



Решения задач для 11 класса

11.1. (9 баллов) Тренер поставил перед Иваном задачу так подбивать ракеткой шарик для настольного тенниса, чтобы он все время подскакивал на одинаковую высоту в 20 см.

[1] Найдите амплитуду и частоту движения ракетки, учитывая, что шарик теряет между столкновениями в результате трения о воздух 10% своей скорости.

Замечание. Массы шарика и ракетки равны 2,7 и 200 грамм соответственно, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , а соударения считать абсолютно упругими. Также для простоты считать, что сила трения все время движения шарика постоянна.

(А.Б. Яковлев, А.А. Черенков)

Ответ: 16 ; 0.0067.

Решение. 1) Пусть при отскоке от ракетки шарик имеет скорость v_0 , которой достаточно, чтобы шарик подлетел на требуемую высоту $h=20\text{см}$. По условию, между соударениями шарик теряет 10% своей скорости. Таким образом, скорость шарика перед повторным соударением:

$$v_1 = \alpha v_0$$

где $\alpha = 0,9$

2) Рассмотрим движение шарика между двумя последовательными соударениями с ракеткой. По теореме об изменении кинетической энергии потеря энергии шарика связана с работой силы трения F :

$$2Fh = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}(1 - \alpha^2)$$

Откуда находим

$$F = \frac{mv_0^2}{4h}(1 - \alpha^2)$$

3) Рассмотрим движение шарика вниз из верхней точки его траектории. По закону сохранения энергии потенциальная энергия переходит в кинетическую и частично растрачивается на работу силы трения:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + Fh$$

Подставим выражение для силы трения

$$mgh = \frac{mv_0^2\alpha^2}{2} + \frac{mv_0^2}{4}(1 - \alpha^2)$$

Откуда

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{1 + \alpha^2}}$$

Тогда выражение для силы трения приобретает вид:

$$F = mg\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

4) Найдем теперь скорость ракетки перед соударением с шариком. Так как масса ракетки много больше массы шарика, можно рассматривать их удар, как удар об абсолютно тяжелую преграду. По условию соударение абсолютно упругое, а значит, в системе отсчета, жестко связанной с

ракеткой, скорости шарика до и после соударения равны:

$$v'_1 = v'_0$$

Тогда в лабораторной системе отсчета имеем:

$$v_1 + V = v_0 - V$$

где V - скорость ракетки

Таким образом

$$V = \frac{v_0 - v_1}{2} = v_0 \frac{1 - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{gh}{1 + \alpha^2}} (1 - \alpha)$$

5) Период движения ракетки есть полное время движения шарика между соударениями. Вычислим это время. Для этого рассмотрим движение шарика от ракетки до верхней точки траектории. По второму закону Ньютона:

$$mg + F = ma_1$$

откуда

$$a_1 = g + F/m = g \left(1 + \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) = g \frac{2}{1 + \alpha^2}$$

Время движения найдем из условия, что в верхней точке траектории скорость шарика равна нулю:

$$0 = v_0 - a_1 t_1$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \sqrt{\frac{h}{g} (1 + \alpha^2)}$$

Аналогично рассмотрим движение шарика из верхней точки траектории до ракетки. По второму закону Ньютона:

$$mg - F = ma_2$$

откуда

$$a_2 = g - F/m = g \left(1 - \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) = g \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Время движения найдем из условия, что в нижней точке траектории скорость шарика равна v_1 :

$$v_1 = a_2 t_2$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{h}{g} (1 - \alpha^2)}$$

Таким образом, полное время движения шарика

$$T = t_1 + t_2 = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \sqrt{\frac{h}{g}(1 + \alpha^2)}$$

5) Зная период движения ракетки можно вычислить частоту, с которой она двигается:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\alpha}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{g}{h(1 + \alpha^2)}} = 15,6 \text{ рад/с}$$

Амплитуду найдем из выражения для максимальной скорости:

$$V = A\omega$$

откуда

$$A = \frac{V}{\omega} = \frac{(1 - \alpha)(\alpha + 1)}{2\pi\alpha} h = 0,0067 \text{ м}$$

Так как минимальное количество значащих цифр в условии равно 2, округляем.

