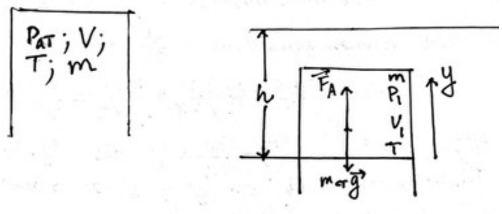

Рис. 8

На глубине h (см. рис.) стакан может начать погружаться без действия внешней силы. Условие начала такого движения: $\vec{F}_{рез} = 0$.

В проекции на вертикальную ось имеем:

$$F_A - m_{ст}g = 0 \qquad (1)$$

Так как силой тяжести воздуха в объёме V_1 можно пренебречь.

Преобразуем (1)

$$F_A = \rho g V_1; \quad \rho g V_1 = m_{ст}g; \quad V_1 = \frac{m_{ст}}{\rho};$$

По условию T = const, m = const, так как сжатый до объёма V_1 воздух не уходит из стакана.

По закону Бойля-Мариотта: pV = const. Для рассматриваемого случая:

$$p_{ат}V = p_1V_1$$

где p_1- полное давление на глубине h. Так как $p_1 = p_{ат} + \rho g h$, то

$$p_{ат}V = (p_{ат} + \rho g h) * \frac{m_{ст}}{\rho}; \quad p_{ат} + \rho g h = \frac{p_{ат} * \rho V}{m_{ст}};$$

$$\rho g h = p_{ат}(\frac{\rho V}{m_{ст}} - 1); \quad h = p_{ат}(\frac{\rho \frac{V}{m_{ст}} - 1)}{\rho g} = \frac{1{,}00 * 10^5(\frac{3{,}00*10^{-4}*10^3}{0{,}100} - 1)}{10^4} = 20 \text{ м}$$

10.2. (7 баллов) Моль гелия совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Максимальное давление в цикле в 2 раза больше минимального, а максимальный объем в 1,5 раза больше минимального.

[2] Определите в процентах коэффициент полезного действия цикла.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 12,5%.

Решение. Изобразим цикл на pV- диаграмме.

По определению, $\eta = \frac{A}{Q}$, где A - работа газа за цикл, Q - тепло, полученное газом за цикл.
Работа газа численно равна площади под графиком p(V), ограниченной соответствующими значениями p и V (см. рис. 9) . Тогда

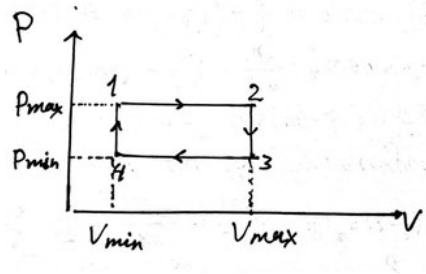

Рис. 9

$$A = (p_{max} - p_{min})(V_{max} - V_{min}) = p_{max}(V_{max} - V_{min}) - p_{min}(V_{max} - V_{min})$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева: $pV = \nu RT$. При p=const имеем $p\Delta V = \nu R\Delta T$. Тогда

$$p_{max}(V_{max} - V_{min}) = \nu R(T_2 - T_1); p_{min}(V_{max} - V_{min}) = \nu R(T_3 - T_4)$$

Т.о,

$$A = \nu R(T_2 - T_1 - T_3 + T_4) \qquad (1)$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 – температуры газа в точках 1,2 и т.д. (см. рис.9)
Газ получает тепло от нагревателя в процессах 1-2 и 4-1;
В остальных он отдаёт тепло холодильнику.
По первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$. Тогда, учитывая что газ одноатомный, получим

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$$

Так как переход 1-4 изохорный

$$Q_{41} = \Delta U_{41}; \quad Q_{41} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4)$$

Полное поступившее в цикле тепло равно

$$Q = Q_{12} + Q_{41} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4) \qquad (2)$$

Выразим T_2, T_3 и T_4 через T_1;
В процессе 1-2:

$$p = const; \quad \frac{V}{T} = const; \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = 1{,}5; \quad T_2 = 1{,}5T_1$$

В процессе 2-3:

$$V = const; \quad \frac{p}{T} = const; \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}; \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3}; \quad \frac{p_{max}}{p_{min}} = 2$$

