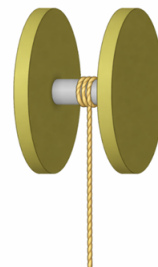




Решения задач для 11 класса

11.1. (7 баллов) Игрушка йо-йо является одной из разновидностей маятников. Она представляет из себя два одинаковых маховика радиуса $R = 3$ см, центры которых жестко соединены с концами легкого стержня радиуса $r = 1$ мм, причем оси маховиков совпадают с осью стержня. К середине стержня прикрепляется и наматывается нить длины $L = 1$ м, свободный конец нити фиксируется. Если отпустить игрушку, то она придёт в движение и будет разматывать нить, а при достижении нижней точки траектории, продолжая вращение по инерции, начнёт наматывать ее обратно, совершая колебательное движение.

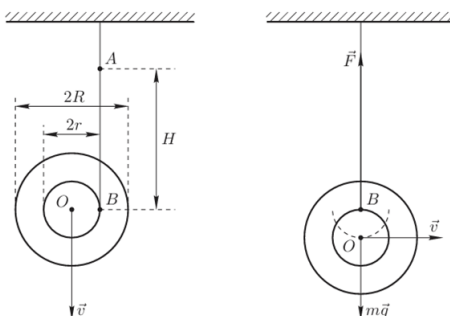


[1] Определить силу натяжения нити в нижней точке траектории йо-йо, если изначально нить была полностью смотана, а игрушку отпустили без начальной скорости.

Замечание. При решении считать, что маховик представляет собой цилиндр, а вся его масса $m = 50$ г сосредоточена на ободе. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$
(А.А. Черенков)

Ответ: 3 Н.

Решение.



1) При решении можно считать, что $r \ll R \ll L$. На рис. 1 изображён маятник перед и при прохождении нижней точки своей траектории. В силу условия $r \ll L$ можно пренебречь отклонением нити от вертикали и изменением потенциальной энергии маятника между указанными состояниями, то есть далее будем считать, что ось O маятника движется с некоторой постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом r с центром в точке B .

2) Пусть ω — угловая скорость вращения маятника, u — постоянная скорость точек обода маховика относительно его оси, тогда из уравнения кинематической связи

$$\frac{v}{r} = \omega = \frac{u}{R}$$

находим

$$v = u \cdot \frac{r}{R}. \quad (1)$$

Из условия $r \ll R$ следует, что $v \ll u$, поэтому можно пренебречь кинетической энергией поступательного движения центра масс маятника по сравнению с кинетической энергией вращательного движения маховика относительно центра масс и записать закон сохранения энергии в виде

$$2mgL = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2},$$

где учтено, что момент инерции маховика вычисляется как $\frac{mR^2}{2}$. Таким образом,

$$u^2 = 2gL. \quad (2)$$

Используя уравнения (1) и (2) совместно, выражаем

$$v^2 = 2gL \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось при прохождении маятником нижней точки окружности имеем

$$2m \cdot \frac{v^2}{r} = F - 2mg,$$

откуда с учётом выражения для скорости находим искомую силу:

$$F = 2mg \left(1 + \frac{2rL}{R^2} \right) \approx 3H.$$

11.2. (7 баллов) Детский лагерь находится недалеко от круглого карьера шириной $L = 30,0\text{м}$, заполненного родниковой водой глубиной $h = 1,5\text{м}$. На одном из берегов карьера находится обрыв высотой $H = 10,0\text{м}$.

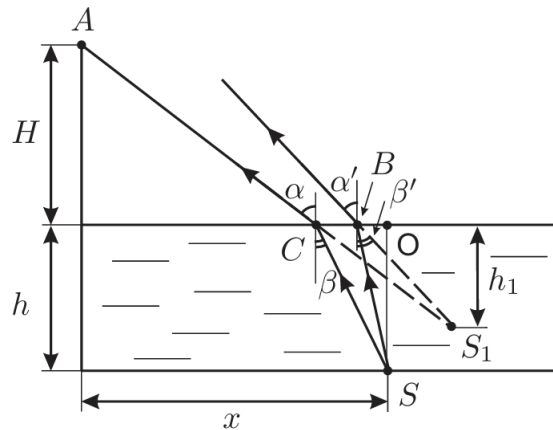
[2] Какой глубины будет казаться середина карьера, если встать на самый край обрыва?

