



Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) На производстве для проверки датчика расхода газа проводят испытание. Известно, что по газопроводу, имеющему поперечное сечение $S = 5 \text{ см}^2$, течет метан при давлении $p = 7$ атмосфер и температуре $T = 15^\circ \text{ С}$.

[1] Какую скорость движения газа должен показать исправный датчик, если за время $t = 10$ мин через сечение трубы проходит $m = 15 \text{ кг}$ метана?

Замечание. Молярную массу метана принять равной $M = 16,04 \text{ г/моль}$. (А.А. Черенков)

Ответ: 10.

Решение. 1) Объем газа, протекающего через поперечное сечение газопровода:

$$V = vtS$$

2) Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

3) Таким образом, подставив выражение для объема в уравнение Менделеева-Клапейрона, выразим скорость:

$$v = \frac{mRT}{pMtS} = 10,5 \text{ м/с}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то ответ 10 м/с

10.2. (5 баллов) Два сосуда одинакового объема наполнены кислородом и соединены трубкой. Вся система находится при температуре $T = 17^\circ \text{ С}$. В некоторый момент времени один из сосудов начинают нагревать до температуры $T_1 = 27^\circ \text{ С}$, а температуру второго сосуда поддерживают прежней.

[2] Во сколько раз при этом изменится давление в системе?

Замечание. Объемом трубки пренебречь.

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,0 (допустим ответ 1,02).

Решение. 1) Запишем уравнения состояния газов в нагретом и ненагретом сосудах:

$$\begin{cases} pV = \frac{m_1}{M}RT_1 \\ pV = \frac{m_2}{M}RT \end{cases}$$

Где m_1, T_1 – масса и температура газа в первом сосуда, m_2, T_2 – во втором сосуда.
Откуда

$$\begin{cases} m_1 = \frac{pVM}{RT_1} \\ m_2 = \frac{pVM}{RT} \end{cases}$$

2) Запишем уравнение Менделеева - Клапейрона для газа в сосудах до нагревания:

$$2p_0V = \frac{m_1 + m_2}{M}RT$$

Где p_0 – давление газа в сосудах

3) Подставим выражения для масс:

$$2p_0 = p\left(\frac{T}{T_1} + 1\right)$$

Тогда получим, что отношение давлений:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2T_1}{T + T_1} = 1,02$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то ответ 1,0, то есть с заданной точностью выявить разность в давлениях невозможно. Однако исходя из смысла вопроса допустим ответ 1,02.

10.3. (6 баллов) Прямолинейный кусок проволоки длиной 30 см (отрезок АВ) с удельным сопротивлением $3 \cdot 10^{-8}$ Ом/м разбит точками С, D, E, F так, что $CD=DE=EF=FB$, $AC=2CD$. Точки С, D, E, F, В соединены с точкой А отрезками проводов с другими удельными сопротивлениями так, что их сопротивления равны сопротивлению участка АС.

[3] Найти полное сопротивление цепи между точками А и В.

Замечание. Ответ дать в микроОмах

(А.Б.Яковлев)

Ответ: 0,0015 (допустим ответ 0.002).

Решение. 1) Сопротивление рассчитывается как

$$R = \rho L,$$

где ρ - удельное сопротивление, L - длина проводника. Тогда ясно, что сопротивления участков CD, DE, EF, FB равны, а сопротивление участка АС в два раза больше. Обозначим:

$$R_{CD} = R_{DE} = R_{EF} = R_{FB} = R, R_{AC} = 2R$$

По условию сопротивления проводов:

$$r_{AC} = r_{AD} = r_{AE} = r_{AF} = r_{AB} = R_{AC} = 2R$$

2) Чтобы вычислить полное сопротивление проволоки с проводами заметим, что тип их соединения чередуется: R_{AC} и r_{AC} соединены параллельно, они последовательно соединены с R_{CD} , затем все вместе параллельно к r_{AD} , последовательно с R_{DE} и так далее.

Таким образом начнем вычислять общее сопротивление. Для параллельно соединенных R_{AC} и r_{AC} получим, что их общее сопротивление:

$$R_1 = \frac{R_{AC}r_{AC}}{R_{AC} + r_{AC}} = R$$

Этот участок соединен последовательно с R_{CD} , значит общее сопротивление:

$$R_2 = R_1 + R_{CD} = 2R$$

Далее для параллельно подключенного сопротивления r_{AD} , общее сопротивление будет:

$$R_3 = \frac{R_2r_{AD}}{R_2 + r_{AD}} = R$$

Ясно, что дальнейшие вычисления будут повторять вышеизложенные, таким образом, в конце получим, что общее сопротивление проволоки с проводами равняется R

3) Длина участка провода FB равняется 1/6 всей длины провода. Таким образом, получаем:

$$R = \rho \frac{l}{6} = 0,0015 \text{ мкОм}$$

Замечание. Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустим и ответ 0,002 мкОм.

