Разбор

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.
1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.
2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Решение

Для решения первого пункта достаточно показать, как именно разбивается периметр картины на полоски 1×3. Для этого расположим в первой строке непересекающиеся полоски 1×3. После этого у нас останется одна клетка, так как 256 даёт остаток 1 при делении на 3. Воспользуемся пустой клеткой, оставшейся после замощения, в первой строке и замостим столбец. В нём аналогично останется одна пустая клетка в конце, так как 1024 даёт остаток 1 при делении на 3. Повторим эту операцию для нижней строки и оставшегося столбца – получим разбиение периметра на полоски 1×3.

Осталось посчитать количество таких полосок в разбиении: $255 \div 3 \times 2 + 1023 \div 3 \times 2 = 852$. И для получения ответа умножим это число на 32, получим $852 \times 32 = 27264$.

Во втором пункте покажем, что достижима произвольная сумма. Будем считать, что вырезан правый нижний уголок. Покажем, что для произвольного числа X существует картина с такой суммой на периметре без одного уголка.

0	0	32
$X - 53824$	0	$53856 - X$
$53856 - X$	32	$X - 53856$

Замостим всю таблицу при помощи показанного выше квадрата 3×3, просто циклично повторяя его. Для данного квадрата можно убедиться, что все условия выполняются. Очевидно, что и любой его циклический сдвиг не нарушает условий, а значит мы получим корректную с точки зрения условий раскраску. Оставим эту часть для доказательства участникам.

Теперь посчитаем исходную сумму. Для этого заметим, что полоски на периметре без уголков будут иметь длину, кратную 3, а значит разбиваются на полоски 1×3. Сумма в этих полосках равна $(501 + 2022) \div 3 \times 2 \times 32 = 53824$. Также заметим, что исходя из построения в нижнем левом уголке всей таблицы будет стоять число, которое расположено во второй строке первом столбце нашей таблицы 3×3, так как длина стороны даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично в правом верхнем углу таблицы стоит число, которое расположено в первой строке втором столбце таблицы 3×3.

Тогда вся сумма равна сумме полосок и сумме чисел в уголках: $(0 + 0 + X - 53824) + 53824 = X$.

Критерии оценки

Решения, которые доказывали неоднозначность суммы оценивались из 18 баллов.

Задание 2. (25 баллов) Будем называть *красотой* массива из N положительных целых чисел следующее выражение

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| a_i - a_{i+1} \right|$$

где a_i — элемент массива с номером i. Назовем *минимальной красотой* наименьшее значение *красоты* массива по всем его перестановкам, иными словами по всем способам переупорядочить элементы массива. Сколько существует массивов с *минимальной красотой* и *красотой* равной 2048 из 1024 положительных целых чисел, не превосходящих 10000?

Разбор

Расположим точки нашего массива на числовой прямой. Сегментами будем называть отрезки прямой, которые заключены между соседними по возрастанию точками. Заметим, что красота в такой интерпретации является длиной пути обхода наших точек. Так как путь проходит через все точки, в том числе через крайние, а он является непрерывным, то каждая из точек между крайними является покрытой нашим путём. Значит оценка снизу на длину нашего пути – это разность значения максимума и минимума в массиве. При этом он достигается при отсортированном массиве. Действительно, тогда каждый сегмент покрыт ровно один раз.

Покажем, что если исходный массив не является отсортированным в убывающем или возрастающем порядке, то его красота не является минимальной. Не умаляя общности будем считать, что префикс массива является отсортированным по возрастанию. Из всех таких префиксов рассмотрим префикс с максимальной длиной k. Следующий элемент a_{k+1} нарушает отсортированность, а значит сегмент от $max(a_{k-1}, a_{k+1})$ до a_k будет входить в сумму более 1 раза.

Теперь мы знаем, что искомые массивы являются отсортированными в убывающем или возрастающем порядке, причём разность между максимумом и минимум равна 2048.

Минимумом в таком массиве может быть любое число от 1 до 7952. Максимум при этом фиксирован, значит нам осталось выбрать 1022 числа с повторениями со значениями из 2048 возможных.

Далее мы хотим показать, как решение этой задачи сводится к выбору 2047 шариков из 3069. Подробный разбор сведения одной задачи к другой описан в разборе 4 задачи 8 класса. Он должен быть в вашем решении, но для краткости мы его здесь не приводим, хотя и опишем основные шаги далее.

1) Показываем, как из любого размещения шаров получить какой-то способ выбрать числа. Доказываем, что для двух различных размещений получаются два различных способа выбрать числа. Это показывает нам, что мощность первого множества не больше мощности второго множества.
2) Показываем, как из какого-то способа выбрать числа получить способ размещения шаров. Доказываем, что для двух различных способов получаются два различных размещения. Получаем обратное соотношение между мощностями.
3) Значит, что эти множества равномощны.

Получаем, что ответ равен $7952 \times 2 \times C_{3069}^{2047}$.

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x)$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Решение

Для начала покажем, что такой граф представляет из себя набор непересекающихся циклов. Очевидно, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро по построению. Так же легко заметить, что так как все $f(i)$ различны из-за того, что это перестановка, и каждое значение от 1 до n встречается среди значений $f(i)$, то и входящая степень каждой вершины равна 1.

