



Решения задач для 9 класса

9.1. (5 баллов) Маша вместе с классом поехала на экскурсию в город Гусь-Хрустальный, где им показали процесс производства изделий из стекла. В одном из цехов Маша увидела, что в поступившем в обработку стеклянном бруске имелся достаточно большой воздушный пузырь в виде шара. При взвешивании бруса на динамометре его вес равен $3,0 \cdot 10^3$ Н, а при погружении в воду — 1300 Н.

[1] Определите объём пузыря в бруске.

Замечание. Массу воздуха в пузыре считать пренебрежимо малой, влияние воздуха при взвешивании не учитывать. Плотность стекла принять равной $2,5 \cdot 10^3$ кг/м³. (Л.С.Ласкавый)

Ответ: 0,05.

Решение. В случае, когда брусок взвешивается в воздухе, его вес равен силе тяжести, откуда можно найти массу бруса

$$P_1 = mg$$

$$m = P_1/g$$

С учётом

$$m = \rho c V_{\text{вещ}}$$

объём, занимаемый веществом (то есть стеклом), равен

$$V_{\text{вещ}} = m/\rho c$$

$$V_{\text{вещ}} = P_1/\rho c g$$

При взвешивании бруса, опущенного в воду, сила тяжести компенсируется силой упругости со стороны динамометра (равной весу) и силой Архимеда со стороны жидкости, то есть

$$mg = P_2 + F_{\text{арх}}$$

Объём бруса — сумма объёма вещества (стекла) и объёма пузыря:

$$V = V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}}$$

Подставив выражение для силы Архимеда, получим

$$mg = P_2 + \rho_{\text{в}} g (V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}})$$

Выражая объём пузыря, получим

$$V_{\text{пуз}} = (mg - P_2)/\rho_{\text{в}} g - V_{\text{вещ}}$$

Заменив объём вещества и массу выражениями для них, получим в итоге:

$$V_{\text{пуз}} = (P_1 - P_2)/\rho_{\text{в}} g - P_1/\rho c g = (3000 - 1300)/(1000 \cdot 10) - 3000/(2500 \cdot 10) = 0,05 \text{ м}^3$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, ответ остаётся без изменений.

Ответ: $V_{\text{пуз}} = 0,05 \text{ м}^3$.

9.2. (7 баллов) В школьном кружке по физике зимой изучали реактивное движение. Учитель решил наглядно продемонстрировать физические принципы в действии. Для этого он взял бочку массой $M = 5 \text{ кг}$ и площадью основания $S = 2 \text{ м}^2$, расположил ее на покрытой льдом дорожке и заполнил водой до уровня $H = 1 \text{ м}$. В бочке у самого основания было отверстие, закрытое пробкой, с сечением $\sigma = 15 \text{ см}^2$. Сразу же после извлечения пробки под напором воды бочка пришла в движение с ускорением $a = 1 \text{ мм/с}^2$.

[2] Оцените коэффициент трения между бочкой и поверхностью дорожки.

Замечание. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,001.

Решение. 1) Ускорение a бочки возникает за счёт разницы между реактивной силой тяги $F_{\text{тяг}}$ струи воды, выливающейся из отверстия, и силой трения скольжения $F_{\text{тр}}$ бочки о поверхность стола.

2) За малый промежуток времени Δt через отверстие выльется вода массой $\Delta m = \rho \sigma v \Delta t$. Пренебрегая потерями энергии из-за явления вязкости и изменением кинетической энергии оставшейся в бочке воды, запишем закон сохранения энергии системы:

$$\Delta m g H = \frac{\Delta m}{2} v^2,$$

откуда

$$v^2 = 2gH.$$

Из закона изменения импульса вытекающей воды $\Delta m v = F \Delta t$, подставив выражение для Δm , найдём силу давления $F = \rho \sigma v^2 = 2\rho g H \sigma$, которая по третьему закону Ньютона равна искомой реактивной силе тяги, то есть $F_{\text{тяг}} = F = 2\rho g H \sigma$.

