



Решения задач для 10 класса

10.1. (8 баллов) В учебной лаборатории Петя исследует электростатические поля, создаваемые заряженными рамками необычной формы. Из тонкой изолирующей нити Петя изготовил два замкнутых контура: круговое кольцо радиуса $R = 20$ мм и квадрат со стороной $2a = 40$ мм. Мальчик расположил фигуры так, что их плоскости параллельны, а ось кольца перпендикулярна этим плоскостям и проходит через центр квадрата. Расстояние между центрами фигур равно $d = 10$ см. По кольцу равномерно распределён заряд $Q = 2$ мкКл, а по квадрату — заряд $q = 2$ мкКл. В центре квадрата Петя поместил пробный заряд $q_0 = 2,0$ нКл массой $m = 1,0$ г и сообщил ему начальную скорость $v = 0,50$ м/с, направленную вдоль оси, соединяющей центры фигур, в сторону кольца.

[1] Достигнет ли пробный заряд центра кольца?

(А.А. Черенков)

Ответ: не достигнет.

Решение.

1) Сначала выведем формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным кольцом. Для этого рассмотрим точку P на оси кольца на расстоянии x от его центра O . Мысленно разобьём кольцо на множество точечных зарядов $Q = Q_1 + \dots + Q_n$. Согласно теореме Пифагора каждый точечный заряд находится от точки P на расстоянии

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}.$$

С помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ , создаваемый всем кольцом в точке P :

$$\varphi_c = \frac{kQ_1}{r} + \dots + \frac{kQ_n}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Отметим, что в силу общности вывода полученная формула справедлива для любого распределения заряда по кольцу.

2) Выведем теперь формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным квадратом в той же самой точке P . Расстояние от центра квадрата M до точки P равно $z = d - x$. Ясно, что в силу центральной симметрии задачи относительно оси OP для вычисления потенциала, создаваемого квадратом, достаточно рассмотреть половину любой его стороны и умножить полученный результат на 8.

Мысленно разобьём выбранную сторону квадрата на точечные заряды $dq = \rho dl$, где $\rho = \frac{q}{8a} = \text{const}$ — плотность распределения заряда по квадрату. Пусть точечный заряд находится на расстоянии l от середины стороны. Тогда согласно теореме Пифагора расстояние от него до точки P :

$$r(l) = \sqrt{MP^2 + (a^2 + l^2)} = \sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}$$

Наконец, с помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ_0 , создаваемый половиной стороны квадрата в точке P :

$$\varphi_0 = \int_0^a \frac{k dq}{r} = \int_0^a \frac{k \rho dl}{\sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}} = k \rho \int_0^a \frac{dl}{\sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}}$$

Таким образом, мы получили табличный интеграл, его можно взять и получить окончательный ответ в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= k\rho \cdot \ln \left| l + \sqrt{l^2 + z^2 + a^2} \right| \Big|_0^a = k\rho \left(\ln \left(a + \sqrt{z^2 + 2a^2} \right) - \ln \left(\sqrt{z^2 + a^2} \right) \right) = \\ &= k \frac{q}{8a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}\end{aligned}$$

Окончательно получаем, что потенциал, создаваемый всем квадратом в точке Р равен:

$$\varphi_s = 8\varphi_0 = k \frac{q}{a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}$$

3) Вычислим теперь суммарный потенциал, создаваемый заряженными фигурами в точке Р. По-прежнему руководствуясь принципом суперпозиции, получаем:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_s(x) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{kq}{a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}$$

Согласно полученной формуле потенциал в центре квадрата ($x = d$):

$$\varphi_1 = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + d^2}} + \frac{kq}{a} \ln (1 + \sqrt{2})$$

А потенциал в центре кольца ($x = 0$):

$$\varphi_2 = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{d^2 + 2a^2}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)$$

Работа при перемещении пробного заряда из центра квадрата в центр кольца:

$$\begin{aligned}A &= q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) = -kq_0 \left[Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) - \frac{q}{a} \left(\ln (1 + \sqrt{2}) - \ln \left(\frac{a + \sqrt{d^2 + 2a^2}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right) \right) \right] = \\ &= -2,11 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}\end{aligned}$$

4) Пробный заряд достигнет центра кольца, если его начальная кинетическая энергия $E = \frac{mv^2}{2}$ будет не меньше, чем модуль работы электростатического поля при этом перемещении. Подставляя численные значения, находим:

$$E = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

Таким образом, сравнивая значения энергии Е и работы А, приходим к выводу, что заряд не сможет достичь центра второго кольца.

10.2. (5 баллов) Во время туристического похода школьники подошли к длинной канаве, которая была заполнена водой и преграждала им дальнейший путь. Чтобы не идти в обход, ребята решили соорудить переправу. Неподалёку от берега они обнаружили развалины старой деревянной избушки, сложенной из брёвен длиной $L = 4,0$ м прямоугольного сечения $15\text{см} \times 15\text{см}$. Ребята взяли одно из таких брёвен и положили его поперёк канавы, параллельно поверхности воды, так что бревно лишь касалось воды своей длинной гранью. Вскоре берег канавы осыпался, бревно оказалось свободным и начало тонуть.