Рассмотрим произвольную вершину графа. Будем двигаться по рёбрам этого графа, начиная с этой вершины, пока мы можем продолжить путь, не заходя в посещенные вершины. Так как выходящее ребро у нас всегда есть, то рассмотрим, куда оно может вести:

1) новая вершина
2) посещенная вершина, отличная от исходной
3) исходная вершина

При этом второй случай невозможен, так как тогда мы получаем, что у посещенной вершины входящая степень больше 1. А в первом случае мы всегда можем повторить шаг, так как исходящее ребро из неё тоже есть. Значит, так как граф конечен, то мы всегда окажемся в исходной вершине, то есть граф разбивается на циклы.

Осталось заметить, что такие циклы не пересекаются. Для этого достаточно сослаться на то, что входящие и исходящие степени вершин равны 1, что невозможно при пересечении циклов.

Получаем, что каждая вершина лежит в каком-то цикле, и при том ровно в одном.

Рассмотрим значение $s(X)$. Эта функция просто ставит 1 в битовой записи числа на элементах с номерами, равными номерам вершин в цикле. Так как мы получили, что каждая вершина i лежит ровно в одном цикле, то при вычислении $g(P)$ найдётся только один элемент из членов выражения, для которого i-ый бит равен 1. А значит в результате мы получим число, в битовой записи которого с 1 по n-ый бит стоят единицы – такое число $2^{n+1} - 2$.

Мы получили, что значение $g(P)$ не зависит от перестановки, а только от её длины.

Тогда искомый ответ равен xor от $n!$ одинаковых элементов.

Теперь осталось заметить, что при $n = 1$ у нас существует ровно одна такая перестановка и ответ будет равен 2.

При $n > 1$, количество одинаковых элементов будет четным, и пользуясь свойством xor ($x \, xor \, x = 0$) получаем, что искомое значение равно 0.

Критерии оценки

Доказательство того, что граф имеет такой вид оценивалось из 8 баллов.

Доказательство факта, что $g(P)$ не зависит от перестановки оценивалось из 8 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот вам функция от двух переменных

$$F(n,\ k)\ =\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{gcd}(i,\ i\ +\ k)$$

где $\mathrm{gcd}(a,\ b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.

1) (1 балл) Найдите $F(10,\ 7)$

2) (24 балла) Найдите $F(1621620,\ 16380)$

Разбор

В первом подпункте можно было аккуратно посчитать исходную функцию руками и получить ответ 16.

Перейдём ко второму пункту.

Для начала заметим, что $\mathrm{gcd}(i,\ i\ +\ k)\ =\ gcd(i,\ k)$. Это следствие алгоритма Евклида.

Тогда во втором пункте НОД может принимать значения равные делителям 16380.

Также заметим, что при $x\ <\ k$ по тому же самому алгоритму Евклида $gcd(nk\ +\ x,\ k)\ =\ gcd(x,\ k)$.

Тогда $F(nk,\ k)\ =\ n\ \cdot\ F(k,\ k)$.

Научимся теперь считать $F(p^n,\ p^n)$. Для этого научимся считать количество чисел от 1 до p^n, для которых $gcd(x,\ p^n)\ =p^k$. Легко заметить, что это $\left[\frac{p^n}{p^k}\right] - \left[\frac{p^n}{p^{k+1}}\right]$, где $[x]$ – деление с округлением вниз. .

Вклад таких чисел в сумму при $k\ <\ n$ будет равен $(\frac{p^n}{p^k} - \frac{p^n}{p^{k+1}})\ \cdot p^k = \frac{p^{n+1}-p^n}{p} = p^{n-1}(p\ -\ 1)$.

При $k\ =\ n$ получаем единственное слагаемое равное p^n.

Тогда формула для $F(p^n, p^n)\ =\ np^{n-1}(p\ -\ 1)\ +p^n$.

Теперь покажем, что для взаимнопростых чисел a и b выполняется $F(ab, ab)\ =\ F(a, a)\ \cdot\ F(b, b)$.

Рассмотрим правую часть это выражения как произведение двух скобок из слагаемых. При этом очевидно, что итоговое количество слагаемых при произведении будет совпадать с количеством слагаемых в левой части выражения.

Воспользуемся китайской теоремой об остатках. Тогда у нас существует биекция между парой остатков при делении на a и b соответственно и остатком при делении на ab.

Пусть такой паре остатков r_1 и r_2 соответствует остаток N. Мы хотим показать, что $gcd(N,\ ab)\ =\ gcd(r_1, a)\ \cdot\ gcd(r_2,\ b)$. Для этого заметим, что $gcd(N,\ ab)\ =\ gcd(N,\ a)\ \cdot\ gcd(N,\ b)$ из-за того, что a и b взаимнопросты. При этом $gcd(N,\ a)\ =\ gcd(xa\ +r_1,\ a)\ =\ gcd(r_1,\ a)$ и аналогично $gcd(N,\ b)\ =\ gcd(r_2, b)$, что доказывает необходимое утверждение.

Получаем, что левая и правая суммы поэлементно равны. А значит равны и сами суммы.

Для ответа на задачу осталось разложить 16380 на простые множители и подставить значения в формулу.