Замечание. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,40 м.

Решение.



1) Человек, находящийся в точке A (см.рисунок), оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек B и C . Ему кажется, что лучи исходят не из точки S , а из точки S_1 , поэтому видимая глубина водоёма h_1 . Изменение направлений лучей на поверхности воды подчиняется закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n,$$

где n — показатель преломления воды, а углы $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ показаны на рисунке.

2) Пусть Δ — длина отрезка BC . Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке, следует, что

$$\Delta = h(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') = h_1(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha').$$

Углы α и α' , β и β' мало отличаются, поэтому, если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$ и $\beta - \beta' = \Delta\beta$, то

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для Δ , находим:

$$h_1 = h \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha}.$$

Запишем закон Снеллиуса для малых приращений углов:

$$\cos \alpha \Delta \alpha = n \cos \beta \Delta \beta,$$

откуда

$$h_1 = \frac{h \cos^3 \alpha}{n \cos^3 \beta} = \frac{h}{n} \frac{\cos^3 \alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{3/2}}.$$

3) Для угла α из рисунка находим:

$$\sin \alpha = \frac{x - OB}{\sqrt{(x - OB)^2 + H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}},$$

так как $OB \ll x$ при малых h . Осталось подставить полученное выражение для $\sin \alpha$ в формулу и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{3/2}}.$$

Учитывая, что по условию задачи $x = L/2$, приходим к окончательному ответу:

$$h_1 \approx 0,40 \text{ м}$$

11.3. (6 баллов) В экспериментальной установке используется длинная горизонтальная цилиндрическая трубка площадью поперечного сечения $S = 100 \text{ см}^2$, внутри которой находятся два поршня массами $M_1 = 2 \text{ кг}$ и $M_2 = 3 \text{ кг}$, которые могут перемещаться вдоль оси трубки практически без трения. Между поршнями заключён один моль кислорода O_2 , который можно считать идеальным газом. Установка помещена в камеру, где поддерживается внешнее давление в пол-атмосферы $p_0 = 0,5 p_{\text{атм}}$. К поршням снаружи прикладывают постоянные силы $F_1 = 600 \text{ Н}$ и $F_2 = 500 \text{ Н}$, направленные вдоль оси трубки навстречу друг другу. Газ находится в тепловом контакте с термостатом, поэтому его температура всё время остаётся постоянной и равной $T = 300 \text{ К}$.

[3] Определите установившееся расстояние между поршнями, после того как к ним приложили силы.

Замечание. При решении принять атмосферное давление равным $p_{\text{атм}} = 1 * 10^5 \text{ Па}$.

(А.А. Черенков)

Ответ: 2 м.

Решение.

В установившемся режиме система будет двигаться с ускорением, определяемым из соотношения

$$(M_1 + M_2 + m) a = F_1 - F_2.$$

где m - масса кислорода. Поскольку масса газа много меньше массы поршней, то можно считать, что

$$a = \frac{F_1 - F_2}{M_1 + M_2},$$

а давление p газа всюду постоянно и определяется из условия

$$M_1 a = -pS + p_0 S + F_1.$$

Отсюда

$$p = \frac{M_2 F_1 + M_1 F_2}{(M_1 + M_2) S} + p_0 = \frac{M_2 F_1 + M_1 F_2 + p_0 S (M_1 + M_2)}{(M_1 + M_2) S}.$$

Объём газа равен

$$V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{\nu RT S (M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2 + p_0 S (M_1 + M_2)},$$

