

Сумма расстояний до выделенных точек

Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длины 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером i (при $i > 1$) удалена от дома Миши на $1 + 3 \cdot i$ метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью. Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

Решение

Давайте разобьем суммарную крутость на следующие слагаемые:

- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые делятся на 3
- Суммарная крутость по всем целым, координатам, которые дают остаток 1 при делении на 3
- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые дают остаток 2 при делении на 3

Очевидно, что ответом на задачу будет сумма трех описанных выше величин. В рамках разбора покажем, как считать вторую из них, остальные считаются схожим образом.

Давайте для простоты будем считать, что длина трассы 8191 метр, также пока не будем учитывать точку 0, значения для данных величин можно вычислить вручную и позже добавить к ответу.

Давайте научимся считать суммарную крутость, но только до остановок с меньшими координатами, чтобы получить суммарную крутость для всех остановок домножим ответ на два в силу симметрии.

Пусть $f(i)$ – количество остановок с координатами меньше, чем у $1 + 3 \cdot i$, тогда $f(i) = \frac{1 + 3 \cdot i - 1}{3} = i$, заметим, что расстояния до автобусных остановок образуют арифметическую прогрессию с шагом 3, при этом количество членов этой прогрессии равняется $f(i)$.

Тогда по формуле о сумме арифметической прогрессии получаем, что от фиксированной точки $1 + 3 \cdot i$ расстояния до всех автобусных остановок вычисляется по формуле $i \cdot \frac{3 + 3 \cdot i}{2} = \frac{3 \cdot i \cdot (i + 1)}{2}$, пусть n – количество автобусных остановок (в рамках задачи это число получается равным 2730), тогда нужно посчитать значение следующего выражения $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{3 \cdot i \cdot (i + 1)}{2} + \dots + \frac{3 \cdot 2730 \cdot 2731}{2} = \frac{3}{2} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2730 \cdot 2731)$

Можно показать, что значение выражения в скобках равняется $\frac{2730 \cdot 2731 \cdot 2732}{3}$, таким образом ответ для остатка 1 равняется $2730 \cdot 2731 \cdot 2732$, так как мы еще домножили на 2. Также надо не забыть учесть выкинутые точки.

Аналогичным образом вычислялась суммарная крутость и по другим точкам, с той лишь разницей, что менялись первые члены арифметических прогрессий.

Перестановки (возрастают, убывают, возрастают)

Перестановкой чисел от 1 до n будем называть упорядоченное множество из n элементов, в котором каждое из чисел от 1 до n встречается ровно один раз.

Индексацию элементов перестановки будем начинать с 1.

Назовём перестановку P *интересной*, если для неё существует два таких индекса её элементов $i_{first} < i_{second}$, что одновременно выполняются три условия

- Для $1 \leq i < i_{first}$ верно, что $P_i < P_{i+1}$
- Для $i_{first} \leq i < i_{second}$ верно, что $P_i > P_{i+1}$
- Для $i_{second} \leq i < n$ верно, что $P_i < P_{i+1}$

Найдите количество *интересных* перестановок чисел от 1 до n .

Решение

Научимся для начала решать более простую задачу. Найдём количество перестановок длины k , таких, что их монотонность меняется не более одного раза. Рассмотрим случай, когда изначально перестановка возрастает (случай с убывающей перестановкой рассматривается аналогично).

Можно показать, что существует биекция между такими перестановками и разбиениями $k - 1$ элементов на два множества. Действительно, единственным “переломным” элементом такой перестановки может быть число k , а остальные разбиваются на две группы: слева от него и справа.

Теперь мы можем воспользоваться этим результатом для исходной задачи: для каждого k выберем элементы, которые будут образовывать префикс последовательности до i_{first} включительно, а из оставшихся элементов нам нужно сформировать последовательность из упрощенной задачи.

В замкнутый вид формула сворачивается с помощью приведения её к виду бинома Ньютона. Также нужно аккуратно рассмотреть граничные случаи.

φ^* бесконечно возрастает

Обозначим за $f(n)$ функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших n взаимно простых с ним.

Обозначим за $f_k(n)$ функцию, которая при $k = 1$ равна $f(n)$, а иначе $f_k(n) = f_{k-1}(n)$.

За $f^*(n)$ обозначим функцию, равную первому значению k при таком n , что $f_k(n) = 0$.

Покажите, что для любого натурального X найдётся такое N_X , что для любого $n > N_X$ верно, что $f^*(n) > X$.

Решение

В данной задаче была опечатка. Жюри оценивало отдельные идеи участников, в том числе указания на некорректность условий.

В оригинальной версии задачи $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$.

Основная идея решения заключалась в том, чтобы показать, что $f(n)$ ограничена снизу какой-нибудь функцией от n (например $f(n) > \frac{\sqrt{n}}{2}$) и заметить, что значение $f^*(n) = f^*(f(n)) + 1$. Дальнейшее доказательство мы оставим вам в качестве упражнения.