10.4. (7 баллов) Павел проводит эксперимент, в котором он бросает два одинаковых мячика без начальной скорости с высоты $H = 15$ м, измеряя их скорости в конце пути и времена

падения. На пути одного из мячиков на высоте $h = 10$ м находится площадка, расположенная под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, от которой мячик упруго отскакивает, а другой мячик падает свободно.

[4] На сколько будут отличаться скорости мячиков в момент падения на Землю?

[5] На сколько будут отличаться их времена падения на Землю?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2 . (А.А. Черенков)

Ответ: 0.

Ответ: 1,3 (допустим ответ 1).

Решение. 1) Для обоих мячиков выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2}$$

Откуда получаем выражение для скорости:

$$v = \sqrt{2gH}$$

Так как мячики находились на одной высоте, их скорости в конце пути будут одинаковыми, поэтому разность скоростей в конце пути равна нулю.

2) Введем ось oy вертикально вниз, отсчет начинаем с высоты H . Закон движения мячика, на пути которого нет преграды:

$$y_1(t) = \frac{gt^2}{2}$$

В момент падения $y_1(T_1) = H$, где T_1 - полное время движения мячика. Таким образом получаем, что

$$T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 1.7c$$

Уравнение движения второго мячика до соударения с преградой:

$$y_2(t) = \frac{gt^2}{2}$$

При этом скорость меняется по закону:

$$v_2(t) = gt$$

В момент t_2 удара о преграду мячик будет находиться на высоте h , то есть $y_2(t_2) = H - h$, откуда получаем, что

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \approx 1c$$

а скорость в этот момент будет равна:

$$v_2(t_2) = g\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{2g(H-h)} = v_0$$

При упругом ударе о преграду модуль скорости не меняется, меняется только ее направление. Из геометрических соображений находим, что мячик отразится от преграды под углом

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2 * 30^\circ = 30^\circ = \alpha$$

Теперь уравнение движения мячика имеет вид:

$$y_2(t) = (H - h) - v_0 \sin \alpha t + \frac{gt^2}{2}$$

В момент τ_2 падения шарика на землю $y_2(\tau_2) = H$. Тогда получаем квадратное уравнение для определения τ_2 :

$$H = (H - h) - v_0 \sin \alpha \tau_2 + (g\tau_2^2)/2$$

откуда находим, что

$$\tau_2 = \frac{1}{g} \left(v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh} \right)$$

Учитывая, что $\tau_2 > 0$, получим:

$$\tau_2 = \frac{1}{g} \left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh} \right) \approx 2c$$

Таким образом, полное время движения мячика:

$$T_2 = t_2 + \tau_2 \approx 3c.$$

А разность времен равна:

$$\Delta t = T_2 - T_1 \approx 1,3c$$

10.5. (6 баллов) Пете снится сон, в котором он находится на необитаемом острове. Чтобы добыть себе пропитание он собирается на охоту, взяв с собой лук. Пройдя в джунгли, Петя заметил на расстоянии $L = 10$ м от себя дерево, на котором на ветке на высоте $H = 5$ м сидит обезьяна. Натянув тетиву, Петя выпустил стрелу. Обезьяна, покоившаяся на дереве, от испуга в этот же момент начала падать.

[6] Какой должна быть минимальная скорость стрелы, чтобы Петя попал в обезьяну?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2 . (А.А. Черенков)

Ответ: 11 (допустим ответ 10).

Решение. 1) Введем неподвижную систему координат, связанную с Землей, в точке, где стоит Петя. Введем также подвижную систему координат, жестко связанную с падающей обезьяной. Рассмотрим в неподвижной системе координат законы изменения скоростей стрелы и обезьяны:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t \\ \vec{u}(t) = \vec{g}t \end{cases}$$

где $\vec{v}, \vec{u}$ – скорости обезьяны и стрелы соответственно. Тогда в подвижной системе координат по закону сложения скоростей скорость стрелы будет вычисляться как:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v}_0 = \text{const}$$

Таким образом, Петя попадет в обезьяну, если будет целиться прямо в нее, при любой достаточно большой скорости. По условию задачи Петя целится прямо в обезьяну. Тогда ясно, что минимальная скорость, при которой Петя попадет в обезьяну будет тогда, когда стрела долетит до обезьяны в тот же момент, что она упадет на Землю.

