



Решения задач для 11 класса

11.1. (9 баллов) На детской площадке школьники играли в снежки. Петя, стоя на горке высотой $H = 3,00$ м, бросил снежок с начальной скоростью $v = 10,0$ м/с под углом $\alpha = 60,0^\circ$ к горизонту. В этот же момент с поверхности земли свой снежок вдогонку бросил Юра, находясь на расстоянии $L = 5,00$ м от горки.

[1] С какой минимальной скоростью и под каким углом должен был бросить снежок Юра, чтобы снежки столкнулись?

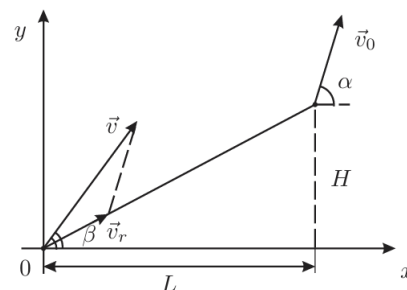
Замечание. При решении считать, что начальные скорости снежков лежат в одной вертикальной плоскости, сопротивлением воздуха пренебречь. (А.А. Черенков)

Ответ: 8,25; 67,0.

Решение. 1) Оба снежка движутся с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$. Для описания их движения введём декартову систему координат так, как показано на рисунке. Пусть Юра бросил снежок под углом β к горизонту со скоростью v . Тогда уравнения движения снежков в проекции на оси координат:

$$\begin{cases} x_1(t) = L + v_0 t \cos \alpha \\ y_1(t) = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = vt \cos \beta \\ y_2(t) = vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$



2) Если через промежуток времени t снежки столкнутся, то можно приравнять их координаты:

$$vt \cos \beta = L + v_0 t \cos \alpha,$$

$$vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этих уравнений найдём

$$v = v_0 \frac{\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha}{\sin \beta - \frac{H}{L} \cos \beta},$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \left(\frac{\frac{H}{L} - tg\alpha}{\frac{H}{L} - tg\beta} - 1 \right)^{-1}.$$

Время движения до столкновения удобно выразить через скорость $\vec{v}_r$ движения одного камня относительно другого. Так как ускорения снежков одинаковые, то относительная скорость постоянна, и время выражается следующим образом:

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_r}.$$

При фиксированных величине и направлении вектора $\vec{v}_0$ и заданном направлении вектора $\vec{v}$ из векторного треугольника скоростей, показанного на рисунке, видно, что меньшим v_r соответствует меньшая скорость v . Таким образом, минимальной скорости v соответствует минимальное значение v_r и, следовательно, максимальное время t . Ещё одно условие ограничивает возможность столкновения камней. Камень, пущенный вдогонку, должен удалиться от начала

координат по горизонтали на расстояние, большее L . Дальность его полёта равна $v^2 \sin 2\beta / g$. Поэтому должно быть обеспечено условие

$$v^2 \sin 2\beta \geq Lg.$$

Итак, нужно найти такие значения v и β , которые удовлетворяют равенству (1), неравенству (3) и обеспечивают наибольшее значение (2). Подставляя выражение (1) в (3), получим неравенство

$$2 \frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 \operatorname{tg} \beta - \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{H}{L} \right)^2 \geq 0.$$

Обозначив

$$\frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 = a$$

и $\operatorname{tg} \beta = \xi$, получим

$$\xi^2 - 2 \left(\frac{H}{L} + a \right) \xi + \frac{H^2}{L^2} \leq 0.$$

Это неравенство выполняется, если

$$\frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \leq \xi \leq \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}}.$$

Как видно из формулы (2) при $\alpha = 60^\circ$, большие значения t обеспечиваются большими значениями $\xi = \operatorname{tg} \beta$. Поэтому нужно выбрать для ξ большее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при } \alpha = 60^\circ.$$

Таким образом, подставляя численные значения в выведенные формулы, находим

$$\beta \approx 67,0^\circ, \quad v \approx 8,25 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8,25; 67,0°

11.2. (6 баллов) На стройке рабочим было поручено протянуть кабель линейной плотности $\rho = 1,0$ кг/м с верхних этажей на нижние. Кабель намотан на катушку радиуса $R = 20,0$ см, имеющей момент инерции $I = 0,20$ кг · м² относительно своей оси. На верхнем этаже катушку закрепляют так, чтобы она могла свободно вращаться вокруг своей оси без трения при размотке кабеля.

