Разбор

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из 512 столбцов и 2048 строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего квадрат 2×2 клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 64.

Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом или последнем столбцах, или в первой, или последней строчках.

Решение

Для решения задачи сначала покажем, что сумма чисел в прямоугольнике со сторонами $2n \times 2m$ равна $64 \times nm$. Для этого достаточно показать, что такой прямоугольник разбивается на nm непересекающихся квадратов 2×2. Действительно, мы просто разбиваем каждую из сторон на n и m соответственно частей длины 2, и получившаяся сетка является подходящим разбиением.

Тогда ответов на задачу будет разность суммы в исходной таблице и в таблице без периметра. То есть из суммы чисел в таблице 512×2048 мы вычитаем сумму чисел в таблице 510×2046. Получаем $64(256 \times 1024 - 255 \times 1023) = 81856.$

Критерии оценки

Ответ без объяснений оценивался в 0 баллов.

Решения оценивались из 25 баллов в зависимости от строгости утверждений.

За арифметические ошибки снимался 1 балл в случае, если формула была написана корректно.

Задание 2. (25 баллов) Гриша увлекается рисованием. В данный момент он хочет изобразить пейзаж с двумя горами. Для простоты Гриша решил, что поверхность земли он изобразит в качестве прямой линии, а горы в виде двух равнобедренных треугольников, основанием лежащих на линии земли. Углы при основании гор равняются 45°.
С одной стороны, Гриша планирует сохранить аутентичность пейзажа, поэтому он хочет, чтобы общая протяженность поверхности гор равнялась X условных единиц.
С другой стороны, немного художественного вымысла не помешает, поэтому Гриша хочет минимизировать площадь гор на рисунке, чтобы сэкономить краску.
Помогите Грише найти минимальную площадь гор на рисунке, если общая протяженность поверхности гор равняется 4096.

Решение

Для начала заметим, что равнобедренные треугольники с углом при основании равным 45° являются прямоугольными. Пусть катеты треугольников равны a и b соответственно. Тогда из условия на общую протяженность поверхности гор получаем, что $2a + 2b = 4096$ или же $a + b = 2048$.
Обозначим $a = 1024 + x, b = 1024 - x$, где $x \geq 0$

Тогда нам нужно минимизировать функцию $\frac{a^2+b^2}{2} \rightarrow min$.

$$\frac{(1024+x)^2+(1024-x)^2}{2} \rightarrow min \Leftrightarrow (1024 + x)^2 + (1024 - x)^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2^{21} + 2x^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2x^2 \rightarrow min$$

Последнее выражение минимально при $x = 0$. Так как переходы были равносильными, то и исходная функция при этом минимальна.

Таким образом минимальная площадь равна $\frac{1024^2 + 1024^2}{2} = 1024^2 = 2^{20}$.

Критерии оценки

В задаче не подразумевалась возможность пересечения гор. Решения, которые рассматривают эти случаи оценивались в зависимости от их корректности.

Решения, не содержащие доказательства, что минимальная площадь достигается при равенстве сторон оценивались в 0 баллов.

Задание 3. (25 баллов) Саша недавно научился играть в нарды. Но правила игры показались ему слишком сложными, поэтому он решил их упростить.
Поскольку Саша не любит играть с кем-то, то в первую очередь он решил, что будет играть один и не будет ни с кем соревноваться. Затем Саша решил, что начинать из одной и той же позиции – это скучно, поэтому начал экспериментировать. Теперь он просто располагает фишки по каким-то лункам и начинает с такой конфигурации.
Более формально, поле для игры в нарды состоит из 24 лунок. У Саши есть 18 фишек, которые он изначально расставляет по лункам. В лунке может стоять любое количество фишек.
Теперь Саше стало интересно, сколько же существует вариантов стартовых позиций. Помогите ему ответить на этот вопрос.

Решение

Пусть у нас есть 41 шарик расположенные в линию, 23 из которых окрашены в черный цвет, а остальные в белый. Для удобства добавим к ним в начале и конце по одному черному шару.
Покажем для начала, как из такого объекта получить соответствующее ему размещение фишек по лункам.
У нас есть 24 черных шара. Пронумеруем их по порядку вхождения в линию, начиная с 0, и в лунку с номером n (лунки нумеруем с 1) поместим столько фишек, сколько белых шаров находится между шарами с номерами $n - 1$ и n. Так как белых шаров 18, то на поле окажется ровно 18 фишек.