где $\nu = 1$ моль, и установившееся расстояние между поршнями равно

$$x = \frac{V}{S} = \frac{\nu RT (M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2 + p_0 S (M_1 + M_2)} \approx 2 \text{ м.}$$

11.4. (8 баллов) В музее редкую рукопись решили защитить от яркого освещения. Для этого перед витриной установили пять одинаковых тонких стеклянных защитных экранов, расположив их параллельно друг другу. Свет от ламп падает практически перпендикулярно поверхности стёкол. Известно, что для одной такой стеклянной пластинки при нормальном падении света 8% энергии отражается, а 92% проходит через пластинку, то есть коэффициенты отражения и пропускания равны $R = 0,08$ и $T = 0,92$.

[4] Найдите коэффициент пропускания получившейся защитной установки.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,70.

Решение.

Основная трудность, возникающая при решении этой задачи, связана с тем, что свет многократно отражается от поверхностей пластинок внутри стопки. Поэтому для того, чтобы найти ответ, нужно получить рекуррентную формулу, показывающую, как изменяется коэффициент пропускания стопки из n пластинок при добавлении к ней ещё одной пластинки.

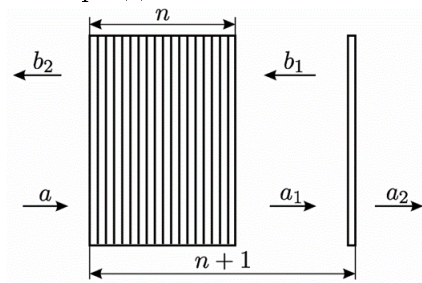


Рисунок. Стопка из стеклянных пластин.

Пусть стопка из n пластинок имеет коэффициент пропускания T_n . Добавим к ней ещё одну пластинку, получив, таким образом, «составную» стопку из $n + 1$ пластинок. Пусть на полученную стопку падает волна с интенсивностью a . Обозначим интенсивности волн, распространяющихся снаружи и внутри нашей «составной» стопки, так, как показано на рисунке. Учитывая, что $R_n = 1 - T_n$, получим систему уравнений:

$$a_2 = T a_1,$$

$$b_1 = (1 - T) a_1,$$

$$a_1 = T_n a + (1 - T_n) b_1,$$

$$b_2 = (1 - T_n) a + T_n b_1.$$

Решая её, найдём:

$$\frac{a}{a_2} = \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{T_n} + \frac{1-T}{T}.$$

Это и есть искомая рекуррентная формула. Из неё можно получить явную зависимость коэффициента пропускания T_n от числа пластинок n в стопке. Действительно, если пластинок в стопке всего две ($n+1=2$), то

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T} + \frac{1-T}{T}.$$

Далее, при $n+1=3$:

$$\frac{1}{T_3} = \frac{1}{T_2} + \frac{1-T}{T} = \frac{1}{T} + 2\frac{1-T}{T}.$$

Продолжая аналогичные выкладки, для стопки из n пластинок получим:

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{T} + (n-1)\frac{1-T}{T} = \frac{T+n(1-T)}{T},$$

откуда

$$T_n = \frac{T}{T+n(1-T)} = \frac{T}{T+nR}.$$

При $T = 0,92$, $n = 5$:

$$T_5 = \frac{0,92}{0,92 + 0,08 \cdot 5} \approx 0,70.$$

11.5. (8 баллов) После лабораторной работы в школе Маша осталась прибирать класс. На партах стояли мензурки, заполненные жидкостью плотностью $\rho_0 = 0,80 \text{ г/см}^3$, а на стенках мензурок были нанесены деления. Девочка заметила, что сферический пузырёк воздуха диаметром $d_1 = 3,0$ мм всплывает в жидкости, проходя каждую секунду по одному делению, а пузырек втрое большего диаметра за это же время проходил по три деления. Когда Маша бросила в жидкость сферическую металлическую дробинку плотностью $\rho_3 = 4,0 \text{ г/см}^3$ и диаметром $d_3 = 9,0$ мм, то она опускалась на дно, проходя по три деления каждые полсекунды. Затем она взяла шарик для пинг-понга диаметром $d_4 = 3,0$ см и плотностью $\rho_4 = 0,08 \text{ г/см}^3$ и опустила его на дно мензурки.