Тогда

$$T_3 = \frac{T_2}{2} = 0{,}75T_1$$

В процессе 4-1:

$$V = const; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_4}{T_4}; \quad \frac{T_1}{T_4} = \frac{p_1}{p_4} = \frac{p_{max}}{p_{min}} = 2; \quad T_4 = 0{,}5T_1$$

Вычислим работу по формуле (1)

$$A = \nu RT_1(1{,}5 - 1 - 0{,}75 + 0{,}5) = 0{,}25\nu RT_1$$

Полное поступившее в цикле тепло по формуле (2)

$$Q = \frac{5}{2}\nu RT_1(1{,}5 - 1) + \frac{3}{2}\nu RT_1(1 - 0{,}5) = 2\nu RT_1$$

Тогда

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{0{,}25\nu RT_1}{2\nu RT_1} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

10.3. (10 баллов) Равномерно загруженные сани, движущиеся по льду со скоростью 5 м/с, выезжают на дорогу, посыпанную песком.

[3] Определить путь, пройденный санями по дороге, если длина полозьев равна 1 м, а коэффициент трения скольжения о поверхность дороги равен 0,5.

Замечание. Трением о лед пренебречь. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2. *(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)*

Ответ: 3 м.

Решение. Изобразим на рисунке 10 начальный этап перехода саней со льда (где трение отсутствует) на песок (где сила трения пропорциональна весу той части саней, которая находится на песке).

Так как сила трения пропорциональна массе груза, находящегося над дорогой, а, следовательно, пропорциональна длине полоза, то по мере въезда саней на дорогу $F_{\text{тр}} \propto S$. Обозначим через l длину полоза.

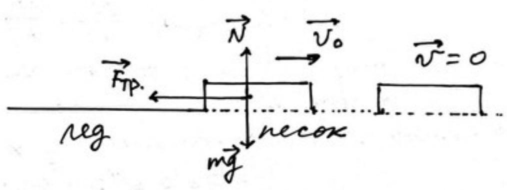

Рис. 10

Построим график $F_{\text{тр}}(S)$.

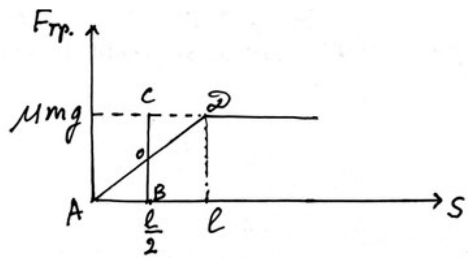

Рис. 11

Работа саней по преодолению силы трения по мере их въезда на дорогу численно равна площади под графиком $F_{\text{тр}}(S)$, ограниченной значением l (см. рис. 11), и равна $A_1 = \mu mgl/2$. Когда сани полностью находятся на дороге работа равна $A_2 = \mu mgS_1$. По теореме о связи энергии и работы работа результирующей силы равна изменению кинетической энергии. Так как конечная скорость равна нулю, то

$$\frac{mv^2}{2} = A_1 + A_2$$

Подставив выражения для работ A_1 и A_2 и преобразуя выражение, получим

$$S_1 = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{l}{2}$$

Подставим числовые значения с учетом того, что полная длина складывается из S_1 и l. Тогда

$$S = S_1 + l = 2 + 1 = 3 \text{ м}$$

10.4. (10 баллов) По горизонтальной поверхности катится без проскальзывания тонкий обруч массой 0,5 кг. Скорость движения центра обруча относительно Земли равна 2 м/с.

[4] Определить кинетическую энергию обруча в системе отсчета, связанной с Землей.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 2 Дж.

Решение.

В системе отсчета, связанной с центром обруча, все точки обруча движутся равномерно по окружности, и их скорости направлены по касательной к окружности (обручу). Так как центр обруча движется относительно Земли со скоростью $\vec{v}$ (рис. 12), то в системе координат, связанной с центром обруча, точка обруча O', касающаяся Земли, движется со скоростью - $\vec{v}$. Итак, в этой системе отсчета все точки обруча имеют одну и ту же по модулю скорость, равную $v' = v$ и направленную по касательной к окружности.