3) Сразу после выскакивания пробки масса воды в сосуде $m = \rho H S$, сила трения между сосудом и столом $F_{\text{тр}} = \mu (M + m) g$. Из второго закона Ньютона

$$(M + m) a = F_{\text{тяг}} - F_{\text{тр}}$$

находим

$$\mu = \frac{2\rho H \sigma}{M + \rho H S} - \frac{a}{g} \approx 0,001.$$

Ответ: 0,001

9.3. (6 баллов) В школьной лаборатории Наталья проводит эксперимент по изучению процессов нагревания и охлаждения тел. Она кладёт нагретый стальной цилиндр радиусом и высотой 5,0 см основанием на толстый слой льда при температуре плавления. В результате образовалась цилиндрическая лунка радиуса 5,5 см. Температура цилиндрика равна $26,2^\circ \text{ С}$.

[3] Рассчитайте, сколько воды выплеснется из образовавшейся лунки.

Замечание. Считать, что потерь энергии в атмосферу не происходит, вся энергия цилиндрика идёт на нагрев льда. Удельная теплоёмкость стали равна $0,50 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, плотность стали 7800 кг/м^3 , льда $0,90 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды $1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

(Л.С. Ласкавый)

Ответ: 0,098.

Решение. Потерями энергии в атмосферу пренебрегаем. Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + \dots + Q_n = 0$$

Плавление льда обеспечивается за счёт количества теплоты, отдаваемого цилиндриком, так что:

$$Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$$

$$Q_2 = c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})$$

Таким образом, уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Раскроем массу цилиндрика. Объём цилиндрика:

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

Тогда масса

$$m_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h$$

Тогда новый вид уравнения теплового баланса:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Выразим массу воды (равную массе растаявшего льда), в итоге:

$$m_{\text{л}} = -c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) / \lambda$$

Определим глубину лунки. Для этого найдём объём расплавившегося льда и через объём цилиндра найдём его высоту. Объём лунки:

$$V_{\text{лунк}} = \pi R^2 H$$

С другой стороны:

$$m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} V_{\text{лунк}}$$

$$V_{\text{лунк}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{л}}$$

Тогда глубина лунки:

$$H = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}} \pi R^2}.$$

Подставляя выражение для массы льда, получим

$$H = - \frac{c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda \rho_{\text{л}} R^2}.$$

Вычисляя глубину лунки, получим:

$$H = - \frac{500 \cdot 7800 \cdot 0.05^2 \cdot 0.05 \cdot (0 - 26,2)}{3.3 \cdot 10^5 \cdot 900 \cdot 0.055^2} \approx 0.01422 \text{ м.}$$

Отсюда видно, что высота лунки меньше чем высота цилиндрика. Объём части цилиндрика, находящейся в лунке — это цилиндр радиусом r и высотой H :

$$V_{\text{ст_в_лунке}} = \pi \cdot r^2 \cdot H$$

объём в лунке^{**, **} который может занять вода:

$$V_{\text{воды_в_лунке}} = V_{\text{лунк}} - V_{\text{ст_в_лунке}} = \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Находим объём воды, получившейся из льда $V_{\text{воды}}$

$$V_{\text{воды}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{в}}$$

Разница между ним и объёмом оставшейся воды — это и есть объём выплеснувшейся воды.

$$V_{\text{вып}} = V_{\text{воды}} - V_{\text{воды_в_лунке}} = V_{\text{воды}} - \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Тогда

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{вып}}$$

Подставляем выражения для объема и получаем

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} \left(\frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{\pi m_{\text{л}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} \pi R^2} \right) = m_{\text{л}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} R^2} \right) =$$

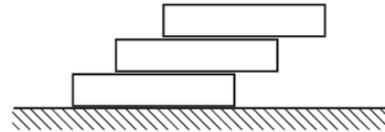
$$= - \frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right)$$

$$m_{\text{вып}} = - \frac{7800 \cdot 500 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot 0,05 (0 - 26,2)}{3,3 \cdot 10^5} \left(1 - \frac{1000}{900} \left(1 - \left(\frac{0,05}{0,055} \right)^2 \right) \right) \approx 0,09815$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$.

