Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (5 баллов) 5,0 молей идеального газа нагревают на 10 К так, что температура газа меняется пропорционально квадрату объема газа.

[1] Какую работу газ совершает при нагревании?

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 0,21 кДж.

Решение. Согласно уравнению Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$.
Используем заданную зависимость для температуры

$$pV = \nu R\alpha V^2$$

Тогда $p = \nu R\alpha V$.
Вычислим работу газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \nu R\alpha \int_{V_1}^{V_2} VdV = \nu R\alpha \frac{V^2}{2}\bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{\nu R\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}\Delta T = \frac{5{,}0 * 8{,}31}{2} * 10 = 0{,}21(\text{кДж})$$

11.2. (7 баллов) Тонкий проводящий стержень прямоугольного сечения соскальзывает из состояния покоя по гладкой наклонной плоскости из диэлектрика в вертикальном однородном магнитном поле индукцией B = 0.2 Тл (см. рис. 1).

Длина стержня L = 30 см, плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^o$. Продольная ось стрежня при движении сохраняет горизонтальное направление.

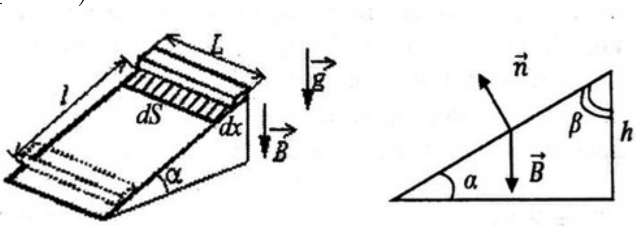

Рис. 1

[2] Рассчитайте ЭДС индукции на концах стрежня в момент, когда стержень переместится по наклонной плоскости на расстояние $l = 1.5$ м.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 0,2 В.

Решение. Изобразим геометрию задачи и направления используемых в решении векторов.
По закону электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

где поток индукции $\Phi = BS\cos(\vec{B}, n)$ и $\vec{n}$ – перпендикуляр к наклонной плоскости.
За время dt стержень сместится на dx, площадь, пересекаемая силовыми линиями магнитного поля, изменится на $dS = Ldx$ (см. рис.1).
Из рисунка видно, что $\beta = 90^o - \alpha = 90^o - 30^o = 60^o$,
тогда $\angle(\vec{B}, \vec{n}) = 90^o + \beta = 90^o + 60^o = 150^o$. Из (1) получим

$$\varepsilon_i = -B\frac{dS}{dt}\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -BL\frac{dx}{dt}\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -BLv\cos 150^o \qquad (2)$$

По закону сохранения полной механической энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Тогда $v = \sqrt{2gh}$, где $h = l\sin\alpha$. Подставим в (2)

$$\varepsilon_i = -BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos 150^o = -BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos(180^o - 30^o) = BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos 30^o =$$

$$= 0.2 * 0.3\sqrt{2 * 10 * 1.5 * 0.5} * \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.03 * 3\sqrt{5} \approx 0.09 * 2.25 \approx 0.2 \text{ В}$$

11.3. (10 баллов) Плотность ρ стержня длиной 1 м меняется по закону: $\rho = (1-x)10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, где x – удаление от конца стержня в метрах. Стержень опускают в воду с плотностью 1000 кг/м^3.

[3] Определите длину погруженной части стержня при достижении равновесного положения.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 0,5 м.

Решение. Изобразим на рисунке ось y, стержень и действующие на него силы.
Пусть S - площадь поперечного сечения стержня, l - длина стержня.
Условие равновесия стержня: $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$.
Спроецируем на ось y

$$F_A - mg = 0$$

Преобразуем

$$F_A = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} = \rho_{\text{в}} g S l_{\text{погр}} \qquad (1)$$

По определению масса стержня равна

$$m = \int \rho_{\text{ст}} S dx$$

Подставим выражение для плотности

$$m = S10^3 \int_0^l (1-x)dx = 10^3 S(l - \frac{l^2}{2})$$

Тогда из (1) следует

$$\rho_{\text{в}} g S l_{\text{погр}} = 10^3 g S(l - \frac{l^2}{2})$$

Преобразуем и подставим числовые значения

$$l_{\text{погр}} = \frac{10^3(l - \frac{l^2}{2})}{\rho_{\text{в}}} = \frac{10^3(1 - \frac{1^2}{2})}{10^3} = 0{,}5 \text{ м}$$

11.4. (10 баллов) При двух различных сопротивлениях нагрузки отношение напряжений на зажимах источника тока равно 5, а полезная мощность в обоих случаях равна 25 Вт.

