



Решения задач для 9 класса

9.1. (8 баллов) Кубик с ребром $a = 5,00$ см и массой $m = 200,0$ грамм плавает в прямоугольном сосуде (длина 20,0 см, ширина 10,0 см, высота 20,0 см) с жидкостью плотности $\rho = 2,00$ г/см³.

[1] Сколько воды (плотность 1,00 г/см³) необходимо долить в сосуд, чтобы тело начало тонуть? Ответ дать в литрах.

Замечание. Начальное количество жидкости равно 2,45 литра. Ускорение свободного падения принять равным 10,0 м/с². (А.Б. Яковлев)

Ответ: а) Если жидкости смешиваемые, задача не имеет решения; б) Если жидкости несмешиваемые, то необходимо долить 0,175 литра воды..

Решение. 1) Возможны два случая - когда жидкости смешиваемые и когда нет. Рассмотрим оба случая. Сделаем некоторые предварительные вычисления:

Плотность кубика: $\rho = \frac{m}{a^3} = \frac{0.200}{(0.0500)^3} = 1.60$ г/см³.

Объем сосуда: $V_v = 20,0 \times 10,0 \times 20,0 = 4000$ см³ = 4,00 л

Площадь основания сосуда: $S = 20,0 \times 10,0 = 200$ см²

2) Смешиваемые жидкости. Чтобы тело утонуло, средняя плотность смеси должна стать меньше плотности кубика:

$$\frac{\rho_1 V_0 + \rho_2 V}{V_0 + V} < \rho.$$

где ρ_1, ρ_2 - плотности жидкости и воды соответственно, V_0, V - начальный объем, занимаемый жидкостью, и объем воды, который необходимо долить. Решая это неравенство относительно V :

$$V > \frac{\rho_1 - \rho}{\rho - \rho_2} V_0 = 1,63 \text{ л.}$$

Заметим, что в таком случае суммарный объем жидкостей больше объема сосуда. Значит, этот случай не реализуется.

3) Несмешиваемые жидкости. Чтобы кубик утонул, необходимо долить столько воды, чтобы уровень жидкости был на уровне верхней грани кубика.

Условие плавания кубика:

$$\rho_1 g V_3 = mg$$

Откуда объем погруженной части:

$$V_3 = \frac{m}{\rho_1}$$

А значит, глубина погружения равна:

$$h = \frac{V}{a^2} = \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

Высота выступающей части:

$$H = a - h = a - \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

Тогда необходимый объем воды, с учетом, что кубик занимает часть объема:

$$V = SH - a^2 H = (S - a^2) \left(a - \frac{m}{\rho_1 a^2}\right) = 175 \text{ см}^3 = 0,175 \text{ л}$$

9.2. (5 баллов) Колобок начинает двигаться по окружности радиуса $R=10,0$ м из точки А со скоростью $0,500$ м/с. В тот же момент времени стартует лиса из точки В со скоростью $0,670$ м/с.

[2] Успеет ли лиса догнать колобка прежде того момента, когда он достигнет точки С?

Замечание. Расстояние между центром окружности О и точкой В равно $L=25,0$ м. Угол АОС равен 150 градусов. (А.Б. Яковлев)

Ответ: Лиса догонит колобка до точки С.

Решение. 1) Лиса успеет догнать колобка, если ее время движения до точки С будет меньше, чем время движения колобка до этой точки. Лисе выгодно двигаться напрямую от точки В до С. Вычислим это расстояние с помощью теоремы косинусов из треугольника ОВС:

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2OB * OC \cos(\alpha)} = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos(\alpha)},$$

где $\alpha = 150^\circ$

Тогда время движения лисы:

$$t_1 = \frac{BC}{v_1} = \frac{\sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos \alpha}}{v_1} \approx 50.8 \text{ с.}$$

2) Колобок должен пройти путь по дуге АС, длина которого вычисляется как:

$$S = R\alpha,$$

где угол α выражен в радианах:

$$\theta = \frac{\alpha \times \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6} \text{ рад.}$$

Тогда время движения колобка:

$$t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{26.2}{0.500} = 52.4 \text{ с.}$$

6) Так как $t_2 > t_1$, лиса успевает догнать колобка до достижения им точки С.

