



Решения задач для 10 класса

10.1. (8 баллов) Известно, что при взаимодействии 1 моля газа А и 3 молей газа В при температуре $T=298,15$ К образуется 2 моля вещества С, при этом изменение энтальпии при постоянном давлении в 1 атмосферу равно - 40,32 кДж/моль.

[1] Какая энергия выделится если 1 моль газа А вступит в реакцию с газом В при постоянном объеме и температуре Т?

Замечание. Энтальпия по определению равна сумме внутренней энергии и произведения давления на объем $H=U+pV$. Универсальная газовая постоянная равна 8,31441 Дж/К*моль.

(И. Пригожин, А.Б. Яковлев)

Ответ: -35.36 кДж.

Решение. 1) Запишем первое начало термодинамики:

$$\Delta U = A + Q$$

Так как по условию объем постоянный, то работа не совершается:

$$\Delta U = Q$$

2) Запишем выражение для изменения энтальпии:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta pV$$

Выразим внутреннюю энергию:

$$\Delta U = Q = \Delta H - \Delta pV$$

3) Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует

$$\Delta pV = \Delta \mu RT = \Delta \mu RT$$

где из условия задачи следует, что

$$\Delta \mu = 2 - 1 + 3 = -2$$

4) Таким образом, окончательное выражение для выделившейся энергии:

$$Q = \Delta H - \Delta \mu RT = -35.36 \text{ кДж}$$

10.2. (5 баллов) Плоский конденсатор состоит из трех пластин алюминиевой фольги, разделенных двумя слоями кварца толщиной $d = 0.20$ мм. Крайние пластины соединены между собой.

[2] Какова емкость данного конденсатора? Ответ дать в микрофарадах.

Замечание. Площади пластин $s = 10 \text{ см}^2$, диэлектрическая проницаемость кварца $\varepsilon = 4.3$.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,00038 мкФ.

Решение. 1) Сообщим внешним пластинам заряд q . Тогда на средней пластине индуцируется заряд q соответствующего знака с каждой стороны. Таким образом, конденсатор можно рассматривать как два одинаковых конденсатора, соединенных параллельно. Вычислим емкость этих конденсаторов:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

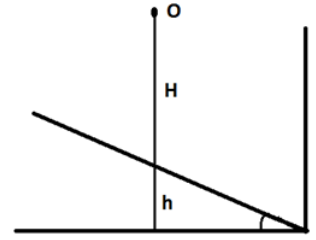
Тогда общая емкость двух конденсаторов, соединенных последовательно:

$$C_0 = 2C = 2 \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} = 0,00038 \text{ мкФ}$$

10.3. (9 баллов) Мячик радиусом 5 мм начинает падать из точки О без начальной скорости в области, ограниченной двумя абсолютно упругими плоскостями (см. рисунок).

[3] При каком отношении H/h мяч сможет вернуться в начальную точку?

Замечание. Расстояние точки О от вертикальной стенки l больше радиуса мяча. Ускорение свободного падения принять равным $10,0 \text{ м/с}^2$. Угол наклона плоскости равен α . (А.Б. Яковлев)



Ответ: $\frac{H}{h} = \frac{\text{ctg}(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$, $\alpha \in 0^\circ, 45^\circ$.

Решение. 1) Из закона сохранения полной механической энергии найдем скорость шарика перед ударом о наклонную плоскость:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH$$

откуда

$$v_0^2 = 2gH$$

2) Пусть после первого удара о плоскость мячик отскочит под углом β к горизонту. Запишем уравнение движения мячика вдоль горизонтального направления:

$$x(t) = v_0 \cos(\beta)t$$

Пусть угол наклонной плоскости равен α . Тогда горизонтальное расстояние, которое должен пройти мячик до соударения со второй стеной:

$$l = h \text{ctg}(\alpha)$$

Найдем также связь углов α и β . При упругом ударе о преграду модуль скорости не меняется, меняется только ее направление. Из геометрических соображений находим, что мячик отразится от преграды под углом

$$\beta = 90 - 2\alpha$$

Найдем момент времени, когда мячик ударится о вторую стенку:

$$l = x(t_0)$$

$$l = v_0 \cos(\beta)t_0$$

откуда

$$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos(\beta)}$$

3) Мяч сможет вернуться в начальную точку, если удар о вертикальную стену произойдет перпендикулярно ее поверхности. Это значит, что его скорость будет направлена горизонтально в момент времени t_0 . Таким образом, вертикальная составляющая скорости будет равняться нулю:

$$0 = v_y(t_0) = v_0 \sin(\beta) - gt_0$$

откуда

$$t_0 = \frac{v_0 \sin(\beta)}{g}$$

4) Приравняем два выражения для t_0

$$\frac{v_0 \sin(\beta)}{g} = \frac{l}{v_0 \cos(\beta)}$$

откуда

$$v_0^2 \sin(\beta) \cos(\beta) = lg$$

Подставим выражения для скорости и горизонтального расстояния:

$$2gH \sin(\beta) \cos(\beta) = h \operatorname{ctg}(\alpha)g$$

Выразим отношение высот:

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(2\beta)} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(2 * (90^\circ - 2\alpha))} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$$

5) Стоит заметить, что найденное решение справедливо, когда при отскоке от первой плоскости вертикальная составляющая скорости шарика положительна, то есть

$$\sin \beta > 0$$

В противном же случае, когда

$$\sin \beta \leq 0$$

мячик отскочит вниз и не сможет удариться перпендикулярно о вертикальную плоскость. Это так же видно из формулы для времени t_0 , которое становится отрицательным при $\sin \beta < 0$. Таким образом, имеем:

$$\sin \beta > 0$$

$$\sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos(2\alpha) > 0$$

Значит

$$2\alpha \in (-90^\circ; 90^\circ)$$

, откуда с учетом того, что угол должен быть положительным, получаем окончательное ограничение на угол α :

$$\alpha \in (0^\circ; 45^\circ)$$

10.4. (8 баллов) Петя решил повторить кругосветный полет Федора Конюхова на воздушном шаре объемом $V = 1000,0 \text{ м}^3$ и массой $m = 1000,0 \text{ кг}$. Необходимая температура газа для полета шара равна $T = 330,0^\circ \text{ К}$. На расстоянии $5,000 \text{ км}$ от берега над Атлантическим океаном Петя обнаружил, что температура внутри шара понизилась до $T_1 = 290,0^\circ \text{ К}$ и топлива в горелках достаточно только для поддержания этой температуры.

[4] Сколько потребуется сбросить балласта, чтобы шар смог долететь до берега, если шар находится на высоте $h = 300,0 \text{ м}$ и движется со скоростью $v = 15,00 \text{ км/ч}$.

Замечание. Предполагать, что масса воздуха внутри шара не меняется, а его плотность равна $1,275 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения считать равным 9.80000 м/с^2 , а плотность окружа-

ющего воздуха независимой от высоты.

(А.Б. Яковлев)

Ответ: 154,6 кг.

Решение. 1) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в шаре при температурах T и T_1

$$\begin{cases} pV = \mu RT \\ p_1 V_1 = \mu RT_1 \end{cases}$$

откуда получим объем шара, когда температура газа понизилась до T_1 , учтя, что в обоих случаях давление равно внешнему атмосферному давлению :

$$V_1 = V \frac{T_1}{T}$$

2) Запишем второй Закон Ньютона для шара, когда температура газа равнялась T . По условию, это есть необходимая температура для полета шара, а значит сила Архимеда уравновешивается силой тяжести шара с газом. Пусть суммарная масса шара и газа в нем равна M , тогда:

$$F_{arh} = Mg$$

Пусть плотность воздуха есть ρ , тогда

$$\rho g V = Mg$$

откуда

$$M = \rho V$$

.

