Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 8 класса

**8.1. (7 баллов)** Первая точка движется вдоль оси Y прямоугольной системы координат со скоростью $v_1 = 4$ м/с, а вторая точка вдоль оси X. Расстояние между точками неизменно и равно 5 м.

**[1]** Определить модуль скорости второй точки в тот момент, когда первая находится на расстоянии 3 м от начала координат.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

**Ответ:** 3 м/с.

**Решение.** По условию задачи первая точка движется вдоль оси Y с постоянной скоростью. Вторая точка движется вдоль оси X с переменным ускорением, что является следствием неизменности расстояния между точками в процессе движения.

Если в момент начала отсчета времени вторая точка находится в начале координат, то, спустя время t, её координата определяется выражением

$$x(t) = [L^2 - (L - v_1 t)^2]^{1/2}$$

Таким образом, зависимость x– координаты второй точки от времени - не является линейной (движение с постоянной скоростью) или квадратичной зависимостью (движение с постоянным ускорением), т. е. вторая точка движется с переменным ускорением.

Характерным приемом, упрощающим решение задач на совместное движение, является переход к анализу движения только одного тела, но в подвижной системе отсчета. Свяжем неподвижную систему отсчета с первым телом (тем самым мы «останавливаем» первое тело).

Тогда второе тело движется со скоростью $\vec{v}_2$ относительно системы отсчета, связанной с осью X, которая, в свою очередь, движется со скоростью - $\vec{v}_1$ относительно первого тела.

Скорость второго тела $\vec{v}_{21}$ относительно системы отсчета, в которой первое тело покоится, определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Траекторией движения второго тела в подвижной системе отсчета является окружность, т. к. расстояние между телами по условию задачи неизменно. Отсюда следует, что вектор $\vec{v}_{21}$ направлен перпендикулярно радиусу окружности, т. е. отрезку L, соединяющему точки (рис. 2). Из подобия треугольников скоростей и перемещений, имеем

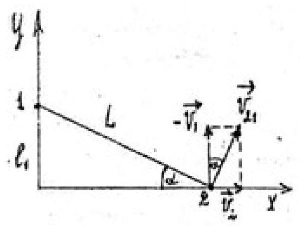

Рис. 2

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{l_1}{\sqrt{L^2 - l_1^2}}$$

отсюда вытекает выражение для скорости второй точки:

$$v_2 = \frac{v_1 l_1}{\sqrt{L^2 - l_1^2}} = \frac{4 * 3}{\sqrt{25 - 9}} = 3 \text{ м/с}$$

**8.2. (7 баллов)** У Ивана есть мерный стаканчик с делениями и градусник. Он взял стакан холодной воды ($T_0 = 10^o$ C), вылил из него 50 см$^3$ этой воды, а затем налил столько же горячей воды постоянной (но точно неизвестной) температуры из бойлера. В результате температура воды в стакане стала $T_1 = 37^o$ C. Затем он снова вылил из стакана 50 см$^3$ воды и добавил столько же из бойлера. Потом измерил температуру и получил $T_2 = 53^o$ C.

**[2]** Определите объем воды в стакане и температуру воды в бойлере.

(*Минарский А.М.*)

**Ответ:** $V = 150$ см$^3$, $T = 91^o$ $C$.

**Решение.** Пусть теплоемкость воды $c$, неизвестная масса воды в стакане $M$, количество выливавшейся и доливавшейся $m = 50$ г , неизвестная температура воды в бойлере $T$.
Запишем уравнение теплового баланса для однократного выливания и доливания:

$$c(M - m)(T_1 - T_0) = cm(T - T_1)$$

Или

$$cM(T_1 - T_0) = cm(T - T_0)$$

откуда

$$T_1 = T_0 + \frac{m}{M}(T - T_0) \qquad (1)$$

Аналогично для второго смешивания:

$$T_2 = T_1 + \frac{m}{M}(T - T_1) \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$T_2 - T_1 = T_1 - T_0 + \frac{m}{M}(T_0 - T_1) \qquad (3)$$

Преобразуя, находим

$$M = m(T_0 - T_1)/(T_0 + T_2 - 2T_1)$$

Подставляя численные значения температур $T_0$, $T_1$ и $T_2$, получаем для массы воды в стакане: $M = 3m = 150$ г,откуда объем этой воды $V = 150$ см$^3$. Из уравнения (1), получим

$$T = T_0 + \frac{M}{m}(T_1 - T_0)$$

и зная уже, что $\frac{M}{m} = 3$, получаем $T = 91^o\ C$.
Итак, объем воды в стакане $V = 150$ см$^3$,температура воды в бойлере $T = 91^o\ C$.

**8.3. (12 баллов)** Лыжные соревнования проходят на круговой трассе. При этом лыжники делятся на две группы: профессионалы и любители. Профессионалы стартуют одновременно, проходят по трассе 3 круга и имеют скорости от 24 до 27 км/час. Любители стартуют одновременно на полчаса позже, проходят 2 круга и имеют скорости от 12 до 20 км/час. Известно, что каждый профессионал во время гонки обогнал каждого любителя, но ровно один раз.

