Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (7 баллов) Из большого бака насосом откачивают воду. Мощность насоса 4 кВт, а КПД установки 12,5%

[1] С какой по модулю скоростью вытекает вода плотность ρ=1000 кг/м^3 из гладкого шланга сечением 10 см^2, наконечник которого находится на одном уровне с поверхностью воды в баке?

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 10.

Решение. 1. По определению полезной мощности и того факта, что работа идет на приобретение некоторой массой воды кинетической энергии (изменения потенциальной энергии нет, так как бак большой и наконечник находится на одном уровне с поверхностью воды в баке), получаем

$$P_{\text{полезн}} = \frac{A}{t} = \frac{mv^2}{2t} \qquad (1)$$

2. Из определения КПД имеем

$$\nu = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}}; P_{\text{полезн}} = \nu P_{\text{полн}} \qquad (2)$$

3. Объединяя (1) и (2) получаем

$$\nu P_{\text{полн}} = \frac{mv^2}{2t} = \frac{\rho S l v^2}{2t}$$

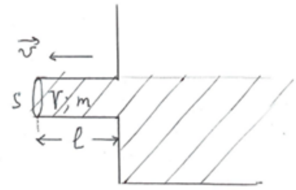

Рис. 3

Здесь ρ - плотность воды, S - площадь сечения трубы, l – длина участка трубы, вода из которой выльется за время t (см. рисунок 3)

4. Так как отношение l и t равно скорости, то

$$\nu P_{\text{полн}} = \frac{\rho S v^3}{2}$$

5. Преобразуем (3), подставляем числовые значения и получаем

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\nu P_{\text{полн}}}{\rho S}} = \sqrt[3]{\frac{2 * 12{,}5 * 10^{-2} * 4 * 10^3}{10^3 * 10^{-2}}} = 10 \ (\frac{\text{м}}{\text{с}})$$

9.2. (7 баллов) Тело массой 2 кг движется по горизонтальной поверхности под действием силы, равной по модулю 20 Н и направленной под углом 30° к горизонту.

[2] Определить модуль силы взаимодействия тела с поверхностью, если коэффициент трения скольжения равен 1.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 14,1.

Решение. 1. Изобразим действующие на тело силы на рисунке 4

2. Полная сила, действующая на тело со стороны поверхности, это комбинация реакции опоры N и $F_{\text{тр}}$, поэтому

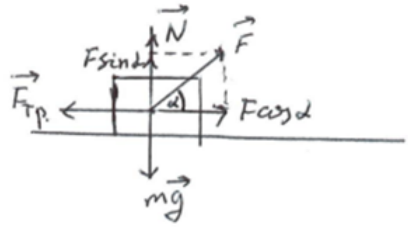

Рис. 4

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}^2} = \sqrt{N^2 + \mu^2 N^2} = N\sqrt{1+\mu^2} = N\sqrt{2} \qquad (1)$$

3. Запишем уравнение для компонент сил относительно вертикальной оси

$$F \sin\alpha + N = mg \qquad (2)$$

4. Преобразуем (2) и подставим числовые значения

$$N = mg - F\sin\alpha = 20 - 20 * \frac{1}{2} = 10 \text{ (Н)} \qquad (3)$$

5. Комбинируя (1) и (3), получим

$$F_{\text{вз}} = 1{,}41 * 10 = 14{,}1 \text{ (Н)}$$

9.3. **(6 баллов)** Дан мяч массой 0.2 кг и объёмом 7 литров.

[3] Найти минимальную работу, необходимую для погружения мяча в воду плотностью 1 г/см^3 с глубины 1 м до глубины 21 м. Силу сопротивления воды не учитывать.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 1360.

