Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Рассмотрим все пары целых чисел a и b, таких что $1 \le a \le b \le 2048$. Для скольких из них выполняется следующее неравенство: $gcd\ (a, b) < a\ xor\ b$?

- $gcd\ (a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b
- Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются.

Например, $7_{10}\ xor\ 5_{10} = 111_2\ xor\ 101_2 = 010_2 = 2_{10}$

Задание 2. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.

Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.

1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.
2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x).$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот Вам функция от двух переменных

$$F(n, k) = \sum_{i=1}^{n} gcd\ (i, i + k)$$

где $gcd\ (a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.

1) (1 балл) Найдите $F(7, 7)$
2) (24 балла) Найдите $F(1024, 1024)$