2) Найдем по теореме Пифагора начальное расстояние от Пети до обезьяны: $l = \sqrt{H^2 + L^2}$. Пусть α – угол, под которым производится выстрел. Тогда $\sin \alpha = \frac{H}{l}$, $\cos \alpha = \frac{L}{l}$. Запишем уравнения движения стрелы во введенной ранее неподвижной декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Стрела пройдет расстояние L по горизонтали, когда попадет в обезьяну в момент времени T , то есть $x(T) = L$, откуда получаем:

$$L = v_0 \cos \alpha T$$

тогда

$$T = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$$

В момент времени T стрела упадет на Землю, то есть $y(T) = 0$. Получим:

$$0 = v_0 \sin \alpha T - \frac{gT^2}{2}$$

Разделим это уравнение на $T \neq 0$ и разрешим его относительно T :

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Приравняем два полученных выражения для T :

$$\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$$

Откуда получим, что

$$v_0 = \sqrt{\frac{Lg}{2 \cos \alpha \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{Lg(H^2 + L^2)}{2HL}} = \sqrt{\frac{g(H^2 + L^2)}{2H}} \approx 11.1 \text{ м/с}$$

По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верный ответ 11 м/с

Замечание. Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустим и ответ 10 м/с .

10.6. (7 баллов) Саша придумал метод, который позволяет рассчитывать скорости тел. Для этого он взял наклонную плоскость и поставил на ней засечку, на расстоянии $L = 10$ см от основания. Далее он пустил катиться снизу вверх шарик, замерив времена $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с от начала движения, когда шарик проходил через засечку. Таким образом ему удалось узнать, какую скорость имел шарик в начале движения.

[7] Чему равнялась эта скорость?

[8] При каком минимальном угле (в градусах) Сашин метод не сработает, если оставить засечку на том же расстоянии и не менять начальную скорость?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2 . (А.А. Черенков)

Ответ: 0,07.

Ответ: 0,14.

Решение. 1) Введем систему координат вдоль наклонной плоскости с осью x , направленной вверх, и точкой начала в нижней точке. Тогда закон движения шарика по плоскости:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Отсюда получаем, что

$$t^2 - \frac{2v_0}{a}t + \frac{2x}{a} = 0$$

Так как t_1 и t_2 - корни этого уравнения при $x = L$, то согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{a} \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{2L}{a} \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что

$$v_0 = \frac{L}{t_1} + \frac{L}{t_2} = 7 \text{ см/с}$$

2) Сашин метод не сработает, если шарик не достигнет засечки на наклонной плоскости. Поэтому минимальный необходимый угол наклонной плоскости определяется из условия, что шарик докатился до засечки и остановился, продолжив затем движение вниз по наклонной плоскости. Запишем закон изменения скорости шарика:

$$v(t) = v_0 - g \sin \alpha t$$

Пусть остановка происходит в момент времени T , тогда:

$$0 = v_0 - g \sin \alpha T$$

то есть

$$T = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$$

Заметим, что $x(T) = L$, тогда после подстановки T в закон движения получим:

$$x(T) = L = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

Откуда окончательно получаем, что

$$\sin \alpha = \frac{v_0^2}{2Lg} = \frac{1}{400},$$

тогда

$$\alpha \approx 0,14^\circ.$$

Так как наименьшее количество значащих цифр в пункте 1 равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ в пункте 1: 0,07 м/с. В пункте 2 наименьшее количество значащих цифр равно двум.

10.7. (5 баллов) Петю позвали на день рождения в картинг. Машины для картинга развивают максимальную скорость 50 км/ч. Первую часть трассы Петя проехал, разогнавшись до 25 км/ч. Оставшуюся часть трассы Петя проехал, разогнавшись до максимальной скорости.

[9] Во сколько раз работа двигателя при разгоне на втором участке трассы больше, чем на первом участке?

Замечание. Время разгона и силу сопротивления в обоих случаях считать одинаковыми.

(А.А. Черенков)

Ответ: 3.

Решение. 1) Запишем второй закон Ньютона:

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}} = ma$$

откуда

$$F_{\text{тяги}} = F_{\text{сопр}} + ma = \text{const}$$

2) Вычислим пройденный путь на первой и второй половине трассы:

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}, s_2 = \frac{(2v)^2 - v^2}{2a} = 3s_1,$$

где $v = 25 \text{ км/ч}$

3) Таким образом, найдем отношение работ, совершенных двигателем:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{F_{\text{тяги}} s_2}{F_{\text{тяги}} s_1} = 3$$

10.8. (6 баллов) На стройке детского сада на штыре висел канат длиной $L = 5 \text{ м}$. Один из рабочих, проходя мимо, случайно его задел, и канат пришел в движение.