[2] Найдите количество теплоты, которое выделится, пока бревно придёт в равновесие.

Замечание. При решении считать, что плотность древесины равна плотности воды $\rho = 1000,0\text{м}^3$. Ускорение свободного падения принять равным $9,8\text{м/с}^2$. (А.А. Черенков)

Ответ: 66 Дж.

Решение.

Так как плотность бревна равна плотности воды, то в конечном состоянии равновесия бревно окажется полностью погружённым в воду. Вначале, после отпускания бревна, под действием силы тяжести оно приобретёт некоторую скорость, затем по инерции пройдёт под водой некоторое расстояние, постепенно тормозясь, и в конце концов остановится на некоторой глубине под поверхностью воды.

Пусть центр масс бревна при погружении опустился на расстояние h . Тогда потенциальная энергия бревна уменьшилась на величину

$$\Delta U_1 = mgh,$$

Где $m = \rho La^2$ - масса бревна. При этом бревном был вытеснен на поверхность объём воды в форме прямоугольного параллелепипеда массой m . Можно считать, что эта вода растеклась по поверхности тонким слоем, то есть ее центр масс поднялся на высоту $(h - a/2)$, а её потенциальная энергия увеличилась на

$$\Delta U_2 = mg \left(h - \frac{a}{2} \right).$$

Искомое количество теплоты равно разности этих двух величин:

$$\Delta Q = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{mga}{2} = \frac{\rho g La^3}{2} \approx 66 \text{ Дж}$$

10.3. (7 баллов) Спортсмен-дайвер массой $m = 90,00$ кг решил испытать способности своего организма. Для этого он провел серию испытаний, в которых погружался в море на глубину H без какого-либо снаряжения, набрав полные легкие воздуха. Оказалось, что максимальная глубина, с которой он может всплыть, не совершая никаких движений, равна $7,00$ метров.

[3] Какой объём легких дайвера, если при полном выдохе объём его тела составляет $V = 85,0$ л?

Замечание. При решении считать, что плотность морской воды $\rho = 1020 \text{ кг/м}^3$, при вдохе воздуха объём тела увеличивается на долю $n = 0,900$ от объёма вдохнутого воздуха. Ускорение свободного падения принять равным $9,81 \text{ м/с}^2$, а атмосферное давление равным $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па.
(А.А. Черенков)

Ответ: 6,11 л.

Решение.

1) Максимальная глубина погружения H спортсмена определяется из условия, что на этой глубине выталкивающая вверх сила Архимеда сравнивается с силой тяжести. Таким образом, имеем:

$$F_a = mg$$

Откуда

$$\rho g V_0 = mg$$

где V_0 - объём спортсмена на глубине H . Таким образом

$$V_0 = m/\rho$$

2) При погружении на глубину H объём спортсмена меняется практически только из-за изотермического сжатия воздуха в легких на величину Δv . Пусть объём легких спортсмена равен v . Применим закон Бойля—Мариотта:

$$p_0 v = (p_0 + \rho g H) (v - \Delta v),$$

Отсюда находим:

$$\Delta v = \left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \rho g H}\right) v$$

3) При полных легких воздуха объем спортсмена равен $V + vn$, тогда на глубине H :

$$V_0 = V + (v - \Delta v)n$$

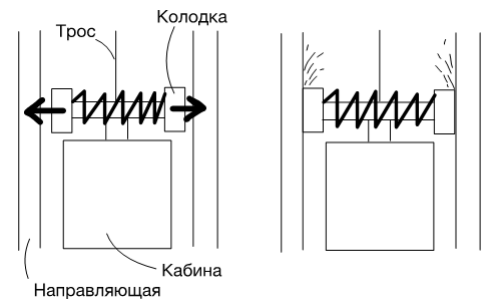
Подставим ранее найденные величины:

$$m/\rho = V + \left(1 - 1 + \frac{p_0}{p_0 + \rho g H}\right) nv$$

Выполняя алгебраические преобразования, окончательно получим ответ:

$$v = \frac{(m - V\rho)(p_0 + \rho g H)}{n\rho p_0} \approx 6,11 \text{ л}$$

10.4. (8 баллов) Учитель по физике на занятии кружка по физике дал Николаю задание разобраться, как работают клиновые ловители кабины в лифте. Он знал о них лишь то, что в шахте закреплены две направляющие, к которым при срабатывании системы безопасности прижимаются колодки. Николай предположил, что две колодки могут прижиматься пружиной между ними, действующей как распорка (на самом деле клиновые ловители устроены иным образом), и останавливать кабину, если её скорость почему-то стала выше допустимой (см. рис.).