11.2. (11 баллов) Для предотвращения наводнения на берегу реки на высоте 1 метра положены бетонные блоки в виде правильных треугольных призм высотой 4 метра. Сторона основания блоков равна 1,5 м. Определите при какой высоте воды один такой блок

[2] может быть опрокинут,

[3] может быть сдвинут, если коэффициент трения бетона о землю равен 0,30.

Замечание. Плотность бетона и воды считать равными $2,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и $1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, соответственно. (А.Б. Яковлев)

Ответ: Вода не сможет опрокинуть блок.

Ответ: 2,3 м.

Решение. 1) Введем прямоугольную систему координат как на картинке, с началом координат в вершине основания призмы. Блок будет опрокинут, если момент, создаваемый силой давления воды, будет больше момента силы тяжести относительно Oz .

Пусть уровень воды составляет h метров над берегом. Вычислим проекции силы давления воды на грань блока. Так как вдоль направления z распределение давления не меняется, достаточно решить плоскую задачу о давлении слоя жидкости высоты h на ребро сечения и умножить полученный результат на высоту призмы l . Таким образом, элементарная сила df , действующая на элемент ребра da :

$$df = \rho g(h - y) da$$

где ρ - плотность воды. Из геометрических соображений ясно, что

$$\sin \alpha da = dy$$

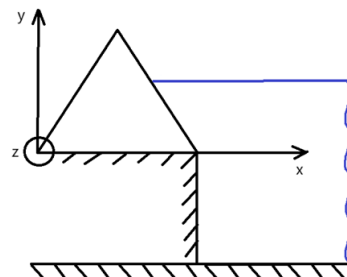
где $\alpha = 60^\circ$. Таким образом:

$$df = \frac{\rho g(h - y)}{\sin \alpha} dy$$

$$f = \int_0^h \frac{\rho g(h - y)}{\sin \alpha} dy = \frac{\rho g h^2}{2 \sin \alpha}$$

А значит сила давления на всю грань:

$$F = lf = \frac{\rho g l h^2}{2 \sin \alpha}$$



Так как сила давления направлена перпендикулярно ребру, то:

$$\begin{cases} F_x = F \sin \alpha = \frac{\rho g l h^2}{2} \\ F_y = F \cos \alpha = \frac{\rho g l h^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \end{cases}$$

Аналогично:

$$\begin{cases} df_x = df \sin \alpha = \rho g (h - y) dy \\ df_y = df \cos \alpha = \rho g (h - y) \operatorname{ctg} \alpha dy \end{cases}$$

2) Вычислим моменты сил F_x, F_y относительно оси oz . Рассуждая аналогично первому пункту, получаем:

$$M_x = l * \int_0^h y df_x = l \rho g * \int_0^h (hy - y^2) dy = \frac{l \rho g}{6} h^3$$

$$M_y = l * \int_0^h (a - y \operatorname{ctg} \alpha) df_y = l \rho g * \operatorname{ctg} \alpha * \int_0^h (a - y \operatorname{ctg} \alpha)(h - y) dy = l \rho g \operatorname{ctg} \alpha \frac{h^2}{2} (a - \frac{h}{3} \operatorname{ctg} \alpha)$$

где a - сторона основания призмы

3) Сила тяжести бетонного блока вычисляется как:

$$mg = \rho_1 V g = \rho_1 l S g = \rho_1 a^2 l g \frac{\sqrt{3}}{4}$$

где ρ_1 - плотность бетона, $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ - площадь основания призмы