Ответ: $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$.

9.4. (7 баллов) Однажды на школьный урок по физике зашел фокусник, чтобы прорекламировать цирк, в котором он выступает. Фокусник взял несколько деревянных брусков плотностью $\rho = 520 \text{ кг/м}^3$, длиной $L = 10 \text{ см}$, шириной $B = 5 \text{ см}$, высотой $H = 3 \text{ см}$ и начал класть их друг на друга, как показано на картинке. При этом каждый новый брусок он сдвигал на максимальное расстояние вдоль предыдущего бруска, не нарушая равновесия всей конструкции. В итоге самый верхний брусок оказался сдвинут относительно нижнего на 10 см .



[4] Сколько брусков для этого потребовалось фокуснику?

(А.А. Черенков)

Ответ: 5.

Решение. Координаты отсчитываются от края верхнего бруска. Брусок с номером i сдвинут относительно $(i + 1)$ -го на величину Δ_i . Координата x_{ci} центра масс стопки брусков, лежащих выше $(i + 1)$ -го, определяется соотношением

$$x_{ci} = \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i),$$

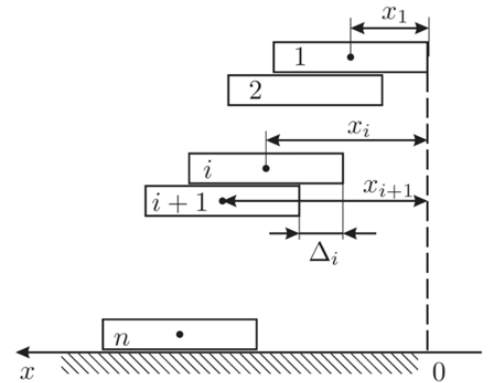
поскольку все бруски имеют одинаковые массы. Условие равновесия брусков для предельных сдвигов можно записать так:

$$x_{ci} = x_{i+1} - \frac{L}{2}, \quad \text{или} \quad x_{i+1} = \frac{L}{2} + \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i).$$

Находим смещение i -го бруска:

$$\Delta_i = \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i) - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1})$$

Преобразуем это выражение, используя выражение для x_{i+1} , полученное выше:



$$\begin{aligned}\Delta_i &= -\frac{1}{(i-1)i} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) + \frac{x_i}{i} = \\ &= \frac{1}{i} \left(x_i - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) \right) = \frac{L}{2i}.\end{aligned}$$

Итак, смещения брусков, начиная с верхнего, образуют последовательность

$$\Delta_i = \frac{L}{2i} = \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{6}, \dots$$

Найдём смещение нижнего бруска с номером n относительно верхнего:

$$\Delta(n) = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

В задаче требуется подобрать такое n , что $\Delta(n) \geq L$. Находя суммы для $n = 2, 3, 4$, получаем

$$\Delta(2) = 0,75L; \quad \Delta(3) = 0,92L; \quad \Delta(4) = 1,04L > L.$$

Таким образом, требованию задачи удовлетворяет стопка из пяти брусков, причем последний брусок был сдвинут на расстояние меньшее, чем предельный для него сдвиг.

Ответ: 5

9.5. (7 баллов) В безветренный день Паша отправился на озеро ловить рыбу. Выплыв на середину озера на лодке длиной $L = 2,0$ м и массой $m = 10,0$ кг, он решил перейти с носа на корму. Лодка при этом пришла в движение, испытывая силу сопротивления со стороны воды $F = -ku$, где u — скорость лодки, k — известный коэффициент пропорциональности. Масса Паши $M = 80,0$ кг.