Решение. 1. Изобразим силы, действующие на тело на рисунке 5

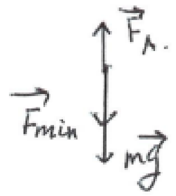

Рис. 5

2. Минимальная работа будет при бесконечно медленном процессе, когда скорость перемещения тела бесконечно мала и результирующая всех сил равна нулю

$$\vec{v} = const; F_{\text{рез}} = 0$$

3. Тогда

$$F_{min} + mg = F_A$$

и

$$F_{min} = F_A - mg = \rho g V - mg = g(\rho V - m)$$

4. По определению работы постоянной силы

$$A_{min} = F_{min}(h_2 - h_1) = g(\rho V - m)(h_2 - h_1) \qquad (1)$$

5. Подставляем в (1) числовые значения и получаем

$$A_{min} = 10(10^3 * 7 * 10^{-3} - 0{,}2)20 = 6{,}8 * 200 = 68 * 20 = 1360 \text{ (Дж)}$$

9.4. **(5 баллов)** Тонкий однородный стержень массой 60 грамм, сделанный из дерева, подвешен на нити за один из концов, а другим концом наполовину погружен в воду.

[4] Найти величину силы Архимеда, приложенную к стержню.

(*Д.Л. Федоров, В.А. Живулин*)

Ответ: 0,4.

Решение. 1. Изобразим все силы действующие на стержень на рисунке 6

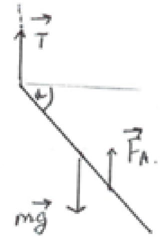

Рис. 6

2. Запишем уравнение равновесия (равенства моментов сил отноительно точки крепления к нити)

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = F_A\frac{3}{4}l\cos\alpha \qquad (1)$$

3. Преобразуем (1)

$$mg = \frac{3}{2}F_A; F_A = \frac{2}{3}mg$$

4. Подставляем числовые значения

$$F_A = \frac{2}{3} * 0{,}06 * 10 = 0{,}4 \text{ (Н)}$$

9.5. (6 баллов) При изготовлении бетонной смеси в бункер засыпали некоторую массу песка и вдвое большую массу цемента. Удельная теплоемкость песка равна 960 Дж/(кг·К), а цемента — 810 Дж/(кг·К).

[5] Определить удельную теплоемкость смеси после перемешивания.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 860.

Решение. 1. По определению удельная теплоемкость смеси равна отношению количеству теплоты, переданной смеси, к произведению массы смеси на изменение ее температуры

$$c_{\text{см}} = \frac{Q_{\text{см}}}{m_{\text{см}}\Delta T}$$

2. Учитывая, что полное количество теплоты распределяется между песком и цементом, а сумма их масс равна массе смеси, получаем

$$c_{\text{см}} = \frac{Q_{\text{см}}}{m_{\text{см}}\Delta T} = \frac{Q_{\text{ц}} + Q_{\text{п}}}{(m_{\text{ц}} + m_{\text{п}})\Delta T} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}}\Delta T + c_{\text{п}}m_{\text{п}}\Delta T}{(m_{\text{ц}} + m_{\text{п}})\Delta T} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}} \qquad (1)$$

3. Учтем соотношение масс компонентов и преобразуем (1)

$$c_{\text{см}} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}} = \frac{c_{\text{ц}} * 2m_{\text{п}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{2m_{\text{п}} + m_{\text{п}}} \qquad (2)$$

4. Подставляем в (2) числовые значения, сокращаем и получаем

$$c_{\text{см}} = \frac{c_{\text{ц}} * 2 + c_{\text{п}}}{2 + 1} = \frac{1620 + 960}{3} = 540 + 320 = 860 \ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} * \text{К}}\right)$$

9.6. (6 баллов) В открытом сосуде объемом 0,45 м^3 находится 120 г газа. Температуру газа увеличивают от 300 К до 450 К при постоянном давлении 166 кПа.

[6] Сколько молей газа выйдет из сосуда?

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 10.

