

Шахматная доска

Данил и Саша живут на шахматной доске со стороной длиной N клеток, где N — целое положительное число. Данил живет в левом нижнем углу, а Саша в правом верхнем. Ребята настолько похожи, что перемещаются по доске похожим образом. Данил может перемещаться по доске следующим образом:

- Перейти на одну клетку вверх, при этом Саша одновременно с этим переместится на одну клетку вниз.
- Перейти на одну клетку вправо, при этом Саша одновременно с этим переместится на одну клетку влево.

Каждый из ребят хочет дойти до дома другого, чтобы оставить там сюрприз. Однако, если в какой-то момент ребята окажутся в одной клетке, то увидят друг друга и сюрприз будет испорчен. Помогите ребятам подсчитать количество различных маршрутов, таких что они дойдут до домов друг друга и при этом не встретятся. Два маршрута считаются различными, если существует хотя бы один момент времени, где в одном маршруте Саша пошел вниз, а в другом налево.

Решение

Сначала сделаем несколько замечаний:

- 1) Друзья могут встретиться только в центре доски, так как они проходят одинаковое расстояние в каждом из направлений.
- 2) Для доски четного размера ребята никогда не встретятся. Для доказательства этого замечания нужно было рассмотреть случай, когда ребята прошли по половине доски в каждом из направлений и перебрать их возможные ходы.

Вместо того, чтобы считать количество путей, когда они не встретятся, посчитаем количество путей когда они встретились и вычтем это значения из количества всех путей.

Так как друзья могут встретиться только в центральной клетке доски, то нужно посчитать сколько путей проходит через центральную клетку. Это значение равно количеству путей из одного угла в центральную клетку и из нее до другого угла.

Считается это по формуле сочетаний. Без ограничения общности будем считать пути Данила, обозначим за $X = \lfloor N / 2 \rfloor + 1$, тогда количество путей до центральной клетки равняется C_{2X}^X , так как нам нужно выбрать X движений вверх, остальные будут движениями вправо. Аналогично вычисляется количество путей от центральной клетки до правого верхнего угла. Отсюда получаем, что количество путей при которых ребята встретятся равняется $(C_{2X}^X)^2$. Из похожих соображений вычисляется общее количество путей, оно равно C_{2N}^N . Для получения итогового ответа нужно из общего количества путей вычесть количество неподходящих путей, подставив вместо X нужные значения.

Проверка на простоту

Саша очень любит гулять по Екатеринбургу и в уме проверять числа на простоту. Но поскольку Саша прогуливал лекции по теории чисел, то проверяет он их не совсем

обычным способом. Саша считает число N простым, если для всех чисел p таких, что $p^2 < N$ и p — простое по его мнению, выполняется следующее условие: p не делит N нацело. Также Саша абсолютно точно уверен, что число 2 — простое.

Мы очень хотим показать Саше, что он не прав, поэтому помогите нам подсчитать насколько различается количество простых чисел в классическом смысле и количество простых чисел по версии Саши среди положительных целых чисел меньших 10000.

Напомним, что простым числом в классическом смысле является число, которое делится только на 1 и на само себя.

Решение

Заметим, что при проверке на простоту Саша неправильно проверяет числа вида p^2 , где p — некоторое простое в привычном понимании, так как не рассматривает единственный его делитель отличный от 1 и его самого. Таким образом он считает простыми также и квадраты простых чисел. Для того, чтобы найти на сколько ошибся Саша достаточно любым способом посчитать количество простых чисел меньших 100. Также заметим, что простые по версии Саши никак не влияют на алгоритм проверки на простоту, так как если число X делится на p^2 , то оно делится и на p , а число p точно меньше квадратного корня из X , значит Саша не будет считать такое число простым.

Игра с камнями

У Васи и Пети есть n кучек камней. Кучки пронумерованы от 1 до n , в кучке с номером k лежит kn камней.

Ребята играют в игру, игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За ход в игре можно выбрать кучку, забрать из неё $n - 1$ камень, а затем из $n - 1$ других кучек забрать по одному камню и положить их в исходную кучку. При этом если невозможно забрать $n - 1$ камень из выбранной в текущий ход кучки или же по 1 камню из всех $n - 1$ других кучек, то ход невозможен.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

Ключевая идея решения состоит в том, что игра становится детерминированной, как только появляется кучка размера $n - 2$.

Случай, когда $n = 1$ очевиден. Далее будем считать, что $n > 1$.

Рассмотрим случай, когда n — чётное. Опишем выигрышную стратегию для второго игрока.

Если на первом ходу Петя забирает камни не из первой кучки, то Вася может просто повторять ход за ним. Он сможет так сделать, так как после хода Пети в этом случае всегда будет нечётное количество камней в первой кучке.

Если же на первом ходу Петя забирает камни из первой кучки, то опять таки Вася может просто повторить ход за ним. Очевидно, что как только Петя заберёт камни не из первой кучки, то повторится процесс, описанный выше и Петя проиграет. Иначе

после n таких ходов, появится ещё одна кучка, размера n . Так как n чётное, то произойдёт это как раз перд ходом Пети.

Если n нечётное, то первым ходом Петя может забрать камни из второй кучки. Тогда если Вася забирает камни не из первой кучки, то мы повторяем ход за ним. После этого в первой кучке остаётся чётное количество камней — $n - 3$. Далее Петя может всегда повторять ход за Васей (это тоже нужно доказать), а так как количество камней в первой кучки с каждым ходом уменьшается на один, то Петя выиграет. Если своим ходом Вася забирает камни из первой кучки, то тогда мы оказываемся в ситуации, когда в первых двух кучках лежат $n - 1$ и $2n - 1$ камней соответственно. Тогда Петя может забрать камни из первой кучки. Заметим, что рассуждения про ход Васи остаются аналогичными, то есть при отнимании камней не из первой кучки он проигрывает. В противном же случае Петя просто повторяет ход за ним. Именно после хода Пети в кучках окажется $n - 1$ и $n - 1$ камней соответственно. Очевидно, что в этом случае Вася проигрывает.