[4] Вычислите ток короткого замыкания, если ЭДС источника 25 В.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 7,2 А.

Решение. Ток короткого замыкания: $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$, где r - внутреннее сопротивление источника
Найдём внутреннее сопротивление. Для этого сначала найдем соотношение между величинами сопротивлений.

Из формулы для мощности получим

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}; \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = 5^2 = 25$$

Тогда

$$R_1 = 25R_2$$

С другой стороны: $P = I^2R$;
По закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Тогда

$$P_1 = I_1^2R_1 = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = P_2 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2} \qquad (1)$$

В выражение (1) подставим численные значения:

$$25 = \frac{625R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{625R_2}{(R_2 + r)^2}$$

или

$$25R_1 = (R_1 + r)^2; 25R_2 = (R_2 + r)^2$$

Имеем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} R_1 = 25R_2 & (2) \\ 25R_1 = (R_1 + r)^2 & (3) \\ 25R_2 = (R_2 + r)^2 & (4) \end{cases}$$

Делим (3) на (4):

$$\frac{R_1}{R_2} = 25 = \frac{(R_1 + r)^2}{(R_2 + r)^2}$$

Извлекаем корень

$$\frac{R_1 + r}{R_2 + r} = 5$$

Выражаем R_1 через R_2, тогда

$$\frac{25R_2 + r}{R_2 + r} = 5$$

Раскрываем и получаем

$$25R_2 + r = 5R_2 + 5r; \quad 20R_2 = 4r; \quad r = 5R_2 = \frac{R_1}{5} \qquad (5)$$

Вычисляем мощность

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{36R_2^2} = \frac{\varepsilon^2}{36R_2}$$

Выражаем R_2

$$R_2 = \frac{\varepsilon^2}{36P_2} = \frac{625}{36 * 25} = \frac{25}{36}$$

Используя (5), получим

$$I_{\text{кз}} = \frac{25 * 36}{125} = \frac{36}{5} = 7.2 \text{ А}$$

11.5. (4 балла) Шар массой 0,5 кг падает на невесомую вертикально расположенную пружину с кэффициентом жесткости 1000 Н/м.

[5] Определите величину максимального сжатия пружины, если шар падает с высоты 0,3 м.

Замечание. Отсчет высоты ведется от верхнего края недеформированной пружины.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 6 см.

Решение. Изобразим на рисунке 16 положение пружины в начальный и конечный моменты времени и основные величины, используемые для решения задачи

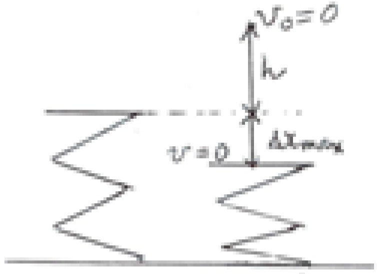

Рис. 16

Из закона сохранения энергии

$$mg(h+\Delta x_{max}) = \frac{k(\Delta x_{max})^2}{2} \qquad (1)$$

Преобразуем (1)

$$\frac{k(\Delta x_{max})^2}{2} - mg\Delta x_{max} - mgh = 0$$

подставив численные значения и, решив уравнение, получим:

$$500\Delta x_{max}^2 - 5\Delta x_{max} - 1.5 = 0$$

$$100\Delta x_{max}^2 - \Delta x_{max} - 0.3 = 0$$

$$\Delta x_{max} = \frac{1+\sqrt{1+120}}{200} = \frac{12}{200} = 0.06 \text{ м}$$

второй корень не учитываем, так как он отрицательный

$$\Delta x_{max} = 0.06 \text{ м}$$