[5] Найдите смещение S_0 лодки к моменту полной остановки при отсутствии силы сопротивления ($k = 0$)

[6] Найдите смещение S лодки к моменту полной остановки при наличии силы сопротивления ($k = 0,50$ кг/с)

Замечание. При решении считать, что лодка перемещается вдоль одного направления.

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,8.

Ответ: 0.

Решение. 1. Воспользуемся свойством сохранения положения центра масс изначально покоящейся системы при отсутствии внешних сил (внутренние силы не изменяют положение центра масс в силу третьего закона Ньютона). Изменение координаты центра масс системы из 2 тел массами m_1, m_2 определяется через их соответствующие смещения $\Delta x_1, \Delta x_2$, следующим образом:

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}.$$

Применим эту формулу к нашему случаю:

$$\Delta x_c = \frac{m \cdot (-S_0) + M \cdot (L - S_0)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{ML}{M + m} \approx 1,8 \text{ м}$$

2. Пусть v и u — соответственно скорости человека и лодки относительно земли в некоторый мо-

мент времени, x — координата лодки в тот же момент времени, тогда закон изменения импульса ($\Delta p / \Delta t = F$) для системы, состоящей из человека и лодки, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu) = -ku,$$

откуда после подстановки $u = \Delta x / \Delta t$ находим

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu + kx) = 0.$$

Последнее уравнение означает, что величина в скобках не изменяется со временем, то есть её начальное и конечное значения равны между собой:

$$Mv_{\text{нач}} + mu_{\text{нач}} + kx_{\text{нач}} = \text{const} = Mv_{\text{кон}} + mu_{\text{кон}} + kx_{\text{кон}}.$$

Поскольку $v_{\text{нач}} = u_{\text{нач}} = v_{\text{кон}} = u_{\text{кон}} = 0$, после подстановки скоростей и деления на k получим $x_{\text{кон}} = x_{\text{нач}}$, то есть платформа вернётся в прежнее положение, а искомое смещение $S = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = 0$.

Ответ: 1,8 м; 0 м

9.6. (6 баллов) На уроке по физике, посвященному электрическим цепям, школьники проводили лабораторную работу. Ване достался комплект оборудования, в котором уже была собрана электрическая цепь с двумя выводами, состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов. После того как Ваня подключил к выводам цепи вольтметр, он показал напряжение $U_0 = 20,0$ В. Затем он подключил к выводам цепи резистор с сопротивлением $R = 5,0$ Ом, и вольтметр стал показывать напряжение $U_1 = 10,0$ В.

[7] Какое напряжение будет показывать вольтметр, если к цепи подключить еще один такой же резистор?

Замечание. При решении считать вольтметр идеальным.

(А.А. Черенков)

Ответ: 6,7.

Решение. 1) Любая цепь, имеющая два вывода и состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов, эквивалентна одному неидеальному источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r .

При подключении к цепи только идеального вольтметра ток через эквивалентный источник не течёт, поэтому $\mathcal{E} = U_0$.

2) Пусть теперь к цепи подключен один резистор. Применим закон Ома для полной цепи и найдем силу тока:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение на резисторе:

$$U_1 = I_1 \cdot R = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \cdot R = \frac{U_0 R}{R + r}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R;$$

2) Рассмотрим теперь случай, когда к цепи подключили второй резистор. Так как резисторы подключены параллельно, а их сопротивления равны, то их общее сопротивление $R/2$. Таким образом, по закону Ома для полной цепи можно найти ток:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + r}$$

Тогда по закону Ома для участка цепи, найдем напряжение на резисторах:

$$U_2 = I_2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + r} \cdot \frac{R}{2} =$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R}{2} + \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R} \cdot \frac{R}{2} = \frac{U_0 U_1}{2U_0 - U_1} \approx 6,7B$$

Ответ: 6,7 В

9.7. (7 баллов) В школьной лаборатории изучали оптические системы. Учитель собрал установку, состоящую из двух плоских зеркал с общей стороной, образующих прямой двугранный угол. Между зеркалами расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 10$ см и диаметром $d = 20$ см. Линза касается обоих зеркал, а ее главная оптическая ось проходит через линию пересечения зеркал перпендикулярно ей.

