



Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) Экспериментатор Василий в своей лаборатории совершил над одноатомным идеальным газом необычный цикл: в PV координатах при выбранном масштабе по осям он состоит из двух дуг окружностей разного радиуса с центрами в точках $(2V, 2P)$ и $(V, (2+\sqrt{3})P)$, где $P = 300$ Па, $V = 5$ м³. Участок цикла 1-2 представляет из себя треть окружности.
[1] Найдите термодинамический КПД в процентах.

(А.А. Черенков)

Ответ: 6.

Решение. 1) Обозначим центры окружностей $O_1(V, (2+\sqrt{3})P)$ и $O_2(2V, 2P)$, а также обозначим точку 1 за А, точку 2 за В. Из условия задачи следует, что А имеет координаты $(V, 2P)$, угол смежный с углом $\angle AO_2B$ равен 60° , а значит координаты точки В $(2.5V, (2+\sqrt{3}/2)P)$. Таким образом, проведем отрезок АВ. Из рассмотрения равнобедренных треугольников AO_1B и AO_2B находим, что $\angle AO_1B = 60^\circ$, а значит участок 2-1 представляет из себя шестую часть окружности. 2) Работа газа на каждом из участков 1-2 и 2-1 представляет из себя площадь под соответствующим участком графика. Найдём работы:

$$A_{12} = 1/3\pi PV + 1/2 \cdot \sqrt{3}/2P \cdot 1/2V + 2P \cdot 3/2V = (8\pi + 3\sqrt{3} + 72) / 24 \cdot PV$$

$$A_{21} = - \left(\sqrt{3}P \cdot 3/2V - 1/2 \cdot 3/2V \cdot \sqrt{3}/2P - 3\pi PV/6 + 3/2V \cdot 2P \right) = - (9\sqrt{3} - 4\pi + 24) / 8 \cdot PV$$

Таким образом, работа газа за цикл:

$$A = A_{12} + A_{21} = 5/6\pi - \sqrt{3}$$

3) Найдём изменение внутренней энергии газа на участке 1-2:

$$\Delta U = 3/2\nu R\Delta T = 3/2\Delta(PV) = 3/2 \left(5/2V \cdot (2 + \sqrt{3})P - 2PV \right) = (18 + 15\sqrt{3}) / 4 \cdot PV$$

В соответствии с первым началом термодинамики, на участке 1-2 газ получил количество теплоты равное: $Q = \Delta U + A_{12} = (8\pi + 93\sqrt{3} + 180) / 24 \cdot PV$

Рассуждая аналогично, заметим, что на участке 2-1 газ отдает некоторое количество теплоты, так как $\Delta U_{21} = -\Delta U_{12} < 0$, $A_{12} < 0$, значит $Q_{21} = \Delta U_{21} + A_{21} < 0$

4) Таким образом, КПД газа за цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q} * 100\% \approx 6\%$$

Ответ: 6%

10.2. (8 баллов) В одной лаборатории инженеры рассчитывают макет купола здания в виде усеченного конуса с радиусами оснований $R = 2$ м, $r = 1$ м и высотой $H = 2$ м, который будет использован при постройке подводных сооружений. Интерес для инженеров представляет случай, когда купол размещен под водой плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ так, что центр его меньшего основания находится на глубине $L = 10$ м, а ось наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности воды. Большее основание купола погружено в воду глубже, чем меньшее.

[2] Определите силу, действующую на боковую поверхность купола со стороны воды, если давление воздуха над поверхностью воды $P_0 = 10^5$ Па. Ответ дайте в меганьютонах.

Ответ: 2.

Решение. 1) Площадь основания конуса $S = \pi R^2$, его объём $V = SH/3 = \pi R^2 H/3$. Объём усеченного конуса можно найти, если достроить его до полного конуса и из его объема вычесть объём достроенной части.

$$V = V_R - V_r = \frac{1}{3}\pi (R^2 (H + h) - r^2 h)$$

где h - высота достроенной части. Найдем h . Рассмотрим сечение конуса, образованного плоскостью, проходящей через его ось. Тогда из подобия треугольников, представляющих из себя сечения всего конуса и достроенной части, получаем:

$$\frac{h}{H + h} = \frac{r}{R}$$

откуда

$$h = \frac{rH}{R - r}$$

Подставляя полученное выражение для h в формулу для объема усеченного конуса, получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + rR + r^2)$$

Тогда сила Архимеда, действующая на конус: $F_A = \rho g V = \rho g \pi H (R^2 + rR + r^2) / 3$.

