Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (7 баллов) Открытая с двух концов трубка длиной 76 см до половины погружена в ртуть. Атмосферное давление 76 см. рт. столба.

[1] Определить в сантиметрах длину столбика ртути в трубке, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути.

Замечание. Температура постоянна.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 22 см.

Решение. При вытаскивании трубки с плотно закрытым верхним отверстием часть ртути выльется из трубки, а часть останется. Это связано с тем, что при выливании ртути давление воздуха, изолированного между верхним закрытым концом трубки и поверхностью оставшейся ртути, с ростом объема уменьшается, и разность сил давления атмосферы и воздуха в трубке уравновешивает силу тяжести, действующую на оставшийся в трубке столбик ртути. Условие равновесия столбика ртути имеет вид:

$$\vec{F}_0 + m\vec{g} + \vec{F}_1 = 0 \qquad (1)$$

где $\vec{F}_0$ – сила атмосферного давления, $\vec{F}_1$ – сила давления воздуха в трубке и $m\vec{g}$ – сила тяжести, действующая на оставшуюся в трубке ртуть (рис. 4).

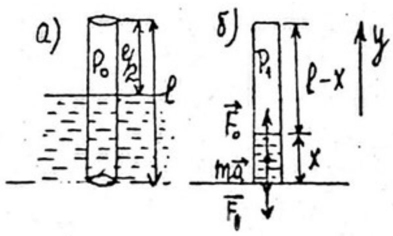

Рис. 4

Спроецируем уравнение равновесия (1) на вертикальную ось

$$p_0S - mg - p_1S = 0 \qquad (2)$$

где p_0 – атмосферное давление, p_1 – давление воздуха в трубке, S – площадь поперечного сечения трубки. При плотно закрытом верхнем отверстии масса воздуха в трубке остается постоянной, т. е. процесс расширения воздуха является изотермическим. На основании закона Бойля – Мариотта:

$$p_0\frac{l}{2}S = p_1(l-x)S$$

отсюда $p_1 = \frac{p_0 l}{2(l-x)}$ (3)

где x – длина столбика ртути, оставшегося в трубке. Массу столбика ртути в трубке выражаем через плотность ртути и её объем:

$$m = \rho_{\text{рт}}xS \qquad (4)$$

Атмосферное давление задано в условии задачи в см. рт. ст., т. е. соответствует гидростатическому давлению столба ртути высотой $l_0 = 76$ см ($l_0 = l$),

$$p_0 = \rho_{\text{рт}}gl_0 = \rho_{\text{рт}}gl \qquad (5)$$

Подставляя полученные выражения (3), (4), (5) для p_1, m, p_0 в условие равновесия (2) столбика ртути, получаем

$$l - x - \frac{l^2}{2(l-x)} = 0 \qquad (6)$$

Это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно неизвестной высоты x столбика ртути в трубке:

$$2x^2 - 4lx + l^2 = 0 \qquad (7)$$

Решая квадратное уравнение (7), получаем

$$x_1 = \frac{l(2-\sqrt{2})}{2}; x_2 = \frac{l(2+\sqrt{2})}{2} \qquad (8)$$

Второй корень уравнения (8) не имеет физического смысла, т.к. $x_2 > l$. В результате для искомой длины столбика ртути, оставшейся в трубке, имеем

$$x = \frac{l(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{0.76*(2-\sqrt{2})}{2} = 22 \text{ см}$$

9.2. (7 баллов) Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом 45^o к длинной наклонной плоскости, образующей с горизонтом 60^o.

[2] Определите величину максимального удаления тела от наклонной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 5 м.

Решение. Выберем систему отсчета следующим образом: начало O в точке броска, ось X вдоль наклонной плоскости и ось Y перпендикулярно плоскости.

При отсутствии сопротивления воздуха тело движется с ускорением свободного падения $\vec{g}$, и к моменту времени t вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ определяется выражением:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}$$

Ситуация, соответствующая условию задачи, проиллюстрирована на рисунке.

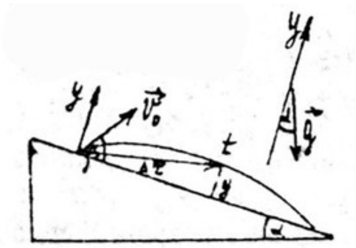

Рис. 5

Спроектировав вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ на ось y, получаем выражение для удаления тела от наклонной плоскости к моменту времени t:

$$y = v_0 \sin\beta t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2} \qquad (1)$$

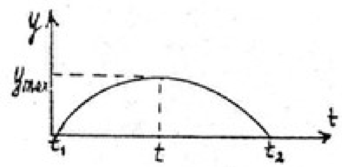

Рис. 6

Таким образом, задача сводится к определению максимального значения функции y, являющейся квадратичной функцией времени. Построим зависимость удаления y от времени t (рис. 6). Корнями функции являются значения $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$.

Максимальное значение y достигается в момент времени $t = \frac{v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$ (так как кривая является параболой). Подставляя полученное значение времени в выражение (1) для удаления тела от наклонной плоскости, получаем y_{max}:

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\beta}{2g\cos\alpha} = \frac{100*\frac{1}{2}}{20*\frac{1}{2}} = 5 \text{ м}$$

9.3. (10 баллов) Цепочка, составленная из маленьких абсолютно гладких звеньев, удерживается так, что её нижний конец касается поверхности стола. Цепочку отпускают. Масса цепочки равна 50 г, а длина – 50 см.