[2] Какое ускорение приобретет кабель, после того как его отпустят без начальной скорости, и он разматывается на $L = 3,0$ м?

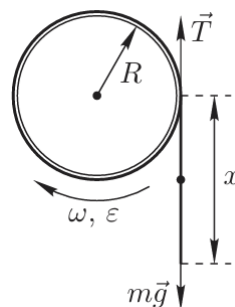
Замечание. При решении толщиной кабеля пренебречь.

(А.А. Черенков)

Ответ: 3,7.

Решение.

Пусть T — сила натяжения кабеля в верхней точке его вертикальной части (см рис), ε — угловое ускорение катушки, $m = \rho x$ — масса свисающей части кабеля, $I_x = \rho (L - x) R^2$ — момент инерции кабеля, намотанного на катушку. Тогда второй закон Ньютона для свисающей части кабеля, уравнение вращательного движения катушки с намотанным на неё кабелем и кинематическая связь имеют соответственно вид



$$ma = mg - T, \quad (I + I_x) \varepsilon = TR, \quad a = \varepsilon R.$$

Решая записанную систему, получаем

$$a(x) = \frac{gR^2 \rho x}{I + R^2 \rho L}.$$

Тогда к моменту, когда кабель разматывается на L метров, его ускорение составит:

$$a(L) = \frac{gR^2 \rho L}{I + R^2 \rho L} \approx 3,7 \text{ м/с}^2$$

Ответ: 3,7

11.3. (5 баллов) У семьи Ивановых есть уютный загородный дом, в котором они часто проводят выходные зимой. В один из таких дней, когда на улице была температура $t_1 = -25^\circ \text{С}$, они заметили, что комнатный термометр показывает температуру $T_1 = 10^\circ \text{С}$. Семья решила, что переедет жить в дом, когда наступит потепление и дома будет поддерживаться постоянная температура $T_2 = 20^\circ \text{С}$. Отопление в доме работает стабильно: батареи всегда нагреваются до $\tau = 80^\circ \text{С}$, независимо от погоды на улице.

[3] Какая температура должна быть на улице, чтобы Ивановы смогли переехать жить в дом?

(А.А. Черенков)

Ответ: -10.

Решение. Пусть T и t — текущие температуры в доме и на улице соответственно, тогда мощности потоков тепла от батарей в комнату и из дома на улицу составляют

$$P = \alpha(\tau - T) \quad \text{и} \quad N = \beta(T - t),$$

где α и β — некоторые константы. В установившемся режиме эти мощности равны между собой, поэтому для первого и второго случаев можно записать соответственно

$$\alpha(\tau - T_1) = \beta(T_1 - t_1) \quad \text{и} \quad \alpha(\tau - T_2) = \beta(T_2 - t_2),$$

откуда

$$t_2 = \tau - \frac{(\tau - T_2)(\tau - t_1)}{\tau - T_1} = -10^\circ \text{С}$$

Ответ: -10°С

11.4. (7 баллов) Однажды Вова зашел в магазин головных уборов и примерил смешную высокую шляпу. Когда он ее надел, оказалось, что верхний край шляпы выше уровня глаз Вовы на $h = 25 \text{ см}$. Он подошел к плоскому зеркалу, стоящему на полу, и заметил, что не видит в отражении пол, хотя себя он видит целиком.

[4] На каком при этом расстоянии от пола Вова видит верхушку шляпы, если он перестал видеть свои глаза в зеркале, когда отошел от него в 2,5 раза дальше?

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,17.

Решение.