Из геометрических соображений также найдем, что нижнее основание погружено на глубину $L + H \sin \alpha$

2) По своей природе сила Архимеда равна векторной сумме сил давления жидкости на поверхность помещённого в неё тела, то есть в нашем случае

$$\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_r + \vec{F}_R,$$

где F — искомая сила, а F_r и F_R — силы давления жидкости на меньшее и большее основание конуса.

В силу симметрии оснований и однородности поля тяжести среднее давление P_{cp} на основание равно давлению на уровне центра основания, поэтому

$$F_r = P_{cp}^r S = (P_0 + \rho g L) \pi r^2, \quad F_R = P_{cp}^R S = (P_0 + \rho g (L + H \sin \alpha)) \pi R^2$$

Сила F_A направлена вертикально вверх, а F_r, F_R — перпендикулярно основаниям конуса, то есть вдоль его оси, под углом α к горизонту. Введем обозначение $\vec{F}_0 = \vec{F}_r + \vec{F}_R$. Так как силы давления жидкости на основания конуса сонаправлены, то $F_0 = -F_r + F_R$. Применим теорему косинусов к треугольнику, составленному из векторов сил $\vec{F}_A, \vec{F}, \vec{F}_0$, получим

$$F^2 = F_A^2 + F_0^2 - 2F_A F_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right),$$

откуда

$$F = \sqrt{F_A^2 + F_0^2 + 2F_A F_0 \sin \alpha} \approx 2MH.$$

Ответ: 2 МН

10.3. (6 баллов) На спортивной площадке Маша и Даша играли с теннисными мячиками. Они одновременно бросили свои мячи с одинаковыми скоростями $v = 10,0$ м/с под углами $30,0^\circ$ и $60,0^\circ$ к горизонту.

[3] Через сколько времени после начала движения скорости мячей окажутся сонаправленными?

Замечание. При решении считать, что начальные скорости мячей лежат в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения принять равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. (А.А. Черенков)

Ответ: 1,4.

Решение. 1) Пусть $\alpha = 30^\circ$. Оба мяча, рассматриваемые в задаче, движутся с постоянными ускорениями, равными ускорению свободного падения g . Проекции их скоростей на горизонтальную x и вертикальную y оси следующие:

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{1y} = v_0 \sin \alpha - g\tau,$$

$$v_{2x} = v_0 \cos 2\alpha, \quad v_{2y} = v_0 \sin 2\alpha - g\tau.$$

Индекс 1 относится к мячу Маши, а индекс 2 — к мячу Даши. Так как скорости в момент времени τ оказались сонаправленными, получаем

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}},$$

подставим выражения для проекций скоростей:

$$tg\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} = tg2\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos 2\alpha}.$$

Из этого уравнения выразим время:

$$\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{tg2\alpha - tg\alpha}{\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}},$$

Проведем тригонометрические преобразования:

$$tg2\alpha - tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha},$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin (\alpha/2) \sin (3\alpha/2)}{\cos 2\alpha \cos \alpha},$$

Тогда окончательно получаем:

$$\tau = \frac{v_0 \cos (\alpha/2)}{g \sin (3\alpha/2)} \approx 1,4c$$

2) Задачу можно решить и другим способом, не требующим тригонометрических преобразований. Для этого нужно рассмотреть движение одного мяча относительно другого. Из закона сложения ускорений (аналогично закону сложения скоростей) следует, что мячи движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Скорость $\vec{v}_{12}$ мяча Маши относительно мяча Даши составляет