Необходимо также узнать плечо силы тяжести относительно оси oz . Для этого определим положение центра тяжести блока. Из соображений симметрии ясно, что он совпадает с центром тяжести сечения призмы, параллельного ее основаниям и равноудаленного от них. То есть центр тяжести - точка пересечения медиан данного сечения. Тогда плечо силы тяжести есть половина стороны основания призмы. Значит, момент силы тяжести:

$$M_0 = mg \frac{a}{2}$$

4) Сила F_x стремится опрокинуть блок, в то время как сила тяжести и сила F_y этому препятствуют. Введем в рассмотрение функцию результирующего момента этих сил

$$M(h) = M_x - M_y - M_0 = l \rho g (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \frac{h^3}{6} - l \rho g a \operatorname{ctg} \alpha \frac{h^2}{2} - mg \frac{a}{2}$$

Если при каком-то значении h результирующий момент будет положительным, это будет значить, что блок опрокинется. Очевидно, при $h = 0$ момент отрицательный. Исследуем дальше функцию момента. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$M_1(h) = \frac{2M(h)}{l \rho g} = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \frac{h^3}{3} - \operatorname{ctg} \alpha * ah^2 - \frac{ma}{\rho l}$$

Так как высота воды не больше, чем высота основания блока, то $h \in \left[0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$. Поэтому мы исследуем $M_1(h)$ на данном отрезке. Вычислим производную:

$$\frac{dM_1}{dh} = ((1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)h - 2a \operatorname{ctg} \alpha) h$$

Производная является квадратичной функцией, график парабола, ветви которой направлены вверх. Корни этой параболы:

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 2a \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 \alpha = a \sin(2\alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Причем

$$\frac{dM_1}{dh} < 0, h \in \left[0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$$

то есть на данном отрезке момент все время убывает. Но так как при $h = 0$ момент был отрицательный, то и на всем этом отрезке он останется отрицательным. Таким образом, вода никак не сможет опрокинуть блок.

5) Чтобы столб воды смог сдвинуть блок, необходимо, чтобы сила F_x превзошла силу трения. Таким образом, запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$F_y + mg = N$$

где N - сила реакции опоры. Вычислим силу трения:

$$F_f = \mu N = \mu(F_y + mg)$$

Таким образом, необходимо:

$$F_x > F_f$$
$$\frac{\rho g l h^2}{2} > \mu \rho_1 \alpha^2 l g \frac{\sqrt{3}}{4} g + \mu \frac{\rho g l h^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

Откуда

$$h^2 > \frac{\sqrt{3} \mu \rho_1 a^2}{2 \rho (1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}$$

А значит

$$h > 1.3 \text{ м}$$

Учтем, что мы вели отсчет от берега, тогда реальный уровень воды:

$$H = 1 + h > 2.3 \text{ м}$$

Но этот уровень выше вершины блока, поэтому вода раньше начнет переливаться через блок и сдвинуть его не сможет.

11.3. (8 баллов) Петр, масса которого $m = 70$ кг, планирует участвовать в велогонке с горным этапом, где максимальный угол наклона шоссе достигает 10 градусов. Гоночный велосипед Петра имеет следующие параметры: масса - 12 кг, внешний диаметр колес - 700 мм, радиус окружности движения педалей - 180 мм, минимальная передняя и максимальная задняя звездочки, на которые крепится цепь, имеют соответственно 40 и 25 зубьев.

[4] Определите сможет ли он двигаться с постоянной скоростью на участке максимального наклона, учитывая, что Петр действует на педали со средней силой $0,85 \cdot mg$, направленной вертикально вниз.

Замечание. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

(А.Б. Яковлев)

Ответ: Петр не сможет двигаться с постоянной скоростью.

Решение. 1) Петр сможет двигаться с постоянной скоростью на участке максимального наклона, если совершаемая им работа будет больше работы силы тяжести. Пусть Петр совершает пол-оборота педалями. Тогда совершаемая им работа:

$$A_1 = F \cdot 2r = 2\beta g m r = 210 \text{ Дж}$$

где $\beta = 0,85$, r - радиус окружности движения педалей.