Покажем, что две различных раскраски шаров дадут нам разные расположения фишек по лункам. Для этого рассмотрим первый шар в двух раскрасках, цвет которого различается. Пусть в первой раскраске он имеет белый цвет, а во второй – чёрный, который имеет номер k. Тогда очевидно, что количество фишек в лунке с номером k в первом и втором случае будет отличаться. Значит полученные образы такого преобразования различны для различных раскрасок.

Мы показали, что для каждого элемента множества всех раскрасок шаров существует образ в множестве расположений фишек по лункам и при этом они различны. Значит, мощность второго множества не меньше мощности первого множества.

Покажем теперь обратное. У нас есть какое-то размещение фишек по лункам и мы хотим показать, как мы преобразуем его в раскраску шаров. Для этого будем действовать по обратному алгоритму. Первый шар покрасим в черный цвет. Идём по порядку по всем лункам. При рассмотрении лунки мы окрашиваем k шаров в белый цвет и один в черный, где k – количество фишек в очередной лунке. Тогда в получившейся раскраске окажется 18 белых шаров (просто по количеству фишек), первый шар по построению черный, последний является черным так как после рассмотрения последней лунки мы добавили черный шар, а всего черных шаров вместе с первым будет столько же, сколько лунок плюс один начальный. Значит мы получили объект из множества различных раскрасок шаров.

Доказательство того, что объекты при этом различаются аналогично предыдущему: достаточно аккуратно рассмотреть первую лунку, количество фишек в которой для двух расположений различно. Оставим эту часть для участников.

Аналогично предыдущему пункту мы показали, что мощность первого множества не меньше мощности второго множества. Значит они равномощны. Тогда для ответа на задачу можно посчитать количество элементов в множестве раскрасок шаров.

Для подсчета таких элементов нам необходимо посчитать количество способов выбрать 23 шара из 41, которые будут являться черными. Это количество сочетаний из 41 по 23 – это и есть ответ на задачу.

Критерии оценки

Просто сослаться на формулу шаров и перегородок в этой задаче не достаточно. Решения, который используют её без доказательства оцениваются в 0 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Антон увлекается математикой и сегодня он изучает *красоту* натуральных чисел. Красотой натурального числа X Антон считает количество пар натуральных чисел a и b, таких что их наибольший общий делитель равняется 1, а их произведение равняется X. Помогите Антону найти ответы на следующие вопросы.

1) (4 балла) Какова *красота* числа 101?
2) (21 балл) Какая максимальная *красота* среди первых 1024 натуральных чисел?

Решение

Разложение исходного числа X на простые множители: $\prod_i p_i^{x_i}$.

Рассмотрим такую пару чисел a и b, что $ab = X$ и $gcd(a,\ b)\ =\ 1$. Очевидно, что оба числа содержат в себе только простые числа, которые присутствуют в разложении числа X. При этом они не могут одновременно делиться на одно и то же простое число, так как это противоречит условию о взаимной простоте. Тогда каждый множитель вида $p_i^{x_i}$ из разложения X лежит в одном из чисел a или b.

Тогда зная разложение числа X на простые множители, а точнее количество k различных простых чисел в нём, мы можем посчитать его красоту. Для этого достаточно посчитать количество способов разбить k элементов на два неупорядоченных множества – оно равно 2^{k-1}.

Из этого следует, что ответ для первого пункта равна 1, так как 101 – простое.

Мы показали, что красота числа зависит только от количества различных простых чисел в разложении и увеличивается с увеличением этого параметра.

Покажем, что среди первых натуральных чисел нет числа, которое содержит в разложении хотя бы 5 различных простых чисел. Рассмотрим произвольное такое число Y. Не умаляя общности, будем считать, что все простые числа в нём содержаться в первой степени (а иначе просто поделим на лишние множители – число только уменьшится). Теперь рассмотрим 5 наименьших простых в разложении. Заметим, что если мы заменим их на наименьших пять простых среди всех простых чисел, то число не увеличится. Тогда $Y > 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 =\ 2310$. Значит таких чисел нет среди первых 1024 натуральных.

Число, в котором содержится 4 простых – $210\ = 2\ \times\ 3\ \times\ 5\ \times\ 7$. Его красота равна 8.

Критерии оценки

В некоторых решениях считались упорядоченные пары. Это не влияло на оценку.