**[3]** Чему может быть равна длина одного круга трассы?

**Замечание.** По возможности укажите и минимальное, и максимальное значение длины круга.

(*Минарский А.М.*)

**Ответ:** 18<L<20 (км).
**Решение.** Пусть длина одного круга трассы равна $L$, скорость некоторого профессионала $u$, любителя $v$, а до момента их встречи прошло время $t$. Тогда, если любитель стартовал на время $T = 0{,}5$ ч позже, то он ехал время $t - T$, при этом профессионал прошел на круг больше:

$$ut = v(t - T) + L \qquad (1)$$

Однако профессионал догнал любителя во время гонки, то есть прошел меньше 3 кругов:

$$ut < 3L \qquad (2)$$

Перенося в уравнении (1) vt влево и поделив неравенство (2) на преобразованное уравнение (1) получим:

$$\frac{u}{u-v} < \frac{3L}{L-vT} \qquad \text{или} \qquad L(3v-2u) < uvT$$

Подставляя сюда T = 0,5 ч, наибольшую скорость любителя v=20 км/ч и наименьшую – профессионала u=24 км/ч , чтобы получить наименьшую верхнюю границу длины круга, получаем:

$$L < 20(\text{км}). \qquad (3)$$

Получим условие, что профессионал не смог обогнать любителя 2 раза, то есть на 2 круга. Если напротив это произошло, то

$$ut = v(t-T) + 2L \qquad (4)$$

и необходимо по условию задачи, чтобы в момент такого возможного обгона он уже прошел больше 3 кругов гонки:

$$ut > 3L \qquad (5)$$

Перенося в уравнении (4) vt влево и поделив неравенство (5) на преобразованное уравнение (4) получим:

$$\frac{u}{u-v} > \frac{3L}{2L-vT} \qquad \text{или} \qquad L(3v-u) > uvT$$

Подставляем сюда T = 0,5 ч, наименьшую скорость любителя v=12 км/ч и наибольшую для профессионала u=27 км/ч, чтобы получить наибольшую нижнюю границу длины круга, и получаем:

$$L > 18(\text{км}). \qquad (6)$$

Объединяя неравенства (3) и (6) получаем итоговый результат

$$18 < L < 20(\text{км})$$

**8.4. (10 баллов)** В вертикальный цилиндрический сосуд радиусом 10 см, частично заполненный водой, опускают шар, плотность которого в 2 раза меньше плотности воды.

**[4]** На сколько миллиметров поднимется уровень воды после опускания шара, если радиус шара равен 3,0 см?

**Замечание.** Учитывать что, объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R_{\text{ш}}^3$, площадь круга равна $\pi R_{\text{кр}}^2$.

*(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)*

**Ответ:** 1,8 мм.

**Решение.** Плотность шара по условию задачи меньше плотности воды, т.е. шар не тонет в воде, и условие равновесия шара имеет вид

$$\vec{F}_A + m\vec{g} = 0 \qquad (1)$$

или

$$\rho_{\text{в}} g V_{\text{п.ч.}} = \rho g V \qquad (2)$$

где $\vec{F}_A$ – сила Архимеда, действующая на шар; V – объем шара и $V_{\text{п.ч.}}$ – объем части шара, погруженной в воду при равновесии.

Используя условие $\rho = \frac{1}{2}\rho_{\text{в}}$, легко найти, что $V_{\text{п.ч.}} = \frac{1}{2}V$.

Дальнейший ход рассуждений носит чисто геометрический характер.

Объем воды, вытесняемой шаром, равен

$$V' = V_{\text{п.ч.}} - V_1 \qquad (3)$$

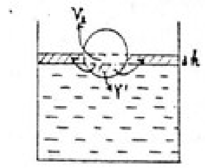

Рис. 3

где $V_1$ – объем части шара, расположенный между плоскостями, соответствующими первоначальному и конечному положению уровня воды в цилиндре, отстоящими друг от друга на искомую величину $\Delta h$ (рис. 3).
С другой стороны, этот объем равен тому объему жидкости, который находится выше уровня воды в цилиндре до опускания шара:

$$V' = S\Delta h - V_1 = \pi R^2 \Delta h - V_1 \qquad (4)$$

где R – радиус цилиндра. Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получаем

$$\pi R^2 \Delta h = \frac{1}{2} V = \frac{2}{3} \pi R^3 \qquad (5)$$

откуда

$$\Delta h = \frac{2r^3}{3R^2} = \frac{2 * 27 * 10^{-6}}{3 * 0.010} = 1{,}8 * 10^{-4} \text{ м} = 1{,}8 \text{ мм}$$

**8.5. (4 балла)** Спортсмен-тяжелоатлет поднял штангу массой 200 кг от уровня плеч (170 см над уровнем пола) до высоты 210 см над уровнем пола.
**[5]** На сколько изменилась при этом потенциальная энергия штанги?

**Замечание.** Принимаем значение ускорения свободного падения равным 10,0 м/с$^2$.

*(Г.Н.Степанова)*

**Ответ:** $\Delta E_{\text{пот}} = 800$ Дж.
**Решение.** Воспользуемся формулой для работы в поле силы тяжести и подставим числовые значения

$$\Delta E_{\text{пот}} = mg\Delta h = 200 * 10{,}0 * 0{,}400 = 0{,}800 * 10^3 = 800\text{Дж}$$