[3] Определить модуль силы давления цепочки на стол спустя 0,2 с.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 0,6 Н.

Решение. Предположим, что звенья цепочки очень маленькие (размер кольца много меньше длины цепочки). Поэтому цепочку можно рассматривать как непрерывную гибкую ленту.

Оценим время, спустя которое цепочка целиком окажется на столе. Звенья цепочки по условию задачи абсолютно гладкие, т.е. в процессе их движения не возникают ни силы трения, ни силы упругости. Каждое звено цепочки до падения на стол движется с ускорением свободного падения, и время движения последнего звена цепочки до стола определяется соотношением

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0{,}3 \text{ с}$$

Из данной оценки вытекает, что к интересующему нас моменту времени (t =0,2 с) не все элементы цепочки находятся на столе.
Модуль силы давления цепочки на стол по 2 закону Ньютона численно равен модулю силы нормальной реакции стола. Можно выделить две составляющие силы нормальной реакции стола:
1) Составляющая, компенсирующая давление на стол тех звеньев цепочки, которые к моменту времени t уже находятся на столе,

$$N_1 = M_1 * g = \frac{M}{l} * \frac{gt^2}{2} * g = \frac{Mg^2t^2}{2l}$$

2) Составляющая N_2, гасящая импульс того звена цепочки, которое к моменту времени t вступает в соприкосновение со столом.

$$N_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{(M/l)v * \Delta t * v}{\Delta t} = \frac{M * v^2}{l}$$

где v – скорость движущихся звеньев цепочки к моменту времени t. Учитывая, что к этому моменту скорость цепочки v=g*t, получаем

$$N_2 = \frac{Mg^2t^2}{l}$$

Обратим внимание на то, что $N_2 > N_1$.
Суммируя обе составляющие, получаем окончательное выражение для нормальной реакции стола, численно равной силе давления цепочки на стол:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{3Mg^2t^2}{2l} = \frac{3 * 0.050 * 100 * 0.04}{2 * 0.50} = 0.6 \text{ Н}$$

Отметим, что к моменту времени t = 0,2 с давление цепочки на стол больше, чем в случае, когда вся цепочка покоится на столе (Mg = 0,5 Н).

9.4. (10 баллов) К плюсу батареи с ЭДС 16,8 В и сопротивлением 2,1 Ом подключены параллельно резисторы 1,0 Ом и 4,0 Ом, к минусу батареи – 2,0 Ом и 3,0 Ом.

[4] Найти модуль разности потенциалов между точками соединения резисторов 1,0 Ом и 2,0 Ом и резисторов 4,0 Ом и 3,0 Ом.

(*А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров*)

Ответ: 2,0 В.

Решение. Изобразим электрическую схему (рис.7).
где I – полный ток текущий по схеме. Так как резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, их общее сопротивление:

$$R_{13} = R_1 + R_3 = 1 + 2 = 3 \text{ Ом}$$

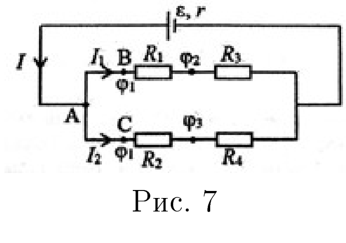

Рис. 7

Резисторы R_2 и R_4 также соединены последовательно:

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 3 + 4 = 7 \text{ Ом}$$

Каскады R_{13} и R_{24} соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}}=\frac{1}{R_{13}}+\frac{1}{R_{24}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$$

$$R_{\text{общ}}=\frac{21}{10}=2{,}1\text{ Ом}$$

По закону Ома для полной цепи,

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{\text{общ}}+r}=\frac{16.8}{2.1+2.1}=4{,}0\text{ А}$$

В точке A полный ток разветвляется. По закону сохранения заряда,

$$I=I_1+I_2$$

Так как каскады R_{13} и R_{24} соединены параллельно, то напряжение на них одинаково: $U_{13}=U_{24}$; по закону Ома для участка цепи, U=IR;

$$I_1(R_1+R_3)=I_2(R_2+R_4)$$

подставим числовые значения

$$\begin{cases}3I_1=7I_2\\ I_1+I_2=4\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$I_1=2{,}8\text{ А};\ \ I_2=1{,}2\text{ А}$$

. В точках B и C потенциалы одинаковы, т.к. эти точки замкнуты накоротко, обозначим их ϕ_1. Искомая разность потенциалов: $|\Delta\phi|=|\phi_2-\phi_3|=$

$$=|(\phi_2-\phi_1)-(\phi_3-\phi_1)|=|U_1-U_2|=|I_1R_1-I_2R_2|=|2.8*1{,}0-1.2*4{,}0|=2{,}0\text{ В}$$

9.5. (4 балла) На заряженную частицу, влетающую в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл со скоростью 10 м/с перпендикулярно силовым линиям, действует со стороны поля сила 1 мкН.

[5] Определить в микрокулонах заряд частицы.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: q = 1 (мкКл).

Решение. Запишем выражение для величины силы Лоренца

$$F_{\text{Лор}}=|q|*v*B*\sin\alpha$$

Так как $\alpha=90^o$, то

$$F_{\text{Лор}}=qvB \qquad (1)$$

Выразим из (1) величину заряда и подставим численные значения

$$q=\frac{F_{\text{Лор}}}{vB}=\frac{10^{-6}}{(10*0{,}1}=10^{-6}\text{ (Кл)}=1\text{ (мкКл)}$$