[10] Какую скорость будет иметь канат, когда целиком соскользнет со штыря, если перед началом движения его концы находились на одном уровне.

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным $9,8 \text{ м/с}^2$. (А.А. Черенков)

Ответ: 4,9 (допустим ответ 5).

Решение. 1) В начальный момент центр тяжести каната находился на расстоянии $l_1 = \frac{L}{4}$ от штыря, а когда канат покинул штырь — $l_2 = \frac{L}{2}$

2) По закону сохранения энергии:

$$-mgl_1 = \frac{mv^2}{2} - mgl_2$$

Откуда получаем:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2}} = 4,9 \text{ м/с}$$

По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верный ответ 4,9 м/с

10.9. (7 баллов) Санки скатываются с горы, имеющей угол наклона $\beta = 30^\circ$, и движутся последовательно по горизонтальному участку длиной $s_1 = 7 \text{ м}$, через горку высотой $h = 3 \text{ м}$ и углом наклона $\alpha = 60^\circ$, и снова по горизонтальному участку. Коэффициент трения на горизонтальных участках — $\mu_1 = 0.1$, на наклонных — $\mu_2 = 0.3$.

[11] Определить с какой высоты надо стартовать саням, чтобы они проехали по второму горизонтальному участку не менее $s_2 = 15 \text{ метров}$.

(А.А. Черенков)

Ответ: 9.

Решение. 1) Вычислим длины наклонных участков, по которым едут санки. При спуске с первой горы:

$$l = \frac{H}{\sin \beta}$$

При движении по второй горке:

$$l_1 = \frac{h}{\sin \alpha}$$

2) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — модули работ сил трения при движении по первому наклонному, первому горизонтальному, второму наклонному и второму горизонтальному участкам соответственно. Ясно, что при движении по второй горке на обоих склонах сила трения совершит одинаковую работу A_3 . Найдем эти работы. Рассмотрим горизонтальные участки. По второму закону Ньютона на вертикальную ось:

$$mg = N$$

Тогда:

$$F = \mu_1 N = \mu_1 mg$$

то есть

$$A_2 = \mu_1 mgs_1, A_4 = \mu_1 mgs,$$

где s - путь пройденный санками на втором горизонтальном участке. Рассмотрим теперь наклонные участки. При движении санок по первой горе по второму закону ньютона на ось, перпендикулярную поверхности склона:

$$N = mg \cos \beta$$

Тогда:

$$F = \mu_2 N = \mu_2 mg \cos \beta$$

то есть

$$A_1 = \mu_2 mgl \cos \beta$$

Аналогично найдем, что $A_3 = \mu_2 mgl_1 \cos \alpha$

3) Для начала проверим, какой путь до полной остановки проедут санки при спуске со второй горки при нулевой начальной скорости. По закону сохранения энергии:

$$mgh = A_3 + A_4$$

$$mgh = \mu_2 mgl_1 \cos \alpha + \mu_1 mgs$$

Откуда

$$s = \frac{h - \mu_2 l_1 \cos \alpha}{\mu_1} = \frac{1 - \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha}{\mu_1} h$$

Таким образом, получаем, что санки проедут заданный путь на втором горизонтальном участке при любой начальной скорости. Поэтому задача сводится к нахождению такой высоты, при спуске с которой санки смогут достичь вершины второй горки.

4) По закону сохранения энергии при спуске с первой горы:

$$mgH = A_1 + A_2 + A_3 + mgh$$

$$mgH = \mu_2 mgl \cos \beta + \mu_1 mgs_1 + \mu_2 mgl_1 \cos \alpha + mgh$$

Откуда получаем:

$$H = \mu_2 l \cos \beta + \mu_1 s_1 + \mu_2 l_1 \cos \alpha + h = \mu_2 H \operatorname{ctg} \beta + \mu_1 s_1 + \mu_2 h \operatorname{ctg} \alpha + h$$

Окончательное выражение для высоты подъема:

$$H = \frac{\mu_1 s_1 + (\mu_2 \operatorname{ctg} \alpha + 1)h}{1 - \mu_2 \operatorname{ctg} \beta} = 8,8 \text{ м}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то верный ответ 9 м .