

Проверка на простоту

Саша очень любит гулять по Екатеринбургу и в уме проверять числа на простоту. Но поскольку Саша прогуливал лекции по теории чисел, то проверяет он их не совсем обычным способом. Саша считает число N простым, если для всех чисел p таких, что $p^2 < N$ и p — простое по его мнению, выполняется следующее условие: p не делит N нацело. Также Саша абсолютно точно уверен, что число 2 — простое.

Мы очень хотим показать Саше, что он не прав, поэтому помогите нам подсчитать насколько различается количество простых чисел в классическом смысле и количество простых чисел по версии Саши среди положительных целых чисел меньших 10000.

Напомним, что простым числом в классическом смысле является число, которое делится только на 1 и на само себя.

Решение

Заметим, что при проверке на простоту Саша неправильно проверяет числа вида p^2 , где p — некоторое простое в привычном понимании, так как не рассматривает единственный его делитель отличный от 1 и его самого. Таким образом он считает простыми также и квадраты простых чисел. Для того, чтобы найти на сколько ошибся Саша достаточно любым способом посчитать количество простых чисел меньших 100. Также заметим, что простые по версии Саши никак не влияют на алгоритм проверки на простоту, так как если число X делится на p^2 , то оно делится и на p , а число p точно меньше квадратного корня из X , значит Саша не будет считать такое число простым.

Игра с камнями

У Васи и Пети есть n кучек камней. Кучки пронумерованы от 1 до n , в кучке с номером k лежит kn камней.

Ребята играют в игру, игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За ход в игре можно выбрать кучку, забрать из неё $n - 1$ камень, а затем из $n - 1$ других кучек забрать по одному камню и положить их в исходную кучку. При этом если невозможно забрать $n - 1$ камень из выбранной в текущий ход кучки или же по 1 камню из всех $n - 1$ других кучек, то ход невозможен.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

Ключевая идея решения состоит в том, что игра становится детерминированной, как только появляется кучка размера $n - 2$.

Случай, когда $n = 1$ очевиден. Далее будем считать, что $n > 1$.

Рассмотрим случай, когда n — чётное. Опишем выигрышную стратегию для второго игрока.

Если на первом ходу Петя забирает камни не из первой кучки, то Вася может просто повторять ход за ним. Он сможет так сделать, так как после хода Пети в этом случае всегда будет нечётное количество камней в первой кучке.

Если же на первом ходу Петя забирает камни из первой кучки, то опять таки Вася может просто повторить ход за ним. Очевидно, что как только Петя заберёт камни не из первой кучки, то повторится процесс, описанный выше и Петя проиграет. Иначе

после n таких ходов, появится ещё одна кучка, размера n . Так как n чётное, то произойдёт это как раз перд ходом Пети.

Если n нечётное, то первым ходом Петя может забрать камни из второй кучки. Тогда если Вася забирает камни не из первой кучки, то мы повторяем ход за ним. После этого в первой кучке остаётся чётное количество камней — $n - 3$. Далее Петя может всегда повторять ход за Васей (это тоже нужно доказать), а так как количество камней в первой кучки с каждым ходом уменьшается на один, то Петя выиграет. Если своим ходом Вася забирает камни из первой кучки, то тогда мы оказываемся в ситуации, когда в первых двух кучках лежат $n - 1$ и $2n - 1$ камней соответственно. Тогда Петя может забрать камни из первой кучки. Заметим, что рассуждения про ход Васи остаются аналогичными, то есть при отнимании камней не из первой кучки он проигрывает. В противном же случае Петя просто повторяет ход за ним. Именно после хода Пети в кучках окажется $n - 1$ и $n - 1$ камней соответственно. Очевидно, что в этом случае Вася проигрывает.

Перестановки (возрастают, убывают, возрастают)

Перестановкой чисел от 1 до n будем называть упорядоченное множество из n элементов, в котором каждое из чисел от 1 до n встречается ровно один раз.

Индексацию элементов перестановки будем начинать с 1.

Назовём перестановку P *интересной*, если для неё существует два таких индекса её элементов $i_{first} < i_{second}$, что одновременно выполняются три условия

- Для $1 \leq i < i_{first}$ верно, что $P_i < P_{i+1}$
- Для $i_{first} \leq i < i_{second}$ верно, что $P_i > P_{i+1}$
- Для $i_{second} \leq i < n$ верно, что $P_i < P_{i+1}$

Найдите количество *интересных* перестановок чисел от 1 до n .

Решение

Научимся для начала решать более простую задачу. Найдём количество перестановок длины k , таких, что их монотонность меняется не более одного раза. Рассмотрим случай, когда изначально перестановка возрастает (случай с убывающей перестановкой рассматривается аналогично).

Можно показать, что существует биекция между такими перестановками и разбиениями $k - 1$ элементов на два множества. Действительно, единственным “переломным” элементом такой перестановки может быть число k , а остальные разбиваются на две группы: слева от него и справа.

Теперь мы можем воспользоваться этим результатом для исходной задачи: для каждого k выберем элементы, которые будут образовывать префикс последовательности до i_{first} включительно, а из оставшихся элементов нам нужно сформировать последовательность из упрощенной задачи.

В замкнутый вид формула сворачивается с помощью приведения её к виду бинома Ньютона. Также нужно аккуратно рассмотреть граничные случаи.