[8] Найти расстояние до линзы, на котором будет находиться изображение маленькой лампочки, расположенной на главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 15$ см от ее центра.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,05.

Решение. 1) Из геометрических соображений следует, что предмет S находится перед передним фокусом F линзы, а задний её фокус совпадает с точкой касания зеркал C (рисунок 1). Интересующие нас световые лучи сначала проходят через линзу, затем отражаются от пары зеркал, после чего снова проходят через линзу в обратном направлении. Для нахождения изображения S' вычислим положения промежуточных изображений, даваемых по отдельности линзой и зеркалами по мере прохождения лучей через систему.

Для иллюстрации рассуждений на рис.2 показаны продолжения лучей, создающих промежуточные изображения S_1 , S_2 и S_3 и вспомогательные построения для поиска изображений. Точки O , A и B — это соответственно оптический центр линзы и её точки касания с каждым из зеркал.

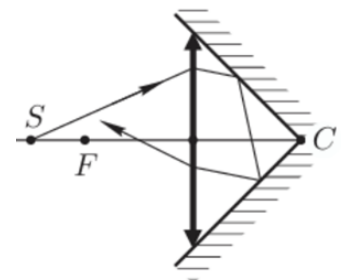


Рис. 1

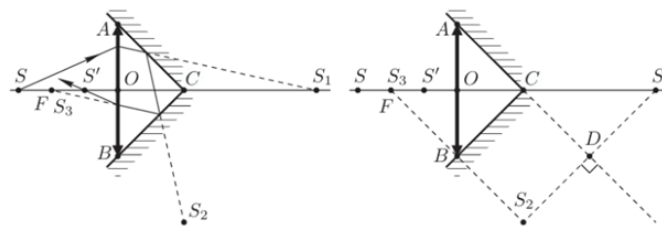


Рис. 2

2) Пусть a и b — расстояния от линзы до предмета и до изображения соответственно, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

откуда

$$b = \frac{af}{a - f},$$

Точка S_1 — изображение источника S в линзе без учёта зеркал, поэтому при $a = SO = 1,5f$ получаем $OS_1 = b = 3f$.

3) Зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала, причём это свойство применимо как к действительным, так и к мнимым предметам. Точка S_2 — изображение предмета S_1 в зеркале AC без учёта второго зеркала, значит, построив в плоскости зеркала AC перпендикуляр S_1D и продолжив его на такое же расстояние, находим S_2 .

4) Рассуждая аналогично, строим точку S_3 — изображение предмета S_2 в зеркале BC без учёта линзы. Последовательное применение двух отражений относительно взаимно перпендикулярных прямых эквивалентно одному отражению относительно их точки пересечения (вспомним свойство центральной симметрии графика нечётной функции), поэтому $S_3C = CS_1$, откуда

$$S_3O = S_3C - OC = CS_1 - OC = OS_1 - 2OC = 3f - 2f = f,$$

то есть изображение S_3 совпадает с передним фокусом F линзы.

5) Искомая точка S' является действительным изображением мнимого предмета S_3 , поэтому из формулы тонкой линзы при $a = -S_3O = -f$ получаем $S'O = b = f/2$.

В самом начале решения был выбран луч, который сперва отражается от зеркала AC , а потом от BC , однако существуют лучи, которые испытывают отражения в обратном порядке. В данном случае из симметрии ясно, что они пересекутся в той же точке, однако при другом расположении зеркал могли бы возникнуть два конечных изображения. Таким образом, окончательный ответ: изображение будет на расстоянии $f/2 = 5$ см перед линзой.

Ответ: 5 см