[5] С какой скоростью будет всплывать шарик, если деления мензурки нанесены с шагом $l = 5,0$ см?

Замечание. При решении считать, что сила вязкого трения жидкости зависит от скорости и диаметра шарика по степенному закону, который одинаков для всех тел. (А.А. Черенков)

Ответ: 0,5 м/с.

Решение.

1) Прежде всего заметим, что все тела в задаче за равные промежутки времени проходят равные расстояния, а значит они движутся равномерно. Тогда скорости первого и второго пузырька, а также дробинки соответственно равны:

$$v_1 = l/t \quad v_2 = 3v_1 \quad v_3 = 2v_2$$

где t равно 1 секунде.

2) При движении шарика в жидкости на него действуют сила тяжести F_T , направленная вниз, сила Архимеда F_A , направленная вверх, и сила вязкого трения $F_{\text{тр}}$, зависящая, как это следует из условия задачи, от скорости и от диаметра шарика. Две первые силы являются объёмными. Это значит, что их разность пропорциональна разности $\rho - \rho_0$ (ρ — плотность шарика) и объёму шарика, то есть кубу его диаметра d :

$$|F_T - F_A| = A |\rho - \rho_0| d^3.$$

Здесь A — коэффициент пропорциональности. Предположим, что сила вязкого трения зависит от диаметра шарика d и его скорости v следующим образом:

$$F_{\text{тр}} = B d^n v^m,$$

где B — коэффициент пропорциональности, n и m — неизвестные показатели степени. При движении с постоянной скоростью разность сил тяжести и Архимеда равна по величине силе вязкого трения. Тогда для пузырька диаметром d_1 имеем:

$$A \rho_0 d_1^3 = B d_1^n v_1^m,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt[m]{\frac{A}{B} \rho_0 d_1^{3-n}}.$$

Аналогично, для пузырька втрое большего диаметра получаем

$$v_2 = \sqrt[m]{\frac{A}{B} \rho_0 (3d_1)^{3-n}} = 3v_1 = 3 \sqrt[m]{\frac{A}{B} \rho_0 d_1^{3-n}},$$

откуда следует уравнение

$$3^{(3-n)/m} = 3^1, \quad \text{или} \quad 3 - n = m.$$

Далее, для дробинки диаметром d_3 , учитывая, что $v_3 = 2v_2$ и $\rho_3 = 5\rho_0$, получаем:

$$v_3 = \sqrt[m]{\frac{A}{B} (\rho_3 - \rho_0) d_3^{3-n}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B} \cdot 4\rho_0 d_3^{3-n}} = 2 \sqrt[m]{\frac{A}{B} \rho_0 d_0^{3-n}},$$

откуда находим, что $m = 2$. Зная m , определяем, что $n = 1$. Значит, зависимость $F_{\text{тр}}(d, v)$ имеет следующий вид:

$$F_{\text{тр}} = B d v^2.$$

Теперь можно найти скорость u , с которой будет всплывать шарик для пинг понга. Учитывая, что его плотность равна $\rho_4 = \frac{1}{10}\rho_0$, а диаметр $d_4 = 10d_1$ получаем:

$$u = \sqrt{\frac{A}{B} (\rho_0 - \rho_4) d_4^2} = \sqrt{\frac{A}{B} \left(\rho_0 - \frac{1}{10}\rho_0 \right) (10d_1)^2} = \sqrt{90 \frac{A}{B} \rho_0 d_1^2} = \sqrt{90} v_1 = \sqrt{90} \frac{l}{t} \approx 47,4 \text{ см/с}.$$

Округляем.