[4] Рассчитать жёсткость пружины, необходимую для полной остановки кабины лифта за 1,5 с, если полная масса кабины с пассажирами 1500 кг, скорость, при которой срабатывает система, равна 1,2 м/с, расстояние от каждой колодки до направляющей 0,5 см, коэффициент трения 0,7.

Замечание. Исходное укорочение пружины составляет 20 см. Ускорение свободного падения $10,0 \text{ м/с}^2$. (Л.С. Ласкавый)

Ответ: $k = 60000 \text{ Н/м}$.

Решение.

Рассмотрим действие пружины на колодки. Пружина, соединённая с колодками, давит на каждую из них с силой упругости по закону Гука:

$$F_{\text{упр}} = k(\Delta l_0 - 2\Delta l)$$

Эта сила и является прижимающей колодки к направляющим, поэтому по третьему закону Ньютона, сила реакции опоры от колодок равна по величине силе упругости со стороны пружины:

$$N = F_{\text{упр}} = k(\Delta l_0 - 2\Delta l)$$

Второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_p = m \vec{a}$$

Раскрывая равнодействующую:

$$m \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{тр}} = m \vec{a}$$

В проекции на ось, направленную вниз

$$mg - F_{\text{тр}} - F_{\text{тр}} = -ma$$

Сила трения определяется законом Кулона-Амонтона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Или

$$F_{\text{тр}} = \mu k (\Delta l_0 - 2\Delta l)$$

В итоге

$$mg - 2\mu k (\Delta l_0 - 2\Delta l) = -ma$$

Откуда

$$k = \frac{mg + ma}{2\mu (\Delta l_0 - 2\Delta l)}$$

Ускорение найдём из кинематического выражения скорости:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

В проекции на ту же ось, направленную вниз:

$$v = v_0 - at$$

С учётом $v = 0$ получится

$$a = \frac{v_0}{t}$$

Подставляя в выражение для жёсткости пружины, получим в итоге:

$$k = \frac{mg + m \frac{v_0}{t}}{2\mu (\Delta l_0 - 2\Delta l)}$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$k = \frac{1500 \cdot 10 + 1500 \cdot \frac{1,2}{1,5}}{2 \cdot 0,7 \cdot (0,2 - 2 \cdot 0,005)} = 60902,2556 \text{ Н/м}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что $k = 60000 \text{ Н/м}$.

10.5. (7 баллов) В школе на уроке физике учитель проводил лабораторную работу с целью изучения оптических систем. Школьники устанавливали лампочку на расстоянии $L = 100 \text{ см}$ от экрана, а между ними тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 30,0 \text{ см}$ и диаметром $D = 5,00 \text{ см}$. Затем необходимо было измерить размер пятна от лампочки на экране.

[5] Чему равно минимально возможное измеренное значение площади пятна?

(А.А. Черенков)

Ответ: $1,99 \text{ см}^2$.

Решение.

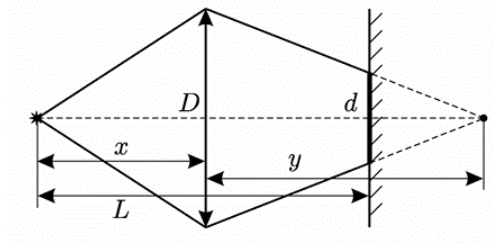


Рисунок 1. Ход лучей через линзу

Обозначим расстояния от линзы до источника x и до изображения y соответственно, диаметр линзы D , диаметр пятна на экране d .

Тогда из подобия треугольников (см рис):

$$d = D \cdot \frac{x + y - L}{y} = D \left(\frac{x - L}{y} + 1 \right).$$

Найдём такое x , при котором d минимально. Отметим, что не имеет смысла рассматривать значения $x \leq F$, так как в этом случае $d \geq D$, и размер пятна явно не может быть минимальным. Ясно, что d будет минимальным тогда, когда минимальное значение примет функция

$$f = \frac{x - L}{y}.$$

Применяя формулу тонкой линзы, получаем:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f &= \frac{(x - L)(x - F)}{Fx} = \frac{1}{F} \left(x + \frac{LF}{x} - (L + F) \right) \\ &= \frac{1}{F} \left(\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}} \right)^2 - (\sqrt{L} - \sqrt{F})^2 \right). \end{aligned}$$

Выражение

$$\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}} \right)^2 - (\sqrt{L} - \sqrt{F})^2$$

минимально тогда, когда первое слагаемое равно нулю:

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = \sqrt{LF}.$$

Этому значению соответствует минимально возможный диаметр пятна на экране:

$$d = D \cdot \frac{2\sqrt{LF} - L}{F}.$$

а значит минимальная площадь пятна

$$S = \pi d^2 / 4 = \pi D^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{LF} - L}{F} \right)^2 / 4 \approx 1,99 \text{ см}^2$$