9.3. (9 баллов) В глубокой полости налиты 2 несмешиваемые жидкости (толщины обоих слоев одинаковы и равны $20,0$ м) с показателями преломления $1,50$ (нижний слой) и $1,25$ (верхний слой). По поверхности верхнего слоя движется маленький катер, с постоянной скоростью $20,0$ м/с. Через $1,20$ с из точки на дне, лежащей на одной вертикали с точкой старта катера, выпускают узкий луч звука под углом $30,0^\circ$ к вертикали.

[3] Через сколько секунд звук догонит катер. Скорость звука в нижнем слое жидкости равна $300,0$ м/с?

Замечание. При решении учитывать, что звук подчиняется тем же законам отражения и преломления, что и свет. (А.Б. Яковлев, А.М. Минарский)

Ответ: Звук не сможет догнать катер.

Решение. 1) Введем обозначения:

$h = 20,0$ м — толщины слоев жидкости.

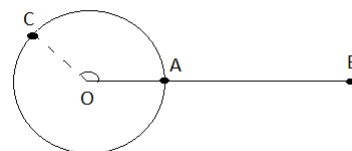
$n_1 = 1,50$ — показатель преломления нижней жидкости.

$n_2 = 1,25$ — показатель преломления верхней жидкости.

$v_K = 20,0$ м/с — скорость катера.

$t_0 = 1,20$ с — задержка перед выпуском луча.

1) Вычислим время, за которое звук попадет со дна на поверхность. Его путь делится на два участка - движение в первой и во второй жидкости, в которых он распространяется с разными скоростями. Таким образом:



$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

где s_1 и s_2 - пути, пройденные звуком в нижней и верхней жидкости со скоростями v_1 и v_2 соответственно

2) По определению показатель преломления в среде

$$n_1 v_1 = n_2 v_2$$

Значит, в верхней жидкости звук распространяется со скоростью:

$$v_2 = \frac{v_1 n_1}{n_2}$$

3) При переходе звука из нижней жидкости в верхнюю меняется направление его распространения согласно закону Снеллиуса:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

где - θ_1, θ_2 - угол падения звука на границу раздела жидкостей и угол преломления при переходе в верхнюю жидкость, соответственно. Из геометрических соображений ясно, что $\theta_1 = 30^\circ$
Тогда

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1 \frac{n_1}{n_2}$$

4) Из геометрических соображений находим пройденный звуком путь в каждом слое:

$$s_1 = \frac{h}{\cos \theta_1} = \frac{h}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1)^2}}$$

$$s_2 = \frac{h}{\cos \theta_2} = \frac{h}{\sqrt{1 - (\sin \theta_2)^2}} = \frac{h}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1 \frac{n_1}{n_2})^2}}$$

Причем по горизонтали звук проходит расстояние:

$$L = l_1 + l_2 = s_1 \sin \theta_1 + s_2 \sin \theta_2 = h \sin \theta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1 \frac{n_1}{n_2})^2}} \frac{n_1}{n_2} \right) = 26.6 \text{ м}$$

Тогда звук доберется до поверхности за время:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{h}{v_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \theta_1 \frac{n_1}{n_2})^2}} \frac{n_1}{n_2} \right) = 0.15 \text{ с}$$

5) Так как звук начал движение позднее катера, то к моменту, когда звук доберется до поверхности, катер пройдет расстояние

$$l = (t_0 + t) v_K = 27 \text{ м}$$

6) Таким образом, $l > L$, а значит, звук не сможет догнать катер

9.4. (5 баллов) Настя посещает школьный кружок по физике. На одном из занятий она собрала электрическую цепь из трех одинаковых лампочек с сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$. Две лампочки она соединила параллельно, а оставшуюся последовательно с ними.

[4] Определите максимальную мощность, выделившуюся на одной из лампочек, если лампочки подключены к батарее с напряжением 3 В .