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20},$$

где индексом 0 отмечены начальные значения скоростей. В момент времени τ скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_{12}$ сонаправлены. Имея это в виду, изобразим (см рис) треугольник скоростей ABC , соответствующий формуле для $\vec{v}_{12}$, а также треугольник ABD , отражающий равенство

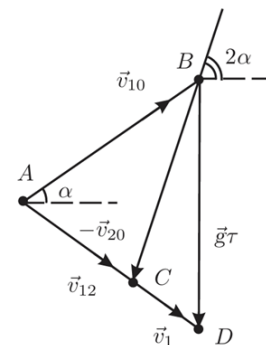
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{g}\tau.$$

Так как $AB = BC = v_0$, имеем $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, а $\angle ADB = \frac{3\alpha}{2}$.
Применяем к $\triangle ABD$ теорему синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{g\tau}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отсюда сразу следует полученный ранее ответ. Таким образом, переход к другой системе отсчёта позволил использовать геометрические методы вместо проведения тригонометрических преобразований.

Ответ: 1,4 с



10.4. (5 баллов) В лаборатории микроклимата исследуют поведение влажного воздуха. Для этого два резервуара объёмами $V_1 = 5,0$ л и $V_2 = 2,0$ л соединяют короткой трубкой с вентилем, который изначально закрыт. Первый резервуар заполняется влажным воздухом под давлением $P_1 = 3,0$ атм и относительной влажностью $\phi = 80,0\%$, а второй — водяным паром при давлении $P_2 = 0,75$ атм. Благодаря теплоизолирующему покрытию в сосудах все время поддерживается постоянная температура $T = 100,0^\circ$. Вентиль открывают и ждут, когда в сосудах установится термодинамическое равновесие.

[4] Определите давление в атмосферах и относительную влажность в сосудах в процентах после установления равновесия, если давление насыщенного пара при температуре 100° равно $P_0 = 1,0$ атм.

(А.А. Черенков)

Ответ: 2,4;78,6.

Решение. 1) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газов в сосудах до открытия вентиля:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T, \quad P_2 V_2 = \nu_2 R T$$

Сложим полученные уравнения:

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = (\nu_1 + \nu_2) R T$$

2) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газов в сосудах после открытия вентиля:

$$P (V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) R T$$

Таким образом, получаем:

$$P (V_1 + V_2) = P_1 V_1 + P_2 V_2$$

откуда находим искомое давление:

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} = 2,4 \text{ атм.}$$

3) Для вычисления установившейся влажности в сосудах найдем парциальное давление водяного пара. Из уравнения Менделеева-Клапейрона для водяного пара во втором сосуде до открытия вентиля выразим его количество:

$$\nu_2 = \frac{P_2 V_2}{R T}$$

Воспользуемся определением относительной влажности, чтобы вычислить парциальное давление водяного пара в первом сосуде до открытия вентиля:

$$P_{01} = \varphi P_0$$

Таким образом, количество водяного пара в первом сосуде до открытия вентиля:

$$\nu_{01} = \frac{P_{01}V_1}{RT} = \frac{\varphi P_0 V_1}{RT}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона после открытия вентиля для водяного пара:

$$P_{02}(V_1 + V_2) = (\nu_{01} + \nu_2)RT$$

Откуда находим парциальное давление водяного пара:

$$P_{02} = \frac{(\nu_{01} + \nu_2)RT}{V_1 + V_2} = \frac{\varphi P_0 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

4) Таким образом, вычислим относительную влажность в сосудах после открытия вентиля:

$$\varphi_1 = \frac{P_{02}}{P_0} \cdot 100\% = \frac{\varphi P_0 V_1 + P_2 V_2}{P_0(V_1 + V_2)} \cdot 100\% \approx 78,6\%$$

Ответ: 2,4; 78,6%

10.5. (6 баллов) В безветренный день Паша отправился на озеро ловить рыбу. Выплыв на середину озера на лодке длиной $L = 2,0$ м и массой $m = 10,0$ кг, он решил перейти с носа на корму. Лодка при этом пришла в движение, испытывая силу сопротивления со стороны воды $F = -ku$, где u — скорость лодки, k — известный коэффициент пропорциональности. Масса Паши $M = 80,0$ кг.