Решение. 1. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для газа внутри сосуда при начальной температуре

$$pV = \frac{m_1}{M}RT_1 \qquad (1)$$

2. Обозначим через Δv количество молей газа, которые выйдут из сосуда

3. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для газа внутри сосуда при новой температуре

$$pV = \left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right) RT_2 \qquad (2)$$

4. Объединяя (1) и (2), получим

$$\frac{m_1}{M} RT_1 = \left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right) RT_2 \qquad (3)$$

5. Подставляем в (3) числовые значения, преобразуем и получаем

$$300\frac{m_1}{M} = 450\left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right); \frac{m_1}{M} = 1{,}5\left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right); \frac{m_1}{M} = 1{,}5\frac{m_1}{M} - 1{,}5\Delta v; 1{,}5\Delta v = 0{,}5\frac{m_1}{M}$$

6. Тогда, используя (1), имеем

$$\Delta v = \frac{1}{3}\frac{m_1}{M} = \frac{1}{3}\frac{pV}{RT_1} = \frac{1}{3}\frac{166 * 10^3 * 0{,}45}{8{,}3 * 300} = \frac{9 * 10^3}{9 * 10^2} = 10 \text{ (молей)}$$

9.7. (7 баллов) Два одинаковых конденсатора без диэлектрика, соединенных параллельно, зарядили до напряжения 40 В и отключили от цепи.

[7] Определить разность потенциалов на воздушном конденсаторе, если пространство между обкладками другого конденсатора заполнили веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 10.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 7 начальную и конечную ситуацию с распределением напряжений на конденсаторах

2. Так как конденсаторы после зарядки отключили от цепи, то

$$q_{\text{полн}} = const$$

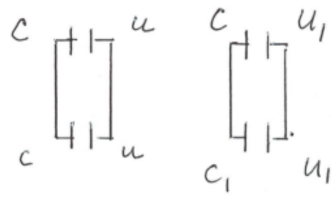

Рис. 7

3. По определению емкости

$$C = \frac{q}{U}$$

4. Для первого случая заряды на обоих конденсаторах одинаковые, поэтому

$$q_{\text{полн}} = 2CU$$

5. Для второго случая заряды на конденсаторах разные, но напряжения равны, поэтому

$$q_{\text{полн}} = (C + C_1)U_1$$

6. Поэтому

$$2CU = (C + C_1)U_1 \qquad (1)$$

7. По формуле емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{возд}} S}{d}; C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}; \varepsilon_{\text{возд}} = 1; C_1 = \varepsilon C \qquad (2)$$

8. Из (1) и (2) получим

$$2CU = C(\varepsilon + 1)U_1 \qquad (3)$$

9. Преобразуя (3) и подставляя числовые значения, имеем

$$U_1 = \frac{2U}{\varepsilon + 1} = \frac{80}{8} = 10 \text{ (В)}$$

9.8. **(6 баллов)** Моток медной проволоки имеет массу 1,78 кг и сопротивление 3,4 Ом. Удельное сопротивление меди равно $1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м, а плотность меди – $8{,}9\cdot10^{3}$ кг/м^3.

[8] Определить в мм^2 поперечное сечение проволоки.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 1.

Решение. 1. По определению удельного сопротивления

$$R = \frac{\rho_{\text{уд}} * l}{S} \qquad (1)$$

2. По определению плотности

$$\rho_{\text{пл}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl} \qquad (2)$$

3. Перемножим (1) и (2), тогда

$$R * \rho_{\text{пл}} = \frac{\rho_{\text{уд}} * l}{S} * \frac{m}{Sl} = \frac{\rho_{\text{уд}} m}{S^2 l}$$

4. Преобразуем (3) и подставим числовые значения

$$S^2 = \frac{\rho_{\text{уд}} m}{R * \rho_{\text{пл}}} = \frac{1{,}7 * 10^{-8} * 1{,}78}{3{,}4 * 8{,}9 * 10^3} = \frac{1{,}78 * 10^{-8}}{17{,}8 * 10^3} = 10^{-12}$$

5. Найдем площадь сечения

$$S = \sqrt{10^{-12}} = 10^{-6}\ (\text{м}^2) = 1\ (\text{мм}^2)$$

9.9. **(7 баллов)** Небольшой шарик удерживается в неподвижном состоянии над очень длинной и ровной наклонной плоскостью, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Начальное расстояние от шарика до наклонной поверхности равно h = 1 м. шарик отпускают без начальной скорости.