Замечание. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,8 Вт.

Решение. 1) Чтобы вычислить мощности, выделяемые на лампочках, найдем ток, который через них протекает. Общее сопротивление лампочек, соединенных параллельно :

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Эти лампочки последовательно соединены с третьей. Тогда общее сопротивление цепи:

$$R_0 = R_3 + R_{12} = \frac{3}{2}R$$

2) По закону Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R_0} = \frac{2U}{3R}$$

3) Ток, протекая по лампочкам, соединенным параллельно, делится пополам в силу симметрии. Таким образом, мощности, выделяемые на этих лампочках:

$$P_1 = P_2 = P_{12} = \left(\frac{I}{2}\right)^2 R = \frac{U^2}{9R}$$

4) Мощность, выделяемая на третьей лампочке:

$$P_3 = I^2 R_3 = \frac{4U^2}{9R} > P_{12}$$

Подставляя численные значения, находим:

$$P_3 = 0,8 \text{ Вт}$$

9.5. (7 баллов) Группе легкомоторных спортивных самолетов поставлена задача одновременно вылетев из пункта А сбросить в пункте В вымпел и вернуться назад. Расстояние от А до В 450 км. В каждом самолете бак вмещает 240 литров топлива, 1 литр которого позволяет пролететь 2,5 км при крейсерской (наиболее экономичной) скорости в 300 км/час.

[5] Какое минимальное количество самолетов должно быть в группе, чтобы выполнив задание все они вернулись в А, если возможна мгновенная перекачка топлива из самолета в самолет?

[6] Какое суммарное количество часов самолеты будут находиться в воздухе?

(Г.А. Гамов, А.Б. Яковлев)

Ответ: 3.

Ответ: 6 ч.

Решение. 1) Введем обозначения:

Объем бака: $V = 240 \text{ л}$

Расход топлива: $\alpha = \frac{1}{2,5} \text{ л/км}$

Скорость самолетов: $v = 300 \text{ км/ч}$

Расстояние от пункта А до В и обратно: $S = 900 \text{ км}$

Будем решать задачу итеративно, рассматривая сначала один самолет, потом два и так далее.

2) Пусть летит один самолет. Тогда максимальное расстояние, которое он сможет пролететь:

$$S_0 = \frac{V}{\alpha} = 600 \text{ км}$$

Таким образом, самолет не долетит $\Delta S = S - S_0 = 300 \text{ км}$, и ему понадобится $\Delta V = \Delta S \alpha = 120 \text{ л}$ дополнительного топлива, то есть полбака.

3) Пусть летят два самолета. Ясно, что одному из самолетов необходимо пролететь ΔS , перека-

чать полбака топлива другому самолету и развернуться. Иначе, если он пролетит меньше или больше, чем ΔS , он не сможет передать необходимое количество топлива второму самолету, чтобы тот завершил полет в А. Однако к этому моменту он уже израсходует полбака топлива, а значит, если он отдаст вторую половину бака, то сам не сможет вернуться в А.

4) Пусть летят три самолета. Рассмотрим следующую стратегию. Пусть самолеты пролетят $\Delta S/2$, тогда они израсходуют по четверти своего бака. В этот момент один из самолетов перекачивает свое топливо другим самолетам до полного бака. Тогда у него останется ровно четверть бака, и этого достаточно, чтобы вернуться обратно. Дальше оставшиеся самолеты пролетят еще $\Delta S/2$, снова расходуя по четверти бака. Один из самолетов перекачивает свое топливо второму до полного бака. Тогда у него останется ровно половина бака, чего как раз достаточно, чтобы он вернулся обратно в А. У второго же самолета при этом будет полный бак, на котором он долетит оставшийся ему путь.

5) Вычислим суммарное количество часов, которое самолеты будут находиться в воздухе. Суммарное пройденное расстояние:

$$L = 2 * (\Delta S/2 + \Delta S + S/2) = 3\Delta S + S$$

А значит суммарное время в воздухе:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{3\Delta S + S}{v} = 6\text{ч}$$