[5] Найдите смещение S_0 лодки к моменту полной остановки при отсутствии силы сопротивления ($k = 0$)

[6] Найдите смещение S лодки к моменту полной остановки при наличии силы сопротивления ($k = 0,50$ кг/с)

Замечание. При решении считать, что лодка перемещается вдоль одного направления.

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,8.

Ответ: 0.

Решение. 1. Воспользуемся свойством сохранения положения центра масс изначально покоящейся системы при отсутствии внешних сил (внутренние силы не изменяют положение центра масс в силу третьего закона Ньютона). Изменение координаты центра масс системы из 2 тел массами m_1, m_2 определяется через их соответствующие смещения $\Delta x_1, \Delta x_2$, следующим образом:

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}.$$

Применим эту формулу к нашему случаю:

$$\Delta x_c = \frac{m \cdot (-S_0) + M \cdot (L - S_0)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{ML}{M + m} \approx 1,8 \text{ м}$$

2. Пусть v и u — соответственно скорости человека и лодки относительно земли в некоторый момент времени, x — координата лодки в тот же момент времени, тогда закон изменения импульса ($\Delta p / \Delta t = F$) для системы, состоящей из человека и лодки, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu) = -ku,$$

откуда после подстановки $u = \Delta x / \Delta t$ находим

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu + kx) = 0.$$

Последнее уравнение означает, что величина в скобках не изменяется со временем, то есть её начальное и конечное значения равны между собой:

$$Mv_{\text{нач}} + mu_{\text{нач}} + kx_{\text{нач}} = \text{const} = Mv_{\text{кон}} + mu_{\text{кон}} + kx_{\text{кон}}.$$

Поскольку $v_{\text{нач}} = u_{\text{нач}} = v_{\text{кон}} = u_{\text{кон}} = 0$, после подстановки скоростей и деления на k получим $x_{\text{кон}} = x_{\text{нач}}$, то есть платформа вернётся в прежнее положение, а искомое смещение $S = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = 0$.

Ответ: 1,8 м; 0 м

10.6. (6 баллов) К открытию Олимпийских игр любитель-электрик собрал светящуюся гирлянду в форме олимпийской эмблемы из пяти одинаковых колец сопротивлением $r = 33$ Ом. Кольца были спаяны в местах, отмеченных на рисунке жирными точками. Места спайки и точка A разделяют центральное кольцо на 6 равных частей.

[7] Какое сопротивление имеет гирлянда между точками A и B ?

Замечание. Сопротивлением в местах спайки пренебречь.

(А.А. Черенков)

Ответ: 7.

Решение. В силу симметрии схемы относительно оси AB узел C можно разделить на два (см рис). Изобразим эквивалентную схему (см рис), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах r . Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи.

$$R_{AE_1} = R_{AE_2} = \frac{1}{6}r,$$

$$R_{E_1D_1} = R_{E_2D_2} = \frac{1}{\frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r} = \frac{5}{66}r$$

Заметим, что два сопротивления по $1/6r$, подключенные параллельно, имеют общее сопротивление $1/12r$. Тогда

$$R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{1}{\frac{1}{2}r + \frac{1}{12}r + \frac{1}{6}r} = \frac{2}{11}r.$$

общее сопротивление:

$$R = \frac{1}{2} (R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}) = \frac{7}{33}r = 7 \text{ Ом}.$$

Ответ: 7

10.7. (7 баллов) На одном уроке по физике школьники выполняли лабораторную работу. Вася справился с заданием самый первый и, чтобы не скучать без дела, начал экспериментировать. Он взял две наклонные плоскости с углами $\alpha_1 = 45,0^\circ$ и $\alpha_2 = 30,0^\circ$ и массами $m_1 = 100,0$ г и $m_2 = 500,0$ г соответственно. На легкий стержень он надевал грузики и клал его горизонтально на плоскости. Его задача заключалась в подборе такой массы груза, чтобы при падении стержня на стол он одновременно коснулся его обоими концами.