[9] Найти расстояние между первым и 2022 ударом шарика о наклонную поверхность. Влиянием воздуха пренебречь, все удары считать абсолютно упругими. Ответ дать с точностью до 1 см.

(*А.С. Чирцов*)

Ответ: 8172924.

Решение. 1. Из закона сохранения механической энергии определим скорость v_0, с которой шарик впервые ударяется о поверхность

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

Тогда $v_0 = \sqrt{2gh}$

2. Введем систему координат xOy для описания движения шарика после первого отскока от поверхности. Точка O - место первого столкновения, ось x - вдоль наклонной плоскости, ось y - перпендикулярна плоскости и направлена вверх.

3. Обозначим через v_{nx} и v_{ny} компоненты скорости шарика вдоль осей в момент n-ого отскока, где n принимает значения от 1 до 2021, так как движение после 2022 отскока нас не интересует.

4. После первого отскока

$$v_{1x} = v_0 \sin\alpha$$

$$v_{1y} = v_0 \cos\alpha$$

5. Соответственно в выбранной системе координат ускорения вдоль осей

$$g_x = g \sin\alpha$$

$$g_y = g\cos\alpha$$

ускорение g_y направлено противоположно направлению оси y.
6. Запишем выражения для компонент скорости после n-ого отскока

$$v_y(t) = v_{ny} - g_y t \qquad (1)$$

$$v_x(t) = v_{nx} + g_x t \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что компонента скорости вдоль оси x после каждого отскока будет расти.
7. Запишем уравнения для координат шарика после n-ого отскока (здесь время отсчитывается от момента n-ого отскока)

$$y(t) = v_{ny}t - \frac{g_y t^2}{2} \qquad (3)$$

$$x(t) = L_n + v_{nx}t + \frac{g_x t^2}{2} \qquad (4)$$

Здесь L_n - расстояние вдоль оси x от начальной точки до точки n-ого отскока.
8. Определим время движения $t_{nп}$ между n-м и (n+1)-м отскоками. Для этого приравняем $y(t_{nп})$ к нулю. Тогда

$$v_{ny}t_{nп} - \frac{g_y t_{nп}^2}{2} = 0$$

Следовательно

$$t_{nп} = \frac{2v_{ny}}{g_y} \qquad (5)$$

9. Подставим (5) в (1) и получим y-ую компоненту скорости перед следующим соударением

$$v_{nп} = v_{ny} - g_y\frac{2v_{ny}}{g_y} = -v_{ny}$$

то есть по абсолютной величине $v_{nп}$ и v_{ny} равны. Поэтому все v_{ny} одинаковые и равны v_{1y}. Следовательно все времена между последовательными соударениями также равны

$$t_{nп} = \frac{2v_{1y}}{g_y} = \frac{2v_0}{g} \qquad (6)$$

10. Найдем величину перемещения вдоль оси x между двумя последовательными соударениями. Для этого поставим (6) в (4)

$$\Delta x_n = x(t_{nп}) - x(0) = v_{nx}t_{nп} + \frac{g_x t_{nп}^2}{2} = (v_{1x} + g_x(n-1)t_{nп})t_{nп} + \frac{g_x t_{nп}^2}{2} =$$

$$= (v_0\sin\alpha + g\sin\alpha(n-1)\frac{2v_0}{g})\frac{2v_0}{g} + \frac{g\sin\alpha}{2}\frac{4v_0^2}{g^2} = 4\frac{v_0^2}{g}n\sin\alpha \qquad (7)$$

11. Чтобы определить расстояние между 1-м и 2022-м соударениями необходимо сложить все Δx_n от первого до 2021-го.

$$L_{2021} = \sum_{n=1}^{2021}\Delta x_n = 4\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\sum_{n=1}^{2021} n \qquad (8)$$

12. Сумму можно найти как сумму арифметической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{2021} n = \frac{2022 * 2021}{2}$$

13. Используя выражение для v_0, получим

$$L_{2021} = 4\frac{2gh}{g}\sin\alpha * 2021 * 1011 = 8h\sin 30^\circ * 2021 * 1011 = 8172924 \text{ (м)}$$