3) Когда температура газа понизилась, объем шара уменьшился, а следовательно, выталкивающая сила так же уменьшилась, поэтому шар приобретает ускорение, направленное вертикально вниз. Пусть при этом с шара сбросили балласт Δm достаточный для приобретения шаром ускорения, с которым он сможет добраться до берега. При этом теперь масса шара и газа в нем $M_1 = M - \Delta m$. Таким образом, запишем второй закон Ньютона:

$$M_1 g - F_{arh1} = M_1 a$$

откуда

$$M_1 g - \rho g V_1 = M_1 a$$

, значит

$$a = g \left(1 - \frac{\rho V_1}{M_1} \right) = g \left(1 - \frac{\rho V_1}{M - \Delta m} \right) = g \left(1 - \frac{\rho V_1}{\rho V - \Delta m} \right)$$

4) Шару необходимо пролететь расстояние $l = 5,000$ км в горизонтальном направлении со скоростью v . Тогда время, за которое шар пролетит это расстояние:

$$T = \frac{l}{v}$$

За это же время, шар должен пройти расстояние h по вертикали с ускорением a . Таким образом

$$h = y(T) = \frac{aT^2}{2} = \frac{al^2}{2v^2}$$

таким образом:

$$a = \frac{2v^2 h}{l^2} = g \left(1 - \frac{\rho V_1}{\rho V - \Delta m} \right)$$

Откуда после несложных преобразований получаем

$$\Delta m = \rho V \left(1 - \frac{T_1}{T(1 - \frac{2hv^2}{l^2 g})} \right) = 154,6 \text{ кг}$$

10.5. (5 баллов) В вершинах правильного шестиугольника с длиной стороны в 10,0 см находится по заряду $q=0,000100$ Кл.

[5] Какой заряд нужно поместить в центр шестиугольника, чтобы система находилась в равновесии?

[6] Будет ли оно устойчивым?

(А.Б. Яковлев)

Ответ: 0,000183Кл.

Ответ: Неустойчивое.

Решение. 1) В силу центральной симметрии системы зарядов достаточно рассмотреть равновесие лишь одного из зарядов в вершинах шестиугольника. Для этого пронумеруем остальные заряды. Пусть два ближайших заряда в вершинах будут с номерами 1 и 2, заряд в противоположной вершине с номером 5, и два оставшихся с номерами 3 и 4, а заряд Q по центру с номером 6. Все так же из симметрии системы следует, что результирующая сила F_{12} со стороны зарядов 1 и 2 будет направлена вдоль диагонали, на которой расположен рассматриваемый заряд, точно так же как и результирующая сила F_{34} со стороны зарядов 3 и 4. Силы со стороны зарядов 5 и 6 так же направлены вдоль этой диагонали, так как все три заряда на ней расположены.

2) Вычислим расстояния между рассматриваемым зарядом и остальными. Очевидно, расстояния до зарядов 1,2, 6 равны стороне a шестиугольника, а до заряда 5 - $2a$. Расстояния же до зарядов 3 и 4 равны малой диагонали шестиугольника, которая равна $a\sqrt{3}$.

3) Начнем вычислять силы по закону Кулона. Сила со стороны зарядов 1 и 2:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| = \frac{kq^2}{a^2}$$

Сила со стороны зарядов 3 и 4:

$$|\vec{F}_{34}| = |\vec{F}_3 + \vec{F}_4| = 2|\vec{F}_3| \cos(30^\circ) = 2 \frac{kq^2}{(a\sqrt{3})^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{kq^2}{\sqrt{3}a^2}$$

Силы со стороны зарядов 5 и 6 :

$$|\vec{F}_5| = \frac{kq^2}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{4a^2}, \quad |\vec{F}_6| = \frac{kqQ}{a^2}$$

4) Ясно, что силы $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{34}, \vec{F}_5$ направлены в одну сторону, так как являются отталкивающими. Таким образом, запишем условие равновесия рассматриваемого заряда в проекции на диагональ шестиугольника:

$$F_{12} + F_{34} + F_5 + F_6 = 0$$

Подставим выражения для сил:

$$\frac{kq^2}{a^2} + \frac{kq^2}{\sqrt{3}a^2} + \frac{kq^2}{4a^2} + \frac{kqQ}{a^2} = 0$$

Откуда получаем:

$$Q = -\frac{15 + 4\sqrt{3}}{12}q = -0,000183 \text{ Кл}$$