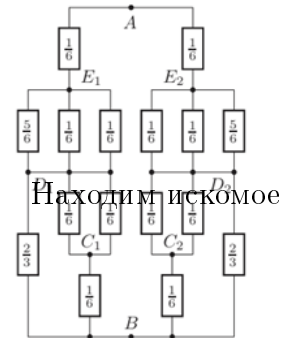
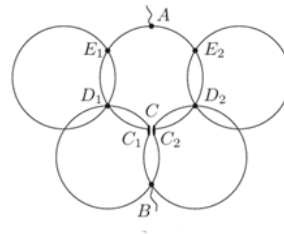
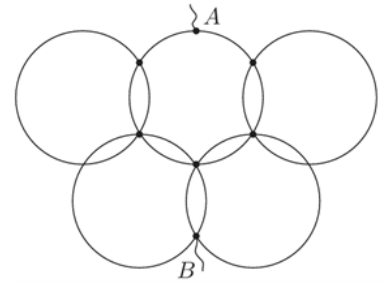
[8] При какой массе груза это возможно, если груз делит стержень в отношении 2:1 считая от левого конца?

Замечание. Трением пренебречь.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,0282.

Решение. 1) Концы палочки ударятся о плоскость одновременно, только если палочка всё



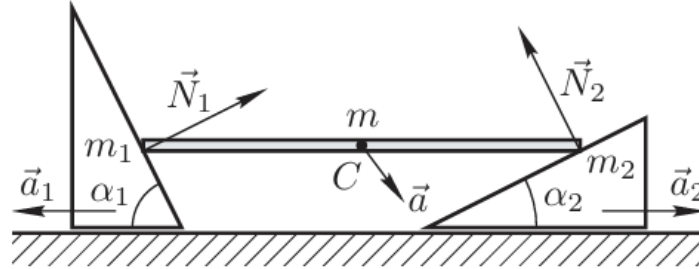
время будет опускаться горизонтально. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отсутствовало вращение палочки в вертикальной плоскости, в которой лежит палочка, то есть сумма моментов сил, действующих на палочку, была равна нулю (см рис):

$$N_1 \cos \alpha_1 \cdot 2 \cdot L - N_2 \cos \alpha_2 \cdot L = 0,$$

откуда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

где L — расстояние от грузика C до правого клина, а моменты вычислены относительно точки, к которой прикреплен груз.



Палочка на клиньях

2) Используя второй закон Ньютона, выразим ускорения a_1 и a_2 клиньев и горизонтальную составляющую a_x ускорения палочки:

$$a_1 = \frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1}, \quad a_2 = \frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2}, \quad a_x = \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m}.$$

Запишем горизонтальные смещения клиньев относительно палочки к моменту t :

$$\Delta x_1 = \frac{(a_1 + a_x) t^2}{2}, \quad \Delta x_2 = \frac{(a_2 - a_x) t^2}{2}.$$

3) Вертикальное смещение Δy палочки одно и то же для обоих концов:

$$\Delta x_1 \tan \alpha_1 = \Delta y = \Delta x_2 \tan \alpha_2,$$

откуда после подстановки выражений для $\Delta x_1, \Delta x_2$ и сокращения получаем

$$(a_1 + a_x) \tan \alpha_1 = (a_2 - a_x) \tan \alpha_2.$$

Таким образом, подставим выражения для ускорений:

$$\left(\frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1} + \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \tan \alpha_1 = \left(\frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2} - \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \tan \alpha_2,$$

Разделим все уравнение на N_1 , подставим выражение для N_2/N_1 и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{m} (\sin \alpha_1 - 2 \cos \alpha_1 \tan \alpha_2) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) = \frac{2 \cos \alpha_1 \tan^2 \alpha_2}{m_2} - \frac{\sin \alpha_1 \tan \alpha_1}{m_1}$$

Наконец, разделим уравнение на $\cos \alpha_1$ и выразим искомую массу:

$$m = \frac{(\tan \alpha_1 - 2 \tan \alpha_2) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}{\frac{2 \tan^2 \alpha_2}{m_2} - \frac{\tan^2 \alpha_1}{m_1}} \approx 28,2 \text{ г}$$

Ответ: 28,2 г