Вова не увидел в зеркале пола, значит, луч, идущий от низа ботинок и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, а до отражения шёл горизонтально на очень малой высоте над полом. Это возможно, только если плоскость зеркала составляет некий угол φ с вертикалью. Исходя из этого построим изображение Вовы AB и шляпы BC в зеркале (рис.1). Изображение $B'C'$ шляпы образует угол 2φ с вертикалью, следовательно,

$$x = h \cos 2\varphi = h \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

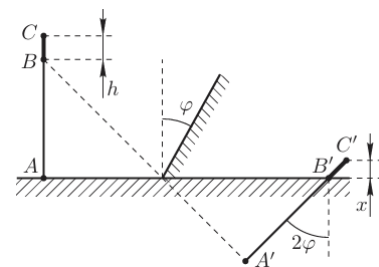


Рисунок 1

Для нахождения угла φ рассмотрим дополнительно положение, когда Вова перестал видеть себя ниже уровня глаз (рис. 2), отойдя от зеркала на расстояние $L = nl$, где l — расстояние от него до зеркала в первом случае, $n = 2,5$. Во втором положении луч, идущий от глаза и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, так как в противном случае мальчик увидел бы своё изображение ниже уровня глаз. Поскольку этот луч возвращается в исходную точку, он перпендикулярен зеркалу. Пусть H — высота глаз Вовы над уровнем пола, тогда из геометрических соображений в первом и втором положениях выражаем

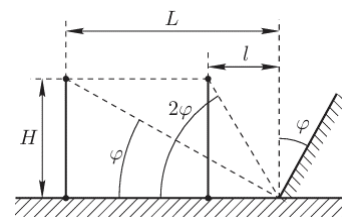


Рисунок 2

$$\frac{H}{l} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{L} = \frac{H}{nl},$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 1 - \frac{2}{n}.$$

Подставив это выражение в формулу для x , находим

$$x = \frac{h}{n-1} \approx 17 \text{ см.}$$

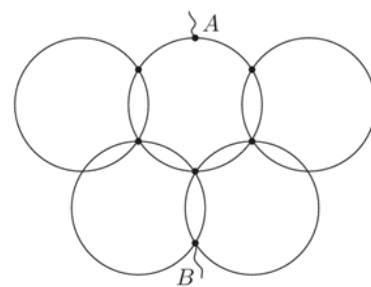
Ответ: 17 см

11.5. (6 баллов) К открытию Олимпийских игр любитель-электрик собрал светящуюся гирлянду в форме олимпийской эмблемы из пяти одинаковых колец сопротивлением $r = 33 \text{ Ом}$. Кольца были спаяны в местах, отмеченных на рисунке жирными точками. Места спайки и точка A разделяют центральное кольцо на 6 равных частей.

[5] Какое сопротивление имеет гирлянда между точками A и B ?

Замечание. Сопротивлением в местах спайки пренебречь.

(А.А. Черенков)



Ответ: 7.

Решение. В силу симметрии схемы относительно оси AB узел C можно разделить на два (см рис). Изобразим эквивалентную схему (см рис), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах r . Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи.

$$R_{E_1 D_1} = R_{E_2 D_2} = \frac{1}{\frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{5}r} = \frac{5}{66}r$$

$$R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}r} + \frac{1}{\frac{1}{12}r + \frac{1}{6}r}} = \frac{2}{11}r.$$

$$R = \frac{1}{2}(R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}) = \frac{7}{33}r = 7 \text{ O}_M.$$

11.6. (6 баллов) На факультативном занятии по физике Алексей познакомился с решением задачи об определении сопротивления между точками А и В бесконечной электрической цепи (см. рисунок). Алексей решил экспериментально проверить полученный ответ, собрав конечную схему с использованием только сопротивлений в 10 Ом .

Ответ: 12.

Решение. 1) Заметим, что цепь состоит из блоков сопротивлений $R - 3R - 2R$, соединенных последовательно. Далее каждый следующий блок присоединяется параллельно к сопротивлению $3R$. Пусть мы знаем сопротивление R_n цепочки из n блоков. Тогда присоединяя к цепи новый блок получим, что сопротивления R_n и $3R$ соединены параллельно, их общее сопротивление $R_0 = \frac{3RR_n}{3R+R_n}$. Этот участок соединен последовательно с сопротивлениями R и $2R$, значит:

$$R_{n+1} = R + 2R + R_0 = 3R \left(1 + \frac{R_n}{3R + R_n} \right)$$

2) При неограниченном увеличении числа присоединенных к цепи блоков получим, что $R_n, R_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_\infty$, где R_∞ - сопротивление всей цепи. Тогда устремляя n к бесконечности в (1), получаем уравнение для определения R_∞ :

$$R_\infty = 3R \left(1 + \frac{R_\infty}{3R + R_\infty} \right)$$

Разделим все уравнение на $3R$, числитель и знаменатель дроби в скобках разделим на R_∞ и введем замену $x = \frac{3R}{R_\infty}$ 0 Получаем:

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1+x}$$

Домножим уравнение на $x(x+1) \neq 0$:

$$x + 1 = x^2 + x + x$$

После преобразований получаем квадратное уравнение для определения x :

$$x^2 + x - 1 = 0$$

С учётом, что $x > 0$, получаем

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

По определению $x = \frac{3R}{R_\infty}$, поэтому

$$R_\infty = \frac{3R}{x} = \frac{3R}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{6R}{\sqrt{5}-1}.$$

Домножая числитель и знаменатель на $(\sqrt{5} + 1)$, имеем

$$R_\infty = \frac{3R}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

3) Воспользуемся рекуррентным соотношением для R_n , чтобы найти эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n блоков. При $n = 1$ имеем один блок, чье сопротивление $R_1 = 6R$. Заметим, что $R_1/R_{\text{inf}} \approx 1,23$, то есть погрешность больше, чем 20%. Далее находим, что $R_2 = 5R$, причем $R_1/R_{\text{inf}} \approx 1,03$, то есть погрешность 3%. Таким образом, двух блоков достаточно, чтобы удовлетворить условию задачи. Каждый такой блок состоит из сопротивлений $R - 3R - 2R$, что эквивалентно 6 сопротивлениям по R . Значит, всего понадобится 12 сопротивлений.

Ответ: 12

11.7. (7 баллов) Через вершины правильного треугольника ABC со стороной 20 см проведены перпендикулярно его плоскости прямые линии, вдоль которых могут бегать 3 разноцветные лампочки (красная, зеленая и синяя). Известно, что в начальный момент времени все лампочки находились в вершинах треугольника ABC и имели одинаковые скорости 0,50 м/с, направленные в одном направлении. Далее красная лампочка продолжала двигаться с постоянной скоростью, зеленая и синяя — равноускоренно, соответственно с ускорениями 2,0 м/с² и -3,0 м/с².

[7] Определите скорость центра масс треугольника, образуемого лампочками, в момент времени 3,0 секунды.

(А.Б. Яковлев)

Ответ: -0,5.

Решение. 1) Пусть масса каждой лампочки равна m . Все лампочки движутся строго вертикально, поэтому центр масс по горизонтали неподвижен, и нас интересует только вертикальная составляющая его скорости.

2) Сначала все три лампочки поднялись на высоту h_0 , при этом в конце подъема все три лампочки имеют одинаковую скорость $v_0 = 0.5$ м/с, направленную вверх.

3) Опишем дальнейшее движение лампочек. Для этого начнем отсчет времени заново с нуля и направим ось Oz вертикально вверх. Уравнения движения лампочек:

$$\begin{cases} z_1(t) = h_0 + v_0 t \\ z_2(t) = h_0 + v_0 t + \frac{a_2 t^2}{2} \\ z_3(t) = h_0 + v_0 t + \frac{a_3 t^2}{2} \end{cases}$$

где индексы 1,2,3 относятся к красной, синей и зеленой лампочке соответственно.

4) Запишем выражение для нахождения координаты z_c центра масс:

$$z_c(t) = \frac{mz_1(t) + mz_2(t) + mz_3(t)}{3m} = \frac{z_1(t) + z_2(t) + z_3(t)}{3}.$$

Скорость центра масс — это производная его координаты по времени:

$$v_c(t) = \dot{z}_c(t) = \frac{\dot{z}_1(t) + \dot{z}_2(t) + \dot{z}_3(t)}{3} = \frac{1}{3}(v_0 + (v_0 + a_2t) + (v_0 + a_3t)) = v_0 + \frac{(a_2 + a_3)t}{3}$$

Из условия задачи следует, что нас интересует скорость при $t = 3\text{с}$:

$$v_c(3) = v_0 + \frac{3(a_2 + a_3)}{3} = v_0 + (a_2 + a_3) = 0,5 + 2 - 3 = -0,5 \quad \text{м/с}$$

Ответ: -0,5 м/с