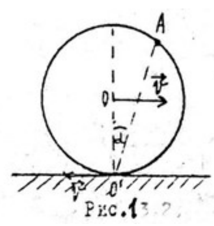

Рис. 12

В системе координат, связанной с Землей (рис. 13), скорость точки А определяется по закону сложения скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}$$

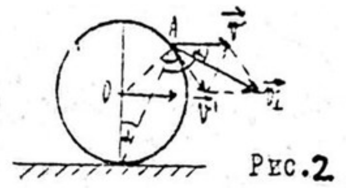

Рис. 13

где $\vec{v}_1$ – скорость точки А обруча относительно Земли; $\vec{v}'$ - скорость той же точки А в системе координат, связанной с центром обруча; $\vec{v}$ – скорость центра обруча относительно Земли, заданная по условию задачи. Таким образом $\vec{v}_1$ – направлена по диагонали ромба со сторонами равными v.

Скорость же точки O' в данной системе координат будет равна нулю $|\vec{v}_1| = 0$, т.к. по условию задачи обруч движется без проскальзывания. Из этого факта вытекает, что $v' = v$. Итак, скорость точки А обруча относительно Земли равна $|\vec{v}_1| = 2v\cos\alpha$.

Приступим теперь к вычислению кинетической энергии обруча в системе отсчета, связанной с Землей. Для этого необходимо учесть, что точки обруча обладают в данной системе координат различными по модулю скоростями. Разобьем весь обруч на N элементарных масс Δm ($\Delta m = m/N$) и вычислим кинетическую энергию пары точек обруча, расположенных на концах произвольного диаметра обруча (рис. 14).

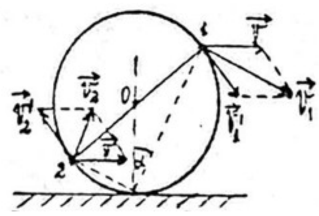

Рис. 14

Скорость малого участка обруча массы Δm у точки 1 (на рис. 13 т. А) равна $2v\cos\alpha$, а скорость такого же участка у точки 2 равна $2v\cos(90^o - \alpha) = 2v\sin\alpha$
Кинетическая энергия участков у пары точек 1 и 2 будет равна

$$E'_{\text{к}} = \frac{\Delta m(2v\cos\alpha)^2}{2} + \frac{\Delta m(2v\sin\alpha)^2}{2} = \frac{2mv^2}{N}$$

Отметим, что $E'_{\text{к}}$ не зависит от α, т.е. будет одинакова для всех аналогичных пар точек, расположенных на концах произвольного диаметра обруча. Тогда кинетическая энергия обруча будет равна сумме кинетических энергий этих пар точек. Число пар, выделенных таким образом, будет равняться $N/2$.

$$E_{\text{к}} = \sum E'_{\text{к}} = E'_{\text{к}} * \frac{N}{2} = \frac{2mv^2}{N} * \frac{N}{2} = mv^2 = 0.5 * 4 = 2 \text{ Дж}$$

10.5. (4 балла) Поток вектора индукции однородного магнитного поля проходит через боковую поверхность конуса с углом при вершине 60^o и длиной образующей 1 метр. Индукция поля 4,0 Тл. Ось конуса параллельна силовым линиям поля.

[5] Найдите величину потока вектора индукции.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 3,1 Вб.

Решение. Изобразим на рисунке 15 конус и направление векторов, используемых в решении задачи.

По определению величина магнитного потока равна

$$\Phi = BS_{\text{бок}} \cos(\vec{B}, \vec{n})$$

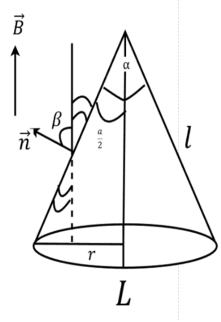

Рис. 15

Из рисунка определим угол между нормалью и вектором индукции

$$\beta = 90^o - \frac{\alpha}{2} = 60^o$$

Найдем длину окружности в основании конуса

$$L = 2\pi r = 2\pi l \sin\frac{\alpha}{2} = \pi l$$

и площадь боковой поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{2}$$

Тогда

$$\Phi = \frac{B\pi l^2}{2}\cos\beta = \frac{4{,}0 * 3.14}{2 * 2} = 3.1 \text{ (Вб)}$$