2) Вычислим, сколько оборотов при этом сделает заднее колесо:

$$N = \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} i$$

где $i = \frac{40}{25}$ - передаточное отношение звёздочек

При этом велосипед пройдет путь вдоль наклонного участка:

$$S = 2\pi NR = \pi i R$$

А вертикальное перемещение составит:

$$h = S \sin \alpha = \pi i R \sin \alpha$$

3) Наконец, вычислим работу силы тяжести:

$$A_2 = (m + M)gh = (m + M)g\pi i R \sin \alpha = 245 \text{ Дж}$$

Так как $A_2 > A_1$, то Петр не сможет двигаться с постоянной скоростью

11.4. (5 баллов) В школьной лаборатории изучают электростатику. На одной из установок учитель проводит эксперимент. Для этого он взял плоский конденсатор, заземлил одну из пластин и приложил напряжение $U = 220 \text{ В}$. Затем в воздушный зазор между обкладками учитель помещает плоскую незаряженную металлическую пластину на расстоянии $l = 2.00 \text{ см}$ от нижней заземленной пластины.

[5] Каков будет потенциал внутренней пластины?

[6] Какова будет напряженность поля с обеих сторон (сверху и снизу) от нее, если расстояние между обкладками конденсатора равно $d = 3.00 \text{ см}$? (А.А. Черенков)

Ответ: 147 В.

Ответ: 7,33 кВ/м.

Решение. 1) При введении незаряженной пластины на ее сторонах индуцируются заряды, противоположные по знаку и равные друг другу и зарядам на пластинах конденсатора. Поэтому напряженность поля E внутри конденсатора не изменится. Получаем:

$$E = \frac{U}{d} = 7,33 \text{ кВ/м}$$

2) Обозначим искомый потенциал через ϕ . Тогда

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\phi}{l}$$

Откуда находим:

$$\phi = \frac{Ul}{d} = 147 \text{ В}$$

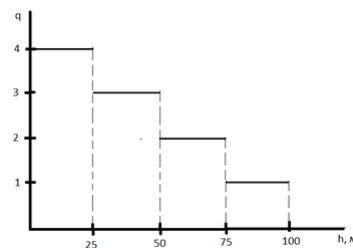
11.5. (7 балла) Ионосфера около планеты Железяка на высотах от 0 до 100 метров устроена таким образом, что электрический заряд тела изменяется скачкообразно как показано на рисунке.

[7] Определите возможно ли колебательное движение для тела массой $m = 4$ грамма, учитывая, что в указанной области высот напряженность направленного вверх электрического поля постоянна и равна 10000 В/м , а напряженность гравитационного поля также постоянна и равна 5 м/с^2 .

Замечание. Заряд тела указан в микроКулонах. (А.Б. Яковлев)

Ответ: Тело может пребывать в колебательном движении..

Решение. 1) Заметим, что силы, действующие на тело, потенциальны. Тогда колебательное движение тела возможно, если оно попадет в потенциальную яму. Потенциальная энергия тела складывается из гравитационной и электрической составляющих:



$$\Pi(h) = mgh - Eq(h)h = (mg - Eq(h))h.$$

То есть потенциальная энергия тела является кусочно линейной функцией высоты, так как заряд меняется скачкообразно с высотой. Теперь вычислим $(mg - Eq(h))$ для каждого участка:
При $0 \leq h \leq 25$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 4 \times 10^{-6}) = -20 \times 10^{-3} \text{Н}.$$

Потенциальная энергия убывает.

При $25 \leq h \leq 50$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 3 \times 10^{-6}) = -10 \times 10^{-3} \text{Н}.$$

Потенциальная энергия также убывает.

При $50 \leq h \leq 75$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 2 \times 10^{-6}) = 0 \text{Н}.$$

Потенциальная энергия остаётся постоянной.

При $75 \leq h \leq 100$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 1 \times 10^{-6}) = 10 \times 10^{-3} \text{Н}.$$

Потенциальная энергия возрастает.

2) Таким образом, при $h \in [0; 50]$ потенциальная энергия убывает, при $h \in [50; 75]$ остаётся постоянной, а при дальнейшем росте высоты $h \in [75; 100]$ потенциальная энергия возрастает. Это означает, что на интервале $h \in [50; 75]$ тело попадает в потенциальную яму, и колебательное движение возможно.

