

Сумма расстояний до выделенных точек

Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длины 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером i (при $i > 1$) удалена от дома Миши на $1 + 3 \cdot i$ метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью. Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

Решение

Давайте разобьем суммарную крутость на следующие слагаемые:

- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые делятся на 3
- Суммарная крутость по всем целым, координатам, которые дают остаток 1 при делении на 3
- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые дают остаток 2 при делении на 3

Очевидно, что ответом на задачу будет сумма трех описанных выше величин. В рамках разбора покажем, как считать вторую из них, остальные считаются схожим образом.

Давайте для простоты будем считать, что длина трассы 8191 метр, также пока не будем учитывать точку 0, значения для данных величин можно вычислить вручную и позже добавить к ответу.

Давайте научимся считать суммарную крутость, но только до остановок с меньшими координатами, чтобы получить суммарную крутость для всех остановок домножим ответ на два в силу симметрии.

Пусть $f(i)$ – количество остановок с координатами меньше, чем у $1 + 3 \cdot i$, тогда $f(i) = \frac{1 + 3 \cdot i - 1}{3} = i$, заметим, что расстояния до автобусных остановок образуют арифметическую прогрессию с шагом 3, при этом количество членов этой прогрессии равняется $f(i)$.

Тогда по формуле о сумме арифметической прогрессии получаем, что от фиксированной точки $1 + 3 \cdot i$ расстояния до всех автобусных остановок вычисляется по формуле $i \cdot \frac{3 + 3 \cdot i}{2} = \frac{3 \cdot i \cdot (i + 1)}{2}$, пусть n – количество автобусных остановок (в рамках задачи это число получается равным 2730), тогда нужно посчитать значение следующего выражения $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{3 \cdot i \cdot (i + 1)}{2} + \dots + \frac{3 \cdot 2730 \cdot 2731}{2} = \frac{3}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2730 \cdot 2731)$

Можно показать, что значение выражения в скобках равняется $\frac{2730 \cdot 2731 \cdot 2732}{3}$, таким образом ответ для остатка 1 равняется $2730 \cdot 2731 \cdot 2732$, так как мы еще домножили на 2. Также надо не забыть учесть выкинутые точки.

Аналогичным образом вычислялась суммарная крутость и по другим точкам, с той лишь разницей, что менялись первые члены арифметических прогрессий.

φ^* бесконечно возрастает

Обозначим за $f(n)$ функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших n взаимно простых с ним.

Обозначим за $f_k(n)$ функцию, которая при $k = 1$ равна $f(n)$, а иначе $f_k(n) = f_{k-1}(n)$.

За $f^*(n)$ обозначим функцию, равную первому значению k при таком n , что $f_k(n) = 0$.

Покажите, что для любого натурального X найдётся такое N_X , что для любого $n > N_X$ верно, что $f^*(n) > X$.

Решение

В данной задаче была опечатка. Жюри оценивало отдельные идеи участников, в том числе указания на некорректность условий.

В оригинальной версии задачи $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$.

Основная идея решения заключалась в том, чтобы показать, что $f(n)$ ограничена снизу какой-нибудь функцией от n (например $f(n) > \frac{\sqrt{n}}{2}$) и заметить, что значение $f^*(n) = f^*(f(n)) + 1$. Дальнейшее доказательство мы оставим вам в качестве упражнения.

Максимизация похожести

Одним музыкальным сервисом пользуется n человек. Всего в этом сервисе есть m различных песен.

У каждого пользователя есть плейлист с понравившимися ему песнями.

Каждый пользователь может зайти в плейлист к другому пользователю. Назовем такой процесс *ознакомлением*. Все пользователи считают себя настоящими ценителями музыки, поэтому если во время такого *ознакомления* с другим плейлистом они видят, что какая-то песня, которая нравится им, встречается в плейлисте у другого пользователя, то она перестает им нравится. Но при этом им начинают нравится песни, которые не нравились им, но нравились человеку, плейлист которого они сейчас смотрят.

Назовем *похожестью* двух пользователей количество совпадающих песен в их плейлистах. Какая максимальная *похожесть* по всем парам людей может быть достигнута после произвольного количества таких *ознакомлений*?

Решение

Составим таблицу, каждая строка которой соответствует какому-то пользователю, а каждый столбец песне. На пересечении строки i и столбца j поставим 1 тогда и только тогда, когда пользователю i нравится песня с номером j .

Заметим, что тогда операция *ознакомления* пользователя a с плейлистом пользователя b – это присвоение строке пользователя a поэлементного *xor* со строкой b .

Воспользуемся методом Гаусса для приведение матрицы к ступенчатому виду для нашей исходной матрицы. Вы можете ознакомиться с ним вне этого разбора, но в рамках решения требовалось каким-то образом описать этот метод.

Если в ступенчатом виде есть хотя бы одна строка, которая полностью состоит из нулей, то тогда мы можем получить похожест, равную количеству песен, которые нравятся хотя бы одному человеку. Это простое упражнение мы оставим вам для самостоятельного разбора.

Этого было достаточно для получения полного балла по задаче.

Рассмотрение случая, когда в матрице не остаётся строк из нулей не оценивалось.